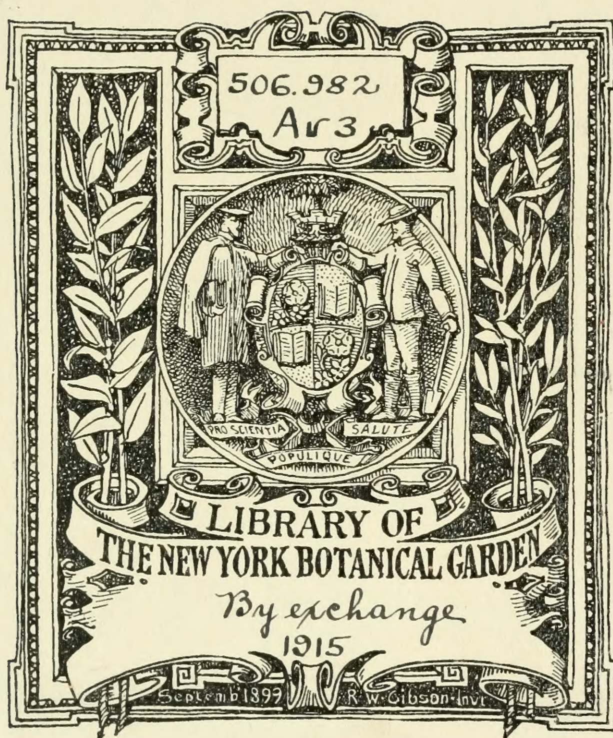


506.982
Ar3
PRO SCIENTIA
SALUTE
POPULIQUE
LIBRARY OF
THE NEW YORK BOTANICAL GARDEN
By exchange
1915
Septemb 1899
R. W. Gibson Invt

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

---

DIRECTOR : DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH

---

TOMO LXXIX

Primer semestre de 1915

---



BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS
684 — CALLE PERÚ — 684

1915

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA

# ARGENTINA

---

DIRECTOR : DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH

ENERO-FEBRERO 1915. — ENTREGAS I-II
TOMO LXXIX

ÍNDICE



BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS
684 — CALLE PERÚ — 684

1915

## JUNTA DIRECTIVA



---

## ADVERTENCIA

Los colaboradores de los *Anales*, que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos deben solicitarlo por escrito a la Dirección, la que le dará el tramite reglamentario. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con los editores señores Coni hermanos.

Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas.

Los manuscritos, correspondencia, etc., deben enviarse a la Dirección **Cevallos, 269**.

*Cada colaborador es personalmente responsable de la tesis que sustenta en sus escritos.*

**La Dirección.**

---

## PUNTOS Y PRECIOS DE SUBSCRIPCIÓN

**Local de la Sociedad, Cevallos 269, y principales librerías**

| | Pesos moneda nacional |
|---|---|
| Por mes | 1.00 |
| Por año | 12.00 |
| Número atrasado | 2.00 |
| — para los socios | 1.00 |

**LA SUBSCRIPCIÓN SE PAGA ADELANTADA**

**El local social permanece abierto de 3 á 7 y de 8 á 12 pasado meridiano**

# PROPAGACIÓN DE LA LUZ EN LOS CUERPOS EN MOVIMIENTO

POR J. LAUB

COMUNICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA DEL INSTITUTO NACIONAL DEL PROFESORADO SECUNDARIO

---

En lo siguiente deduciré la teoría de la dispersión y absorción de la luz en los cuerpos móviles, partiendo del *principio de la relatividad*. Aplicaré el cálculo vectorial en cuatro dimensiones (*); en la forma y en las notaciones me servirá como fundamento el *cálculo absoluto* introducido por los señores Einstein y Grossmann (**) en el trabajo clásico sobre la teoría de la gravedad. El análisis « tetradimensional » está contenido en el cálculo absoluto como caso especial.

La gran ventaja de la representación vectorial consiste en que sin efectuar muchas transformaciones, unidas con molestosos cálculos, podemos fácilmente llegar á ecuaciones, que tienen el carácter covariante y satisfacen con seguridad al principio de la relatividad. Además escribiendo las fórmulas en vectores de cuatro dimensiones, notaremos la íntima relación existente entre las coordenadas del espacio y del tiempo.

(*) Para la orientación en el cálculo tetradimensional véase por ejemplo (además de los trabajos de Minkowski) el espléndido libro de M. VON LAUE, *El principio de la relatividad*. Leipzig, 1913 (Teubner).

(**) A. EINSTEIN y M. GROSSMANN, *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitaetstheorie und einer Theorie der Gravitation*. (Fundamentos de una teoría generalizada de la relatividad y de una teoría de la gravedad). Leipzig, 1913 (Teubner).

## § 1. *Notaciones*

Sea dado un sistema K, al cual voy á referir las coordenadas rectangulares $x$, $y$, $z$ y el tiempo $t$. Las variables

$$x, y, z, ict = u$$

donde

$$i = \sqrt{-1}$$

y $c$ indica la velocidad de la propagación de la luz en el vacío, representaré en el siguiente por

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

ó también para abreviar por $(x_\nu)$

$$(\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Entonces escribiré también en lugar de $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial u}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right).$$

Las coordenadas $(x_\nu)$ llamaré coordenadas *mundiales* y el punto P con las coordenadas $(x_\nu)$ el punto *mundial*.

Un *trivector* (un vector con tres componentes) lo representaré con una letra minúscula, gruesa, por ejemplo,

$$\mathbf{a}.$$

Un *tetravector* (un vector con cuatro componentes) con letra mayúscula, gruesa, con un índice, todo entre paréntesis, por ejemplo,

$$(\mathbf{A}_\mu).$$

Un *exavector* (un vector con seis componentes) con una letra mayúscula, gruesa y dos índices, todo entre paréntesis.

$$(\mathbf{A}_{\mu\nu}).$$

Un tetravector *(vector de la primera especie)* (*) con los componentes

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$$

podemos considerar como un *tensor del primer rango,* el exavector $\mathbf{A}_{\mu\nu}$ como tensor especial, asimétrico del segundo rango, para el cual vale

$$\mathbf{A}_{\nu\nu} = \mathbf{A}_{\mu\mu} = 0$$

$$\mathbf{A}_{\mu\nu} = - \mathbf{A}_{\nu\mu}.$$

El exavector *(vector de la segunda especie)* tiene entonces los seis componentes:

$$\mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{14}, \mathbf{A}_{24}, \mathbf{A}_{34}.$$

El vector *dual* que pertenece á cada exavector indicaré por

$$(\mathbf{A}_{\mu\nu}^*).$$

Si $\mathbf{q}$ con las componentes $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3,$ representa la velocidad de la materia *(trivector* de la velocidad), introduciré el tetravector

$$(\mathbf{Q}_\mu)$$

con los cuatro componentes:

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{q}_1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{q}^2}{c^2}}}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{q}_2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{q}^2}{c^2}}}$$

$$\mathbf{Q}_3 = \frac{\mathbf{q}_3}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{q}^2}{c^2}}}$$

$$\mathbf{Q}_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{q}^2}{c^2}}}$$

(*) Según Minkowski.

Al vector $(\mathbf{Q}_\mu)$ llamaré la *tetravelocidad.*

## § 2. *Los tensores electromagnéticos*

Llamaré al vector de la fuerza eléctrica $\mathbf{e}$

$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$$

vector de la fuerza magnética $\mathbf{h}$

$$(\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y, \mathbf{h}_z)$$

al trivector de la polarización eléctrica $\mathbf{p}$

$$(\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z), \qquad \mathbf{p} = (\varepsilon - 1)\mathbf{e}$$

al trivector de la polarización magnética $\mathbf{m}$

$$(\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_y, \mathbf{m}_z), \qquad \mathbf{m} = (\mu - 1)\mathbf{h}$$

al vector de la corriente eléctrica $\mathbf{i}$

$$(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z).$$

La densidad eléctrica indicaré por $\rho$, los coeficientes de la dielectricidad y permeabilidad magnética por $\varepsilon$, $\mu$.

En el análisis vectorial de cuatro dimensiones representaré el tensor del campo electromagnético por

$$(\mathbf{F}_{\mu\nu});$$

$(\mathbf{F}_{\mu\nu})$ tiene los componentes :

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{F}_{23}, & \mathbf{F}_{31}, & \mathbf{F}_{12}, & \mathbf{F}_{14}, & \mathbf{F}_{24}, & \mathbf{F}_{34} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{h}_x, & \mathbf{h}_y, & \mathbf{h}_z, & -i\mathbf{e}_x, & -i\mathbf{e}_y, & -i\mathbf{e}_z. \end{array}$$

Refiriéndome á la polarización eléctrica introduciré el tetravector

$$(\mathbf{P}_\mu)$$

por la definición, que en el caso de reposo ($\mathbf{q}_1 = 0$, $\mathbf{q}_2 = 0$, $\mathbf{q}_3 = 0$, $\mathbf{q}_4 = ic$) sean :

$$\mathbf{P}_1 = \mathfrak{p}_1,$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathfrak{p}_2,$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathfrak{p}_3,$$

$$\mathbf{P}_4 = 0.$$

Luego la *tetrapolarización* es *perpendicular* á la tetravelocidad, ó el producto interno de estos dos vectores es igual á cero.

$$(\mathbf{P}_\mu)(\mathbf{Q}_\mu) = 0.$$

La última relación nos permite expresar $\mathbf{P}_4$ por los otros tres componentes, tenemos:

$$\mathbf{P}_4 = \frac{i}{c}(\mathbf{P}_1\mathfrak{q}_1 + \mathbf{P}_2\mathfrak{q}_2 + \mathbf{P}_3\mathfrak{q}_3).$$

Además me serviré de un tensor obtenido formando el producto *externo* (vectorial) del tetravector de la velocidad y de la polarización eléctrica.

$$(\mathbf{P}_{\mu\nu}) = \left(\frac{\mathbf{Q}_\nu}{c}\right)(\mathbf{P}_\mu) - \left(\frac{\mathbf{Q}_\mu}{c}\right)(\mathbf{P}_\nu).$$

Aquel tensor del segundo rango llamaré *exapolarización.*

Reemplazando la palabra polarización *eléctrica* por la *magnética,* formamos en la misma manera el tetravector

$$(\mathbf{M}_\mu)$$

y el exavector

$$(\mathbf{M}_{\mu\nu}).$$

El producto interno de la densidad eléctrica y de la tetravelocidad

$$\rho\left(\frac{\mathbf{Q}_\mu}{c}\right)$$

llamaré la *tetracorriente* de la convección y escribiré

$$(\mathbf{I}_\mu^{(k)}).$$

Además existe una *tetracorriente* de la *conductibilidad*

$$(\mathbf{I}_\mu^{(l)})$$

definida por la exigencia, que para $\mathbf{q} = 0$ (caso del cuerpo en reposo) sean :

$$\mathbf{l}_4^{(l)} = 0,$$

$$\mathbf{l}_3^{(l)} = \mathbf{i}_z,$$

$$\mathbf{l}_2^{(l)} = \mathbf{i}_y,$$

$$\mathbf{l}_1^{(l)} = \mathbf{i}_x.$$

El producto interno de la tetravelocidad $(\mathbf{Q}_\mu)$ y $(\mathbf{l}_\mu^{(l)})$ es igual á cero.

$$(\mathbf{l}_\mu^{(l)})(\mathbf{Q}_\mu) = 0.$$

De la última ecuación resulta, que tenemos :

$$\mathbf{l}^{(l)} = \frac{i}{c}(\mathbf{i}_x\mathbf{q}_x + \mathbf{i}_y\mathbf{q}_y + \mathbf{i}_z\mathbf{q}_z).$$

El producto

$$(\mathbf{F}_{\mu\nu})\left(\frac{\mathbf{Q}_\nu}{c}\right) = (\mathbf{K}_\mu)$$

llamaré la *tetrafuerza eléctrica* (fuerza electromotriz). Reemplazando $(\mathbf{F}_{\mu\nu})$ por el vector dual $(\mathbf{F}_{\mu\nu}{}^*)$, podemos formar la *tetrafuerza magnética* (fuerza magnetomotriz) :

$$-i(\mathbf{F}_{\mu\nu}{}^*)\left(\frac{\mathbf{Q}_\nu}{c}\right).$$

### § 3. *Las ecuaciones fundamentales de Einstein para el campo electromagnético*

En las aplicaciones á algunos problemas necesitaré las ecuaciones electromagnéticas para los cuerpos móviles, y por esto las expresaré á continuación, pero no en la forma dada en el año 1908 por Minkowski y Einstein-Laub (*), sino introducida recién por Einstein en

(*) A. EINSTEIN y J. LAUB, *Uber die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper (Sobre las ecuaciones electromagnéticas para los cuerpos móviles), Annalen der Physik*, 1908. HERMANN MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorggänge in bawegten Korpern (Las ecuaciones fundamentales para los fenómenos electromagnéticos en los cuerpos móviles), Acad. de Ciencias de Gottingen*, 1908.

una memoria que aparecerá en breve en la casa Teubner en Leipzig. (El conocimiento de aquellas ecuaciones las debo á gentileza del señor Einstein, que me permitió echar una ojeada á su manuscrito.)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathbf{F}_{\mu\nu}) = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathbf{P}_{\mu\nu}) + (\mathbf{I}_\mu^{(l)}) + (\mathbf{I}_\mu^{(k)})\right\} \qquad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathbf{F}_{\mu\nu}^*) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathbf{M}_{\mu\nu}) \qquad (b)$$

$$(\mathbf{I}_\mu^{(l)}) = \lambda(\mathbf{F}_{\mu\nu})\left(\frac{\mathbf{Q}_\mu}{c}\right) \qquad (c)$$

$$(\mathbf{P}_\mu) = (\varepsilon - 1)(\mathbf{F}_{\mu\nu})\left(\frac{\mathbf{Q}_\mu}{c}\right) \qquad (d)$$

$$(\mathbf{M}_\mu) = (\mu - 1)(-i(\mathbf{F}_{\mu\nu}^*)\left(\frac{\mathbf{Q}_\mu}{c}\right). \qquad (e)$$

Las ecuaciones $(c)$ — $(e)$ expresan la relación, que existe entre los constantes del material ($\varepsilon$, $\mu$, $\lambda$ = conductibilidad eléctrica) y entre el campo electromagnético.

Sin ninguna dificultad podemos escribir las ecuaciones $(a)$ — $(e)$ en la forma tridimensional recordando las definiciones dadas en el § 2.

Pasando al espacio de tres dimensiones tenemos:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{h} + \left[\frac{\mathbf{q}}{c}\cdot \mathbf{p}\right](^*)\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{e} + \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{c}\left(\frac{\mathbf{q}}{c},\ \mathbf{p}\right)\right) + \frac{\mathbf{i}}{c} + \frac{\rho\mathbf{q}}{c} \qquad (I)$$

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{e} - \left[\frac{\mathbf{q}}{c},\mathbf{m}\right]\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{h} + \mathbf{m} - \frac{\mathbf{q}}{c}\left(\frac{\mathbf{q}}{c},\ \mathbf{m}\right)\right) \qquad (II)$$

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{e} + \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{c}\left(\frac{\mathbf{q}}{c}\cdot \mathbf{p}\right)\right) = \frac{1}{c}\left(\mathbf{i}\,\frac{\mathbf{q}}{c}\right) + \rho \qquad (III)$$

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{h} + \mathbf{m} - \frac{\mathbf{q}}{c}\left(\frac{\mathbf{q}}{c},\ \mathbf{m}\right)\right) = 0 \qquad (IV)$$

$$\mathbf{i} = \lambda\,\frac{\mathbf{e} + \left[\frac{\mathbf{q}}{c},\ \mathbf{h}\right]}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \lambda\,\frac{\mathbf{e}^*}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \qquad (\alpha)$$

(*) [ ] indica el producto vectorial en tres dimensiones.

$$\mathfrak{p} = \frac{\varepsilon - 1}{1 - \frac{q^2}{c^2}} \mathfrak{e}^* \tag{$\beta$}$$

$$\mathfrak{m} = \frac{\mu - 1}{1 - \frac{q^2}{c^2}} \mathfrak{h}^* \tag{$\gamma$}$$

$$\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h} - \left[ \frac{\mathfrak{q}}{c}, \mathfrak{e} \right].$$

Esta forma de las ecuaciones, á las cuales quisiera dar el nombre de Einstein, la considero como muy ventajosa. Especialmente las ecuaciones que vinculan los vectores con las constantes de la material ($\varepsilon$, $\mu$, $\lambda$) tienen una clara significación física. La nueva forma de las ecuaciones corresponde también mejor al espíritu de la teoría de los electrones.

## § 4. *Las ecuaciones fundamentales para la dispersión de la luz en los cuerpos en reposo*

Sirviéndonos del cálculo vectorial (3 dimensiones) podemos escribir las ecuaciones de la dispersión para los cuerpos en reposo como sigue:

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + n_0^2\mathfrak{p} + 2k\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \sum \frac{\varepsilon^2 N}{\mu}(\mathfrak{e} + \omega\mathfrak{p}), \tag{1}$$

donde $\mu$ es la masa del electron,
$\varepsilon$ la carga eléctrica.
$n_0$ la frecuencia de la oscilación libre del electrón.
$k$ una constante, característica para la absorción de la luz.
$\omega$ un factor numérico.

La suma se refiere á la unidad del volumen y hay que extenderla sobre todas las especies de los electrones *(oscilaciones propias)*, que contiene el cuerpo. Para $\omega$ colocamos según H. A. Lorentz (*).

(*) H. A. Lorentz, *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*, § 100 y 106. Leiden, 1892.

$$\omega = \frac{4}{3}\pi(1 + \sigma),$$

donde $\sigma$ es una constante, cuyo valor es pequeño en comparación con 1.

## § 5. *Las ecuaciones fundamentales para la dispersión de la luz en los cuerpos en movimiento*

Fácilmente podemos obtener las ecuaciones de la dispersión para un cuerpo dotado de cualquiera velocidad en una forma *covariante* para las transformaciones Lorentz-Einstein, que satisface entonces también al *principio de la relatividad.* Una mirada sobre la ecuación (1) del § 4 nos indica, que el segundo miembro en el análisis en cuatro dimensiones tiene el carácter de un *tetravector (tetrafuerza),* luego el primer miembro debe también dar como resultado un vector del mismo rango, lo que obtendremos introduciendo el tetravector de la polarización ($\mathbf{P}_\mu$). En efecto si hay dos cuerpos con una velocidad relativa $\mathbf{q}$, existe un $\frac{d}{dt}$ y un $\frac{d}{d\tau}$; aplicando las ecuaciones de Lorentz-Einstein para la transformación de los coordenadas del espacio y tiempo, podemos escribir:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{du}{d\tau}$$

ó en vista que

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\, dt,$$

tenemos también

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\mathbf{q}_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathbf{q}_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathbf{q}_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathbf{q}_u}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}.$$

lo que podemos reunir en el símbolo:

$$\sum_\nu\left(\mathbf{Q}_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right). \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

Efectuando la transformación sobre la segunda derivada en la ecuación (1), se obtiene:

$$\sum_{\sigma\nu}\left(\mathbf{Q}_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\right)\left(\mathbf{Q}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right).$$

Introduciendo el tetravector $(\mathbf{P}_\mu)$, *escribo las ecuaciones de la dispersión* para un cuerpo con cualquier velocidad:

$$\sum_{\sigma\nu}\mathbf{Q}_\sigma\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\mathbf{Q}_\nu\frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial x_\nu}\right)+2k\sum_\nu\left(\mathbf{Q}_\nu\frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial x_\nu}\right)+n_0{}^2(\mathbf{P}_\mu)=\rho\,\{(\mathbf{K}_\mu)+\omega(\mathbf{P}_\mu)\}\quad(2)$$

$$\left(\rho=\sum_\mu\frac{\varepsilon N}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right)$$

*Todos los términos de la ecuación* (2) *tienen el carácter de unt etravector, luego dicha ecuación cumple con el principio de la relatividad.*

Queriendo expresar la ecuación (2) en el espacio de *tres* dimensiones, debemos recurrir á la definición del vector $(\mathbf{P}_\mu)$ y recordar, que vale la relación

$$(\mathbf{P}_\mu)(\mathbf{Q}_\mu)=0,$$

de la cual sacamos:

$$\mathbf{P}_4=\frac{i}{c}(\mathbf{P}_x\mathbf{q}_x+\mathbf{P}_y\mathbf{q}_y+\mathbf{P}_z\mathbf{q}_z).$$

Si queremos pasar de (2) á las ecuaciones para un cuerpo en reposo, tenemos según la definición del párrafo (2).

$$\mathbf{P}_4=0$$

$$\mathbf{P}_3=\mathbf{p}_z$$

$$\mathbf{P}_2=\mathbf{p}_y$$

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{p}_z$$

y

$$\mathbf{q}_x=\mathbf{q}_y=\mathbf{q}_z=0.$$

lo que nos dará de nuevo las ecuaciones (1), como hay que exigir.

La cuarta componente de la ecuación (2) no tiene por ahora para nosotros interés, ella expresa el teorema de la energía de una manera análoga como en las ecuaciones del movimiento de un punto material.

## § 6. *Ejemplo especial*

Sea dado un cuerpo dotado de una velocidad *undimensional* $v$ en la dirección del eje $z$ de un sistema de coordenadas. En este caso las ecuaciones fundamentales de la dispersión serán las siguientes:

$$\frac{v^2}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_x}{\partial z^2} + \frac{1}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_x}{\partial t^2} + \frac{2v}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_x}{\partial z \partial t} + \frac{2k}{w}\frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial t} + \frac{2kv}{w}\frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial z} + n_0{}^2 \mathfrak{p}_x = \rho \frac{\mathfrak{e}_x + \frac{v}{c}\mathfrak{h}_y}{w^2}$$

$$\frac{v^2}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_y}{\partial z^2} + \frac{1}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_y}{\partial t^2} + \frac{2v}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_y}{\partial z \partial t} + \frac{2k}{w}\frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial t} + \frac{2kv}{w}\frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial z} + n_0{}^2 \mathfrak{p}_y = \rho \frac{\mathfrak{e}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{h}_x}{w^2} \qquad (3)$$

$$\frac{v^2}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_z}{\partial t^2} + \frac{2v}{w^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{p}_z}{\partial z \partial t} + \frac{2k}{w}\frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial t} + \frac{2kv}{w}\frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial z} + n_0{}^2 \mathfrak{p}_z = \rho \frac{\mathfrak{e}_z}{w^2}$$

$$\left(w = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

Supongamos que hay ondas luminosas que se propagan en *la dirección del eje z*, es decir, *en la dirección* del movimiento de la materia. En lo siguiente aceptaremos que todos los vectores electromagnéticos contienen el término variable.

$$e^{int(\gamma - z)},$$

donde $\gamma$ *es una constante compleja* y $n$ la frecuencia de la luz incidente; luego las ecuaciones (3) nos darán, por ejemplo, para la primera componente la expresión:

$$\mathfrak{p}_x \left\{ n_0{}^2 - \frac{n^2}{w^2} - \frac{v^2}{w^2}\gamma^2 n^2 + 2\frac{v}{w^2}\gamma n^2 + 2\frac{k}{w} in - 2\frac{v}{w}k\gamma in - \omega\rho \right\} =$$

$$= \frac{\rho}{w^2}\left(\mathfrak{e}_x + \frac{v}{c}\mathfrak{h}_y\right). \qquad (4)$$

De otra parte las ecuaciones electromagnéticas de Einstein (§ 3) nos suministran para una onda luminosa que se propaga en la dirección del eje $z$ las relaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{h}_y - \frac{v}{c}\mathbf{p}_x\right) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{e}_x + \mathbf{p}_x) \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{h}_x + \frac{v}{c}\mathbf{p}_y\right) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{e}_y + \mathbf{p}_y) \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{e}_y + \frac{v}{c}\mathbf{m}_x\right) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{h}_x + \mathbf{m}_x) \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathbf{e}_x - \frac{v}{c}\mathbf{m}_y\right) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{h}_y + \mathbf{m}_y).
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Suponiendo como antes que los vectores electromagnéticos contienen el factor

$$e^{\text{int}\,(\gamma - z)}$$

y tomando en cuenta que podemos poner el coeficiente de la permeabilidad

$$\mu = 1 \qquad (\mathbf{m} = 0)$$

las ecuaciones (5) darán :

$$
\begin{aligned}
c\gamma\mathbf{e}_y &= -\,\mathbf{h}_x \\
c\gamma\mathbf{e}_x &= \mathbf{h}_y \\
c\gamma\left(\mathbf{h}_y - \frac{v}{c}\mathbf{p}_x\right) &= \mathbf{e}_x + \mathbf{p}_x \\
c\gamma\left(\mathbf{h}_x + \frac{v}{c}\mathbf{p}_y\right) &= -(\mathbf{e}_y + \mathbf{p}_y).
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Eliminando de (6) $\mathbf{h}$ obtendremos :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbf{p}_x}{\mathbf{e}_x} &= \frac{c^2\gamma^2 - 1}{1 + v\gamma} \\
\frac{\mathbf{p}_y}{\mathbf{e}_y} &= \frac{c^2\gamma^2 - 1}{1 + v\gamma}.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Reemplazando en la ecuación (4) $\mathbf{h}_y$ por $c\gamma\,\mathbf{e}_x$ (v. ecuación 6), el conjunto de (4) y (7) suministrará la importante relación :

$$\frac{c^2\gamma^2}{1+v\gamma}=\frac{\frac{\rho}{w^2}(1+v\gamma)}{n_0{}^2-\frac{n^2}{w^2}-\frac{v^2}{w^2}n^2\gamma+2\frac{v}{w^2}\gamma n^2+\frac{2k}{w}\gamma in-2\frac{kv}{w}\gamma in-\omega\rho} \tag{8}$$

La influencia de los términos del *primer orden* en $\frac{v}{c}$ sobre los fenómenos de la dispersión y absorción de la luz la he discutido en mi memoria : *La teoría de la dispersión y de la extinción de la luz en los gases y vapores luminescentes,* publicado en los *Annalen der Physik,* tomo 29, página 94, 1909.

§ 7. *La influencia de los términos del segundo orden en $\frac{v}{c}$ sobre la dispersión y la absorción de la luz en los gases, y vapores luminescentes.*

Supongamos que la luz se propaga en un gas dotado *únicamente* de su velocidad molecular, ó además de una velocidad de *traslación* cuyo valor sea mucho mayor que la de las moléculas, de manera que podemos despreciar la de estas últimas.

El primer caso lo tenemos realizado cuando la luz se propaga en un gas bajo condiciones normales, el segundo cuando lo hace en un tubo de Geissler ó en un tubo de rayos canales. La velocidad de las partículas (moléculas, iones ó rayos canales), que son el sitio de los electrones (resonadores) de la dispersión sea *perpendicular* á la dirección de la propagación de los rayos luminosos (dirección del eje *y). Buscamos* el *índice* de *refracción,* el *coeficiente de la absorción* que *mide un observador mirando en la dirección de la propagación de la luz.*

Procediendo de la misma manera como en el artículo anterior, agregando únicamente la condición que la velocidad de la materia es *normal* á la de la luz, obtendremos después de la integración en lugar de (8) la expresión :

$$c^2\gamma^2-1=\frac{\rho}{w^2}\,\frac{1}{n_0{}^2-\frac{n^2}{w^2}+\frac{2k}{w}in-\omega\rho}. \tag{10}$$

Si ponemos :

$$c\gamma=\nu-i\varkappa. \tag{11}$$

$\nu$ será, como es sabido, el índice de la refracción y $\varkappa$ el coeficiente de la *extinción*.

La ecuación (10) podemos ahora escribirla en la forma:

$$(\nu - i\varkappa)^2 = 1 + \frac{\rho}{w^2} \frac{1}{n_0^{\ 2} - \frac{n^2}{w^2} + 2\frac{k}{w}in - \omega\rho}. \qquad (12)$$

Para abreviar escribiremos:

$$a_1 = \frac{\rho}{w^2} \frac{n_0^{\ 2} - \frac{n^2}{w^2}}{\left(n_0^{\ 2} - \frac{n^2}{w^2}\right)^2 + 4\frac{k^2}{w^2}n^2}$$

$$b_1 = \frac{\rho}{w^2} \frac{2\frac{k}{w}n}{\left(n_0^{\ 2} - \frac{n^2}{w^2}\right)^2 + 4\frac{k^2}{w^2}n^2}$$

$$\chi = 1 - 2\omega a_1 + \omega^2(a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}).$$

Igualando las partes reales é imaginarias en (12) tenemos las ecuaciones fundamentales para el índice de refracción y el coeficiente de extinción:

$$\nu^2 - \varkappa^2 = 1 + \frac{1}{\chi} \{ a_1 - \omega(a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}) \},$$
$$2\nu\varkappa = \frac{1}{\chi} b_1. \qquad (13)$$

El efecto en $\frac{v^2}{c^2}$ es muy pequeño, y hace poco tiempo no era dado pensar sobre la posibilidad de una comprobación experimental. Pero la evolución de los métodos de medida en la óptica en los últimos años admite la posibilidad de encontrar aquel importante efecto provocado por la velocidad que los electrones de la dispersión y absorción tienen en la dirección *normal* á la de la luz incidente. (Como ya he demostrado en los *Anales de la Sociedad científica argentina*, t. 73, pág. 381, 1912 y en el *Physical Review*, t. 34, 1912, este efecto existe únicamente, si vale *además del principio de la relatividad* también el principio de la *constante velocidad luminosa en el vacío* en los espacios, en los cuales el potencial de la gravedad es invariable.) Especialmente

quiero llamar la atención sobre los hermosos trabajos efectuados recientemente en Tubingen en el laboratorio del profesor Paschen por los señores Malinowski (*), Paschen y Gerlach, quienes han podido medircambios en la longitud de ondas de la raya de la *resonancia* (**). 2537 (Unidades de Angstrom) en el mercurio hasta $5 \cdot 10^{-5}$ U. A.

En lo que sigue voy á tratar algunos casos, que tienen *un especial interés* y *pueden ser realizados.*

## § 8. *El índice de la refracción*

Muchas teorías (Drude, Voigt), no contienen el término multiplicado por $\omega$ en la ecuación (1) del párrafo 4. La consideración de aquel término da únicamente una muy pequeña corrección para el índice de refracción de un cuerpo en reposo — y en la mayor parte puede ser despreciada. — Por esto, para mayor simplificación, no discutiré los términos multiplicados por $\omega$.

Supongamos que podemos *despreciar* la *absorción* y poner en la ecuación (I) del párrafo 4: $k = 0$.

(Esto, por ejemplo, casi siempre sucederá en los gases y vapores, si la frecuencia de las ondas luminosas excitantes no se encuentra muy cerca de las oscilacioness propias de los electrones del gas). En este caso tenemos en lugar de la (13), párrafo 7, la siguiente ecuación:

$$\nu^2 = 1 + a_1, \qquad (14)$$

donde

$$a_1 = \frac{\rho}{w^2} \frac{1}{n_0^2 - \frac{n^2}{w^2}}$$

Para una substancia *monoelectrónica*, es decir una substancia que contiene electrones con *una sola oscilación* propia para luz, $a_1$ tendrá el valor:

$$a_1 = \frac{1}{w^2} \frac{\varepsilon^2 N}{\mu} \cdot \frac{1}{n_0^2 - \frac{n^2}{w^2}}.$$

(*) *Physikalische Zeitschrift*, 14, página 884, 1913, y 15, página 489, 1914.

(**) Descubierta por el físico norteamericano Wood y llamada por él *la radiación de la resonancia*, porque se produce, cuando la raya 2537 de una lámpara de mercurio atraviesa un tubo evacuado, en el cual se encuentra una gota de Hg.

Desarrollando en (14) $a_1$ en una serie según $\frac{v}{c}$ y despreciando todas las potencias superiores á $\frac{v^2}{c^2}$ obtendremos para el índice de refracción

$$\nu^2 = 1 + \frac{\varepsilon^2 N}{\mu} \left( \frac{1 + \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}}{n_0^{\ 2} - n^2} \right) + \frac{\varepsilon^2 N}{\mu} \frac{v^2}{c^2} \frac{n^2}{(n_0^{\ 2} - n^2)^2}. \qquad (15)$$

Si introducimos en lugar de las frecuencias las longitudes de ondas medidas en el vacío por intermedio de las relaciones:

$$n_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \qquad (\lambda = \text{longitud de la onda})$$

$$n = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

y ponemos:

$$D = \frac{\varepsilon^2 N \lambda_0^{\ 2}}{4\pi^2 \mu c^2},$$

la ecuación (15) se escribe en la forma:

$$\nu^2 = 1 + \frac{D\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^{\ 2}} + \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{D\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^{\ 2}} + \frac{v^2}{c^2}\frac{D\lambda_0^{\ 2}\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^{\ 2})^2}. \qquad (16)$$

Muy á menudo $\nu - 1$ es muy pequeño en comparación con 1, así que podemos escribir (16) con la aproximación:

$$2(\nu - 1) = \frac{D\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^{\ 2}} + \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{D\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^{\ 2}} + \frac{v^2}{c^2}\frac{D\lambda_0^{\ 2}\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^{\ 2})^2}. \qquad (17)$$

Como vemos en la última fórmula, *la velocidad de las partículas tanto más influye al índice de la refracción,* cuanto más nos *aproximamos á la longitud de las ondas propias* (oscilación propia) *de los electrones de la dispersión.*

El *mayor interés* tiene el caso, si las longitudes de las ondas de la luz excitante se extienden en un intervalo, que es pequeño en comparación con el valor de $\lambda$ y además se encuentra cerca de la longitud propia (oscilación propia) del electrón ($\lambda_0$).

Cuando se cumplen estas condiciones podemos poner

$$\lambda = \lambda_0 + d,$$

en donde $d$ es pequeño en comparación con $\lambda$. La ecuación (17) recibe la forma:

$$2(\nu - 1) = \frac{D\lambda}{2d} + \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{D\lambda}{2d} + \frac{v^2}{c^2}\frac{D\lambda^2}{4d^2}.$$

En la mayor parte podemos despreciar el término $\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{D\lambda}{2d}$, así, que el *índice de refracción se expresa por la simple fórmula:*

$$\nu - 1 = \frac{D\lambda}{4d} + \frac{\Delta^2\lambda}{8d^2} \tag{18}$$

$$\left(\Delta = \frac{v^2}{c^2} D\right).$$

## § 9. *El coeficiente de extinción*

Cuando no podemos despreciar la absorción, las ecuaciones, que nos permiten calcular los *coeficientes de dispersión y extinción* en *dependencia* de la frecuencia de la luz, tienen la forma siguiente:

$$\nu^2 - \varkappa^2 = 1 + \frac{\rho}{w^2}\frac{n_0^2 - \frac{n^2}{w^2}}{\left(n_0^2 - \frac{n^2}{w^2}\right)^2 + \frac{4k^2n^2}{w^2}}$$

$$2\nu\varkappa = \frac{\rho}{w^3}\frac{2k\frac{n}{w}}{\left(n_0^2 - \frac{n^2}{w^2}\right)^2 + 4\frac{k^2n^2}{w^2}} \qquad \left(\rho = \frac{\varepsilon^2 N}{\mu}\right)$$

Investigando la dispersión y absorción de la luz en los gases y vapores, podemos poner en lugar de $\nu^2 - 1$, $2(\nu - 1)$ como antes y además podemos á menudo despreciar $\varkappa$ en comparación con $\nu - 1$. Haciendo esto, tenemos:

$$\begin{aligned} 2(\nu - 1) &= \frac{\rho}{w^3}\frac{n_0^2 - \frac{n^2}{w^2}}{\left(n_0^2 - \frac{n^2}{w^2}\right)^2 + \frac{4k^2n^2}{w^2}} \\ 2\nu\varkappa &= \frac{\rho}{w^3}\frac{2k\frac{n}{w}}{\left(n_0^2 - \frac{n^2}{w^2}\right)^2 + \frac{4k^2n^2}{w^2}} \end{aligned} \tag{19}$$

*Las últimas fórmulas nos permiten estudiar el conjunto de los valores, que recorren* $\nu$ *y* $\nu\varkappa$.

El producto $\nu\varkappa$ tiene el *valor máximo* para

$$n = n_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ó limitándonos á los términos $\frac{v^2}{c^2}$ podemos decir que $\nu\varkappa$ tiene el *máximo valor* para

$$n = n_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{20}$$

El valor máximo de $\nu\varkappa$ al cual quiero llamar *intensidad de la franja de absorción* es :

$$\nu_m\varkappa_m = \frac{\rho}{4n\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)k}.$$

El valor máximo de $\nu\varkappa$ *crece* con el aumento de la velocidad $v$ y es *infinitamente grande* para $v = c$. $\nu\varkappa$ tiene la *mitad* del valor máximo para

$$n_0^2 - \frac{n^2}{w^2} = \frac{2kn}{w},$$

Poniendo en la última ecuación

$$n_0 = n + d,$$

donde $d$ es pequeño en comparación con $n$, un corto cálculo nos indica, que limitándonos á los términos $\frac{v^2}{c^2}$, tenemos la *mitad* del máximo para

$$k = d\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) - n\frac{v^2}{2c^2},$$

lo que casi siempre podremos escribir con aproximación :

$$k = d - n\frac{v^2}{c^2}$$

$\nu - 1$ tiene el valor 0, para

$$n = n_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

el valor máximo y mínimo para

$$k = \pm d - n\frac{v^2}{c^2}.$$

El movimiento de las partículas produce entonces: 1° *un desplazamiento* del máximum de la absorción; 2° *un desplazamiento de la franja de absorción; 3° modifica la intensidad de la absorción.*

Vamos ahora á aplicar nuestras deducciones para calcular el efecto en $\frac{v^2}{c^2}$, que puede producir la velocidad normal á la propagación de la luz para la raya 2537 (U. A.) de Wood en Hg. Reemplazando en la ecuación (20) la frecuencia por la longitud de la onda, tenemos el valor máximo de $\nu\varkappa$ para

$$\lambda = \lambda_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

*Una velocidad de las partículas* de $6 \cdot 10^6$ cm/seg. *produce un efecto* de $5 \times 10^{-5}$ (U. A.), lo que se puede observar según el método de Paschen y Gerlach (*).

En los rayos canales de Hg podemos fácilmente obtener representantes de una velocidad de $6 \cdot 10^6$ cm/seg., así *que hay posibilidad de medir el importantísimo efecto en* $\frac{v^2}{c^2}$, *que exige la teoría de la relatividad.*

Buenos Aires, Departamento de física del Instituto nacional del profesorado secundario, 15 de noviembre de 1914.

(*) PASCHEN y GERLACH, *loc. cit.*

# UN PROBLEMA DE QUÍMICA

*(Conclusión)*

---

2° *Azul de Turnbull.* Se obtiene vertiendo ferrocianuro de potasio $(Cy^6Fe)^2K^6$ sobre la disolución de una sal ferrosa.



$$x \,.\, (Cy^6Fe)^2K^6 + y \,.\, SO^4Fe = z \,.\, SO^4K^2 + u \,.\, (Cy^6Fe)^2Fe^3.$$

$$x = u \qquad (1)$$
$$2x + y = 5u \qquad (2)$$
$$3x = z \qquad (3)$$
$$y = z \qquad (4)$$
$$y = z \qquad (5)$$

$12x = 12u$, ecuación del cianógeno, Cy.
$2x + y = 5u$, ecuación del hierro, Fe.
$6x = 2z$, ecuación del potasio, K.
$y = z$, ecuación del azufre, S.
$4y = 4z$, ecuación del oxígeno, O.

Se observa que las ecuaciones (4) y (5) son iguales.

Expresaremos aquí las incógnitas en función de $z$. Tenemos en la (4) $y = z$. De la (3) se deduce $x = \frac{z}{3}\cdot$ De la (1) $u = x = \frac{z}{3}\cdot$ La (2) debe convertirse en identidad por los valores hallados (2) $2 \cdot \frac{z}{3} + z = 5 \cdot \frac{z}{3}\cdot$ La reacción será : haciendo $z = 3$.



$$(Cy^6Fe)^2K^6 + 3SO^4Fe = 3SO^4K^2 + (Cy^6Fe)^2Fe^3.$$

Hubiéramos podido simplificar mucho el sistema observando que el grupo $(Cy^6Fe)^2$ llamado *ferricianógeno* se transporta integramente al

segundo miembro, y que el radical $SO^4$ hace lo propio. Escribamos, llevando esto en cuenta, las ecuaciones atómicas :

$$x = u \quad (1)$$
$$3x = z \quad (2)$$
$$y = z \quad (3)$$
$$y = 3u \quad (4)$$

$x = u$, ecuación del ferricianógeno, $(Cy^6Fe)^2$.
$6x = 2z$, ecuación del potasio, K.
$y = z$, ecuación del radical, $SO^4$.
$y = 3u$, ecuación del hierro, Fe (*).

RESUMEN

El método que acabamos de desarrollar puede resumirse en las siguientes reglas :

1ª Escribanse las fórmulas químicas de las substancias que entren en reacción y las resultantes de ella precediéndolas de coeficientes indeterminados $x$, $y$, $z$ ... La ecuación así obtenida constituirá lo que hemos llamado *reacción simbólica.*

2ª Dedúzcanse las respectivas ecuaciones atómicas que son tantas como *elementos distintos* haya en las substancias que entren en reacción.

3ª Las *cantidades desconocidas* son en igual número que el de términos de la ecuación simbólica, es decir, que las substancias (grupos moleculares) que reaccionan y las producidas por la reacción.

4ª Examínense con cuidado las ecuaciones y simplifíqueselas cuanto se pueda. Como en muchos casos hay ecuaciones iguales ó equivalentes, deben suprimirse del *sistema* las repetidas, de modo que en este no haya más que *ecuaciones distintas.* Deben resultar siempre *sistemas indeterminados,* aunque en ocasiones ofrezcan otra apariencia.

(*) Este hierro es del *sulfato ferroso* que por la reacción se convierte en $Fe^3$ para formar el ferricianuro ferroso ó *azul de Turnbull.* El sistema resuelto como antes en términos de $z$, da $y = z$, $x = \frac{z}{3}$, $u = x = \frac{z}{3}$. De modo que haciendo $z = 3$, viene : $x = 1$, $y = 3$, $z = 3$, $u = 1$ los mismos coeficientes anteriores.

Estas simplificaciones tienen especial importancia para formular con brevedad muchas reacciones de la química orgánica.

Para resolverlos distinguiremos los casos principales.

1° Si el sistema consta de tantas ecuaciones como incógnitas, resuélvasele por *substitución* ó *comparación* (igualación) en términos de la incógnita cuya expresión sea más sencilla, que generalmente es la que más se repite en las ecuaciones del sistema.

Dése luego el mínimo valor entero posible á la indeterminada ó variable y resultarán para ésta y las demás incógnitas que de ella dependen los valores correspondientes á la que hemos llamado *reacción mínima.*

2° Si el sistema es *propiamente indeterminado,* es decir, si el número de incógnitas excede al de ecuaciones en una unidad, su resolución no difiere esencialmente de la del caso anterior; se irán, pues, eliminando las incógnitas cuyos coeficientes sean primos relativos entre cada dos ecuaciones, siendo preferible, generalmente, al método de *coeficientes iguales* (reducción).

Á veces resultan así ecuaciones simplificables; si tal ocurriere se las simplificará llevando en cuenta el nuevo valor general (literal) que resulte para algunas de las incógnitas, cuidando de introducir el nuevo símbolo en las ecuaciones del sistema equivalente siguiente para evitar errores y prosiguiendo la misma marcha hasta llegar á la *ecuación final* que, por lo común, resulta sencilla. Resuélvasela en función de una indeterminada $m$, si hay lugar, y procúrense expresar las demás incógnitas sacadas de las ecuaciones precedentes del sistema final en función de la incógnita de la ecuación final y de la indeterminada $m$, si ello fuera posible. También será conveniente ver si los valores generales (algebraico), hallados para las incógnitas verifican todas las ecuaciones del sistema (verificación); esto debe hacerse antes de escribir y discutir las condiciones que debían hacerse á las incógnitas enteras y positivas.

3° Si el sistema es *más que indeterminado,* es decir, *si el número de incógnitas excede al de ecuaciones en dos ó más unidades,* opérese de la misma manera hasta llegar á la ecuación final, resuélvase ésta en términos de la ó las incógnitas del segundo miembro de la ecuación final, (cuyo primero tiene *dos incógnitas)* y de una indeterminada $m$; continúase en orden regresivo determinando una nueva incógnita en cada ecuación anterior del sistema final, procurando expresarlas todas en función de las de la ecuación final y de su indeterminada $m$, si fuera posible, que no siempre lo es para las ecuaciones químicas. Aquí conviene determinar límites para $m$, ó tratar de eliminar algunas de las variables independientes con objeto de precisar mejor los valores de

las incógnitas que vienen en función de aquellas indeterminadas, pero esto parece ser pocas veces posible, probablemente por la naturaleza de las ecuaciones químicas.

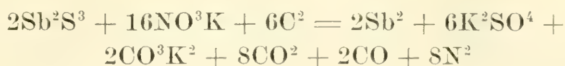
4° Cuando el número de incógnitas *excede* al de *ecuaciones en más de dos unidades,* la *ecuación final* debe disponerse de modo que puedan hallarse dos incógnitas en función de las incógnitas excedentes y de la indeterminada $m$, expresar las demás, sacándolas de las ecuaciones del sistema final, en términos de las mismas y de $m$, ó procurando expresarlas todas en función de las variables y de una misma indeterminada, como pide el análisis, si bien esto no parece posible en muchos casos. Al tratar de hallar los valores límites de $m$ que hagan enteros los de las incógnitas buscadas, debe intentarse la eliminación de variables entre las inecuaciones de condición, pues que algunas veces (aunque pocas) se llega así á determinar límites de los valores relativos de las variables independientes.

5° Si el análisis químico ú otras consideraciones (de cinética química, por ejemplo), permitieran expresar algunos coeficientes en función de otros, ó asignarles valores determinados, debemos aprovecharnos de esa ventaja, introduciendo esas relaciones en las inecuaciones de condición, á fin de reducir en lo posible la indeterminación del sistema.

6° Cuando para las incógnitas resulten expresiones muy complejas y las relaciones entre las variables sean muy difíciles de descubrir, puede seguirse otra marcha en la eliminación; pues, á veces, conduce á una ecuación final más sencilla, y con ello á resultados más fáciles de obtener.

Apliquemos por fin todo lo dicho á la resolución del ejemplo que sigue:

Pollacci, al hablar de la obtención del antimonio por medio de la *estibina,* formula la siguiente reacción que evidentemente puede simplificarse.



$$2Sb^2S^3 + 16NO^3K + 6C^2 = 2Sb^2 + 6K^2SO^4 +$$
$$2CO^3K^2 + 8CO^2 + 2CO + 8N^2$$

$$x \,.\, Sb^2S^3 + y \,.\, NO^3K + z \,.\, C^2 = u \,.\, Sb^2 + v \,.\, SO^4K^2 +$$
$$+ w \,.\, CO^3K^2 + r \,.\, CO^2 + s \,.\, CO + t \,.\, N^2 \qquad \text{(I)}$$

y que da origen al siguiente sistema de *seis ecuaciones* con *nueve incógnitas,* y por tanto, *más que indeterminado.*

He aquí sus ecuaciones atómicas:

$2x = 2u$, ecuación del Sb. (1)
$3x = v$, ecuación del S. (2)
$y = 2t$, ecuación del N. (3)
$3y = 4v + 3w + 2r + s$, ecuación del O. (4)
$y = 2v + 2w$, ecuación del K. (5)
$2z = w + r + s$, ecuación del C. (6)

Las ecuaciones (3) y (5) muestran que $y$ es par $y = 2y'$, y la (2) dice que $v$ es múltiplo de 3: $v = 3v'$.

Introduciendo estos valores en las ecuaciones y simplificando, el sistema será

$$
A \left\{
\begin{array}{lr}
x - u = 0 & (1) \\
x - v' = 0 & (2) \\
y' - t = 0 & (3) \\
6y' - 12v' - 3w - 2r - s = 0 & (4) \\
y' - 3v' - w = 0 & (5) \\
2z - w - r - s = 0 & (6)
\end{array}
\right.
$$

Elimino la $s$ en A entre (4) y (6)

$$
\begin{array}{l}
6y' - 12v' - 3w - 2r - s = 0 \\
2z - w - r - s = 0 \\
\hline
6y' - 2z - 12v' - 2w - r = 0
\end{array}
$$

ecuación resultante que manifiesta que $r$ es par $r = 2r'$ lo que la convierte en $3y' - z - 6v' - w - r' = 0$.

El nuevo sistema equivalente es el B:

$$2z - w - r - s = 0 \qquad (1)$$

$$
B \left\{
\begin{array}{lr}
x - u = 0 & (1) \\
x - v' = 0 & (2) \\
3y' - z - 6v' - w - r' = 0 & (3) \\
y' - t = 0 & (4) \\
y' - 3v' - w = 0 & (5)
\end{array}
\right.
$$

En B elimino la $w$ entre (3) y (5) y sale: $2y' - z - 3v' = 0$ ecuación resultante.

El nuevo sistema equivalente, C, después de escribir en la primera ecuación apostada $2r''$ en vez de $r$, es:

$$
C \left\{
\begin{array}{ll}
2z - w - 2r' - s = 0 & (1) \\
y' - 3v' - w = 0 & (2) \\
C' \left\{
\begin{array}{ll}
x - u = 0 & (1) \\
x - v' = 0 & (2) \\
y' - t = 0 & (3) \\
2y' - z - 3v' - r' = 0 & (4)
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

En el sistema reducido C' elimino la $x$ entre (1) y (2) resultando: $u - v' = 0$, y el nuevo sistema será:

$$
D \left\{
\begin{array}{ll}
2z - w - 3r' - s = 0 & (1) \\
y' - 2v' - w = 0 & (2) \\
x - u = 0 & (3) \\
D' \left\{
\begin{array}{ll}
y' - t = 0 & (1) \\
2y' - z - 3v' - r' = 0 & (2) \\
u - v' = 0 & (3)
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

En el sistema reducido D' elimino la $v'$ entre (2) y (3), escribiendo:

$$
\begin{array}{ll}
2y' - z - 3v' - r' = 0 & (2) \\
3u - 3v' = 0 & (3')
\end{array}
$$

$$2y' - z - 3u - r' = 0$$

ecuación resultante. Llegamos al sistema equivalente E, que es:

$$
E \left\{
\begin{array}{ll}
2z - w - 2r' - s = 0 & (1) \\
y' - 3v' - w = 0 & (2) \\
x - u = 0 & (3) \\
u - v' = 0 & (4) \\
E' \left\{
\begin{array}{ll}
y' = 0 & (1) \\
2y' - z - 3u - r' = 0 & (2)
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

En el E' eliminamos la $y'$, llegando así á la *ecuación final:*

$$
\begin{array}{l}
2y' - 2t = 0 \\
2y' - z - 3u - r' = 0
\end{array}
$$

$$z + 3u - r' - 2t = 0$$

$z - 2t = - 3u - r'$ que debemos escribir: $2t - z = 3u + r' = k$. Adviértese que el valor común de $k$ para $t$ y $z$ verifica la ecuación. Luego los valores generales en función de las variables $u$, $r'$ y de la indeterminada $m$, serán, según el análisis $t = 3u + r' + m$; $z = 3u +$

$r' + 2m$. Y á causa de la (1) de E', $y' = t$; $y = 3u + r' + m$. De la (4) sacamos $v' = u$; de la (3) $x = u$; de la (2) sale $w$:

$$w = y' - 3v' = y' - 3u = 3u + r' + m - 3u = r' + m.$$

Y en fin de la (1) s.

$$s = 2z - w - 2r' = 2(3u + r' + ' + 2m) - (r' + m) -$$
$$- 2r' = 6u + 2r' + 4m - r' - m - 2r' = 6u - r' + 3m.$$

Escritas por orden son:

$$x = u, \quad y = 2y', \quad y' = 3u + r' + m, \quad z = 3u + r' + 2m$$
$$u = u, \quad v = 3v', \quad v' = u, \quad w = r' + m, \quad r = 2r'$$
$$s = 6u - r' + 3m, \quad t = 3u + r' + m.$$

Si se substituyen estos valores en las ecuaciones del sistema E, equivalente al propuesto, se observa que verifican á todas ellas, prueba de que no se ha cometido error de cálculo. Expresamos ahora la condición de que aquellos sean positivos y enteros.

$x$, $y$, $u$ $r$ y $v$ lo serán siempre que lo sean $u$, $r'$ y $v'$, y para que estos y los restantes lo sean, debemos tener las desigualdades del margen.

$y' > 0$, implica que $3u + r' + m > 0$

$$m > -3u - r' \qquad (a)$$

$z > 0$, implica que $3u + r' + 2m > 0$

$$2m > -3u - r' \qquad m > -\frac{1}{2}(3u + r') \qquad (b)$$

$w > 0$, implica que $r' + m > 0$

$$m > -r' \qquad (c)$$

$s > 0$, implica que $6u - r' + 3m > 0$

$$3m > -6u + r'' \qquad m > -\frac{1}{3}(6u - r') \qquad (d)$$

$t > 0$, implica que $y' > 0$.

Se advierte por las *inecuaciones* (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), que, á valores enteros y positivos de las variables, corresponden para $m$ valores negativos, si nuestro objeto es aminorar los coeficientes. Si pudieramos determinar límites relativos para los valores de $u$ y $r'$, sería fácil resolver el

sistema. Á tal fin debemos combinar las inecuaciones $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$, de modo que comparemos *dos*, de los diferentes modos que fuera posible. Como de dos cantidades negativas la menor es la de mayor valor absoluto, la relación que ligue á $(a)$ con $(b)$ debe formularse así:

$$-3u - r' < -\frac{1}{2}(3u + r') \qquad \text{ó} \qquad 3u + r' > \frac{1}{2}(3u + r')$$

ó bien

$$2(3u + r') > 3u + r'$$

la que simplificada da

$$3u + r' > 0 \qquad (a), (b)$$

Comparando $(a, c)$ sacamos

$$-3u - r' < -r'; \quad 3u + r' > r'; \quad 3u > 0 \qquad (a, c)$$

Comparando $(a, d)$ sacamos

$$-3u - r' < -\frac{1}{3}(6u - r'); \qquad 3u - r' > \frac{1}{3}(6u - r')$$

$$3(3u - r') > 6u - r'; \quad 9u - 3r' > 6u - r'; \quad 9u - 6u > 3r' - r'$$

y en fin

$$3u > 2r' \qquad (a, d)$$

Como ese resultado indica que la desigualdad puede satisfacerse dando á $u$ y $r'$ un mismo valor entero y positivo, es legítimo, al comparar $(b)$ con $(c)$, escribir la relación

$$-\frac{1}{2}(3u + r') < -r' \qquad \text{ó} \ \frac{1}{2}(3u + r') > r'$$

$$3u + r' > 2r', \quad 3u > 2r' - r', \quad 3u > r'$$

ó

$$r' < 3u \qquad (b, c)$$

Comparando $(b)$ con $(d)$ escribimos en igual supuesto

$$-\frac{1}{2}(3u + r') < -\frac{1}{3}(6u - r')$$

ó

$$\frac{1}{2}(3u + r') > \frac{1}{3}(6u - r'); \qquad 9u + 3r' > 12u - 2r';$$

$$12u - 9u < 3r + 2r'; \qquad 3u < 5r' \qquad (b, d)$$

Por último, comparando (*c*) con (*d*) sale:

$$- r' > - \frac{1}{3}(6u - r'); \qquad r' < \frac{1}{3}(6u - r'); \qquad 3r' < 6u - r'$$

$$4r' < 6u; \qquad 2r' < 3u \qquad \text{ó} \qquad 3u > 2r' \qquad (c, d)$$

Los resultados (*a*, *b*), (*a*, *c*) no tienen importancia; del segundo podríamos deducir que $u$ debe ser positivo, lo que ya suponíamos. El tercer resultado (*a*, *d*) $3u > 2r'$, indica que si tomamos $u$ como variable independiente $r' < \frac{3}{2}u$, de modo que si á $u$ le atribuímos el valor 2, $r'$ resulta ser menor que 3, y por tanto podrá ser 1 ó 2. El resultado (*b*, *c*) en la hipótesis de $u = 2$, dice que $r'$ es menor que 6, pero como acabamos de ver que debe ser menor que 3, nos atendríamos á este último límite.

De (*b*, *d*) sale que $r' > \frac{3}{5}u$, de modo que si $u = 2$, $r' > \frac{3 \cdot 2}{5}$, $r' > \frac{6}{5}$, los que nos indica que debemos desestimar el valor 1 sacado del tercer resultado (*a*,*d*). La relación (*c*, *d*) es idéntica á la (*a*, *d*). Como para $m$ las desigualdades (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) no dan más que límites inferiores no podemos limitarlo sino por la condición de que las funciones resultan positivas; que lo serán, si á $m$ le damos cualquier valor positivo, sin excluir el cero. Más, pueden ser las funciones positivas con un valor negativo de $m$ si este lo elegimos convenientemente. Para ello, vamos á introducir en (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) los valores de $u$ y $r$ que han resultado de nuestro análisis en la hipótesis de $u = 2$.

$$m > - 3u - r' \qquad (a)$$

se convierte en

$$m > - 3 \cdot 2 - 2, \qquad m > - 8$$

$$m > - \frac{1}{2}(3u + r') \qquad (b)$$

se convierte en

$$m > - \frac{1}{2}(3 \cdot 2 + 2), \qquad m > - 4$$

$$m > - r' \qquad (c)$$

se convierte en

$$m > - 2$$

$$m > -\frac{1}{3}(6u - r') \qquad (d)$$

se convierte en

$$m > -\frac{1}{3}(6 . 2 - 2); \qquad m > -\frac{10}{3}; \qquad m > -\left(3 + \frac{1}{3}\right) = -3.$$

Vemos, pues, que á $m$ debemos asignarle un valor $> -2$, es decir, hacer $m = -1$. Así los valores de las funciones serán:

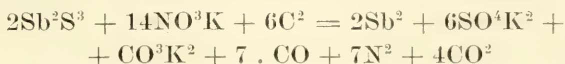
$$x = u = 2, \quad y' = 3 . 2 + 2 - 1 = 7, \quad y = 2y' = 14,$$

$$z = 3 . 2 + 2 - 2 = 6, \quad u = 2, \quad v' = 2, \quad v = 3 . 2 = 6.$$

$$w = 2 - 1 = 1, \quad r' = 2, \quad r = 2r' = 4,$$

$$s = 6 . 2 - 2 - 3 . 1 = 7, \quad t = 3 . 2 + 2 - 1 = 7.$$

Luego un modo de formular la reacción es:



$$2Sb^2S^3 + 14NO^3K + 6C^2 = 2Sb^2 + 6SO^4K^2 +$$
$$+ CO^3K^2 + 7 . CO + 7N^2 + 4CO^2$$

que aunque legítimo, no es el de Pollacci, teniendo no obstante varios coeficientes iguales á la de este autor, como se advierte comparando con la fórmula que precede á (I). Si queremos obtener la de Pollacci haremos

$$u = 2, \quad r' = 4 \quad \text{y} \quad m = -2$$

lo que dará

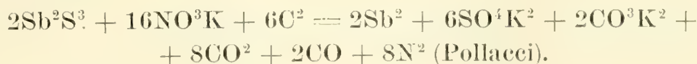
$$x = u = 2, \quad y' = 3 . 2 + 4 - 2 = 8, \quad y = 2y' = 16;$$

$$z = 3 . 2 + 4 - 2 . 2 = 6, \quad u = 2, \quad v' = u = 2, \quad v = 3 . 2 = 6$$

$$w = 4 - 2 = 2, \quad r' = 4, \quad r = 2r' = 8,$$

$$s = 6 . 2 - 4 - 3 . 2 = 2, \quad t = 3 . 2 + 4 - 2 = 8$$

y así resulta:



$$2Sb^2S^3 + 16NO^3K + 6C^2 = 2Sb^2 + 6SO^4K^2 + 2CO^3K^2 +$$
$$+ 8CO^2 + 2CO + 8N^2 \text{ (Pollacci).}$$

Véase, pues, la posibilidad de formular una reacción química de muchas maneras. En la hipótesis de ser $u = 2$, debiendo satisfacer $r'$ á las condiciones $r' < \frac{3}{2}u$ y $r' > \frac{3}{5}u$ ó para el caso $r' < \frac{3 . 2}{2}$, $r' < 3$.

$r' > \frac{3 \cdot 2}{5}$, $r' > \frac{6}{5}$, $r'$ no puede asumir más que el valor 2; pero si suponemos $u = 4$, $r'$ podría ser $r' > \frac{3 \cdot 4}{5}$, $r' < \frac{3}{2} \cdot 4$, es decir, $r' = 3$, 4, 5, y es claro que cuanto mayor supongamos á $u$, tanto más valores convenientes podemos hallar para $r'$. Por otra parte, á causa de la relación $m > - r'$, crece también el campo de las variaciones de $m$. Además, si asignamos á esta indeterminada un valor muy próximo á su límite, podemos aminorar y hasta hacer desaparecer el coeficiente relativo á ese valor límite de $m$. Por ejemplo, si en la hipótesis de $u = 2$, en que $m > - r'$ se convierte en $m > - 2$, asignamos á $m$ el valor $- 2$, la variable de que se dedujo aquel valor límite, es decir, $w = r' + m$, (en que $r'$ por ser $u = 2$, da $r' = 2$), se convierte en $w = 2 - 2 = 0$, sin que ninguna de las otras funciones se anule.

Este pudiera aplicarse á fomentar la producción de aquellos *residuos* que pudieran tener usos industriales ó mayor valor comercial. Así, en nuestro ejemplo, pudieramos aumentar la producción de $w$ (el carbonato) á expensas de $v$ (el sulfato) si así conviniera. ¡ Nuevo y curioso resultado del análisis matemático aplicado á la química !

Existen investigaciones que originan problemas más difíciles que los que hemos tratado, pero no son frecuentes. Acaso volvamos sobre ellos en otra oportunidad, si no hemos aburrido con éstos al paciente lector.

Buenos Aires, octubre de 1914.

ANGEL PÉREZ.

# EXPEDICIÓN AL IBERÁ

*(Continuación)*

---

El día que el arado dé el verde fresco que allí falta, esa región, guardando su aspecto de parque, intensificándolo, será una de las más bellas del mundo y muy característica.

Á veces los *Oxalis martiam* florecen de tal modo, que parecen rojizas alfombras.

La influencia de la humedad es tan grande que los individuos costaneros tienen un aspecto más fresco, más verde, más folioso que los del interior. En el Chaco, saliendo de la vecindad de los esteros para internarse en el Chaco santiagueño, reseco, esa influencia de la humedad y de la sequía inversas se hacen todavía más manifiestas. En el segundo Chaco ciertas plantas (*Bulnesia* sp.) son completamente espinosas, habiendo desaparecido los folíolos, cuyo raquis se ha convertido en aculeo, mientras que en las cercanías del estero, donde la humedad es fuerte, los folíolos se conservan, por lo menos en las hojas jóvenes. Hay allí un interesante punto de biología transformista. Lo mismo se observa, aunque con menos vigor, en las bandas del río Corrientes.

En una *Caesalpinea Gilliessi* (?), las vainas de 20 centímetros de largo encierran hasta 120 semillas completamente parasitadas. La larva que los roe era sin duda una larva de brúquido.

La *Acacia bonaerensis* (Gill.), espinillo Santa Fe, ñapindá, que existe en gran cantidad también, está profusamente parasitada por un brúquido. Notamos que de casi todas las plantas salían unos grisáceos, barcinos, como es el *Brucchus fisorum*, y otros iguales, pero chocolates, negros, de diferentes pintas. ¿Especies diferentes ó modificaciones de una misma? En esas plantas, Cesalpíneas y acacias, casi no hay una vaina que no esté atacada. Ese parasitismo incrementándose puede

acabar rápidamente con una especie dada. El problema se plantea para las especies que se propagan por semilla y no por cuerpos agámicos y queda planteado en Corrientes para esas especies. Es un momento de equilibrio determinado, uno de esos bellos casos de estudio para las oficinas de zoología aplicada, supremos consejeros de la higiene económica de la agricultura. Además, si el *Brucchus* en cuestión fuera el *B. forum,* el peligro de la invasión posible de los forestales está suspendido sobre la huerta y para la ciencia pura cabe resolver si son autóctonos ó importados. Una serie de fotografías, tomadas de un punto fijo durante el tiempo en que la luz se esparce sobre la tierra, y luego otras cuando las sombras se van lentamente descorriendo, mostraría al respecto ilustradas evidencias. Casi no hay una hoja que no sea mutante, siendo positiva ó negativa esa mutación. En las hojas compuestas, en las que los folíolos tienen su psicología propia, autónoma en cierto modo, las resultantes de las posiciones del conjunto de la hoja son más manifiestas y sorprendentes. Se comprende, pues, que sean las Leguminosas y las Berberidáceas las que sirvan entre nosotros de clarísimos ejemplos ciertos. Las *Berberis* del interior son á ese respecto verdaderos dedos que se cierran ó abren como las manos. Mil veces, en Corrientes ó en el Chaco, cuando una luminiscencia selenita ó estelar se difundía entre las ramas, hemos observado ese fenómeno de la reconcentración foliar, que resta mucho del papel de interceptor de radiaciones caloríferas que tienen las plantas durante el período nocturno. Proyectadas en el espejo del cielo lunar hay plantas frondosas de día que parecen deshojadas de noche.

Esos Brúquidos nos dan un elemento de estudio para la teoría de los tropismos. Reaccionan al tropismo *tierra sensu lotu*, que es también el tropismo de la dehiscencia.

Mientras esos tropismos no se producen, quedarán al estado estático encerrados en su semilla de acacia ó de cesalpínea.

Las hormigas que aprovechan las fístulas de varios árboles para hacer morada en ellas son numerosas en Corrientes. Más tarde veremos un hecho notable realizado por hormigas en las regiones del Iberá, cuando las inundaciones convierten esas regiones en vastos esteros.

La hormiga, que es trabajadora incansable, sabe sin embargo buscar la línea de menor resistencia.

En Barranca Colorada, un tala caído, una de cuyas ramas hacía un arco de 5 metros, servíales para facilitar el camino, muy dificultoso entre los pastos. Sin embargo, el camino entre los pastos corría abajo abandonado.

Los homópteros abundan. De noche, bajo la luz del mortecino farol de *La Blanca* juntábanse en gran número y variedades.

El solano leproso es un verdadero vivero de ellos. Una especie sobre todo, de medio centímetro de largo, mitrada, de alas transparentes, saltador brillante cuando se le opone resistencia de tope. Esa reacción, de frente, es exclusiva á toda otra en ciertos homópteros. Otro capítulo para los tropismos.

De esos Homópteros, los más curiosos, los membracidos, nos plantean uno de los problemas biológicos más formidables. Lo mismo que las exóstosis, que los cuernos, que las placas exodérmicas, ninguna ley hasta ahora emitida da explicación suficiente, revelando las esencias y los procesos de formación.

Las series que se derivan unas de otras por el diente y por el miembro, que parten de las ausencias de esos órganos para verlos nacer, acrecentarse, complicarse no alcanzan aquí. Esas *aberraciones de forma* tan comunes en los grupos marinos á ciclos variados, cobran en los artrópodos inexplicable relieve. Quizás, en muchos casos, como en los membrácidos haya que ver incomparables soluciones con que la naturaleza resuelve los problemas de la vida de las especies como esas resoluciones complicadísimas que Fabre ha demostrado para las cuestiones de la eclosión del imago.

Ciertamente Chavarría es geológicamente punto interesante. La meseta de areniscas de Mercedes está allí, á pico, limitada por esteros que ha dejado el río Corrientes en su divagación hacia el oeste, en la actualidad cubiertos por estepas, carrizales y tacurúes en número considerable. La barranca, al este, del lado del desvío Tataré, la forman esas areniscas sobre las que se extiende la vegetación arbórea común, en los bosques del Payubre y del Burucuyate.

El río ha dejado vasta cancha inundable donde han sido menester importantes obras de arte para el establecimiento del Ferrocarril central correntino que liga la ciudad de Corrientes, es decir, la salida al Paraná y Paraguay á Concordia, sobre el Uruguay.

Al oeste, en todo lo que se conoce con el nombre de Chavarría, el suelo y subsuelo es de arena cuarzosa, que se prolonga como en médanos fijados por escasa y recia vegetación de gramíneas del lado de San Roque. La impermeabilidad ó saturación del subsuelo deja lagunas y esteros, mezclados, después de San Diego, con palmares de yatai que se prolongan hasta Goya. La presencia de esos palmares de yatai es tan característica y resalta tanto, comparada á la predominancia de los caranday *(Copernicia cerífera* Mart.) al este y norte, en la meseta de

Mercedes, que podría hacerse una fundada subdivisión fitogeográfica.

Respecto á su posición económicogeográfica, el pueblito de Chavarría está llamado á real porvenir. Al alcance de río navegable, deberá ligar á Concepción con los ferrocarriles generales. Su suelo le permite ser proveedor agrícola abundante, lo que no es el caso de Mercedes, y de casi todos los pueblos sobre el ferrocarril de la meseta que están sobre la arenisca desnuda ó ligeramente recubierta. Cuando los largos albardones, que llaman rincones, penínsulas en medio de esteros, y estos mismos estén cultivados como pueden serlo esas regiones provistas de un derroche de agua ; cuando se hayan instalado colonias poseedoras de la tierra subdividida sabiamente y valorizada con vías de transporte, esa parte ha de ser riquísima zona subtropical con Chavarría como salida ferrocarrilera y fluvial. Es la verdad del futuro, quizás muy lejano.

Después de dos ó tres días de lluvia, cuando el río Corrientes tenía un repunte, que la inundación aumentaba, sobre todo cuando acontecía ese fenómeno después de prolongada seca, la correntada traía una fauna de inundación variadísima y abundantísima : ofidios, batracios, insectos, arácnidos, etc. Era interesantísimo ver llegar precediendo la onda una serpiente cuyo onduloso nadar se precedía por parabólica curva.

Pero la extrañeza del naturalista, en esas migraciones por arrastre de la corriente, son los *enjambrazones* de formícidos que se dejan llevar por las aguas en ovillos, en los que la mayor parte de los insectos, apoyándose en los sumergidos, consiguen permanecer en seco. Si consiguen hacer soporte en alguna mata emergida, *ipso facto* emprenden una curiosa obra de resistencia. Á veces sobre una simple paja se están días y días esperando el descenso de las aguas, siendo en tales circunstancias presa de infinidad de naturales enemigos.

Lo que más nos llamaba la atención era la enorme cantidad de curculiónidos, ó gorgojos, ó trompudos, ó calandras. Ninguno de brillantes colores, ninguno de gran tamaño. Todos medianos ó pequeños, algunos ínfimos, pero en número de millones y de formas variadísimas.

Esos curculiónidos evidentemente no son lo más arborícolos. La correntada los ha arrastrado de súbito y esa ola grande del río Corrientes inundado no sumerge sino los desplayados de carrizales, de estepas, de juncos. El salirse de hoya no alcanza las barrancas boscosas ; son, pues, esos coleópteros habitantes de la llanura inundable, donde se esparcen y difunden en semejante número merced á los largos años sin crecidas de importancia.

El trabajo de sus larvas ha de pasarse de mucho en la vida subterránea del rizoma, del estolón, del bulbo, porque quemándose como se queman todos los años esos campos, para semejante número de imágenes es menester enorme número de progenitores amparados de las causas letales. En Chavarría, en las fajas emergidas, podían recogerse á puñados.

En Punta Lara, cerca de La Plata, donde llega la corriente del Paraná, se hallan formícidos del Paraguay, del Uruguay, hasta de Europa, como en islas naturales, aisladas y circunscritas. La inundación, el acarreo del agua son las causas evidentes de esa diseminación. Los de Europa habían venido en buques. En Chavarría estábamos en presencia de un verdadero éxodo faunístico causado por las inundaciones.

Las grandes avenidas con sus camalotes propagan muchas especies que prosperan ó no en su nueva área. Inventariando suficientemente la fauna norte del río Corrientes y la sur podría tenerse un importante dato sobre la supervivencia ó no y la diseminación ó no de tales ó cuales especies. Por otra parte, para los simples clasificadores, para los coleccionistas, los estáticos de la ciencia, esas inundaciones son provechosas para reunir en poquísimos instantes y facilísimamente un sinnúmero de ejemplares.

Los ensayos de pesca, repetidos muchas veces, no dieron más que bogas, pacús, patís, surubíes, palometas, dorados, mojarras. La palometa parece excluir á su alrededor todo otro pez. Anda en cardúmenes. Es voracísima y acomete contra todo lo que cae ó llega al agua. Sus mordeduras son muy dolorosas. Sus mandíbulas son de acerados dientes, anchos, cortantes como navajas; terribles instrumentos de combate y de destrucción.

La palometa *(Pygocentrus piraya)* es una de las especies comunes á la cuenca del Amazonas y del Paraná y que argumentan en favor de la unión de esas dos redes en épocas anteriores.

En una excursión que hicimos en canoa hacia la costa este, al bajar los peones, se lanzaron cuchillo en mano en un charco, dando gritos descomunales. Se trataba de una raya *(Symterigia?)*, que odian los aborígenes por las dolorosas heridas perforantes que les ocasiona al vadear los ríos. De un hábil golpe de cuchillo troncháronle la cola, y luego, sin darnos tiempo para impedirlo, la tajearon y partieron en todo sentido, con grandes manifestaciones de júbilo. Al volver de esa excursión, Rufer, que habíase alejado un trecho á pescar, nos presentó dos espléndidos dorados *(Solminus* sp.) y unas cuantas mojarras *(Tetragonopterus?)*

En otra ocasión aferró un manguruyú (*Pseudopimelodes punzon* Humb.), excelente provisión culinaria.

La impresión general, en todo ese mes pasado en el río Corrientes, en la región de Chavarría, fué que las aguas eran bastante pobres en peces. Pero, como la crecida era muy grande y extendida y en agua sobraba el alimento por esa causa, los aparejos y redes se tendían en vano casi siempre. En cuanto á manifestaciones biológicas que nos pudieran traer alguna luz sobre ese punto, debemos manifestar que no constatamos ninguna.

Pero la naturaleza del río Corrientes y de las lagunas y ríos del interior del Iberá, que lo son de aguas clarísimas, permite esperar mucho de la piscicultura en esas regiones, siempre que el hombre rompa los equilibrios, hoy establecidos por la naturaleza, en beneficio de especies útiles. Las truchas prosperarían admirablemente en el Corrientes. De los enemigos peores que pudieran tener, la abominable palometa estaría en primera línea. Esta especie es, con mucho, la que más abunda en ese río y, por lo que hemos constatado, la casi exclusiva de las lagunas del Iberá, con algunas mojarras.

Es oportuno recalcar aquí, para la dispersión de las especies, que en las inundaciones de los esteros las aguas se prolongan del Corrientes al Miriñay, es decir, al Uruguay. Ulteriores y sistemáticos estudios efectuados en el Corrientes y en el Miriñay, ó en el Paraná y en el Uruguay, podrían dar especies que se hallarían, al parecer, aisladas en uno de éstos, siendo la enunciada unión de las aguas por los esteros del Iberá la vía de pasaje de una cuenca á la otra.

Las aguas del Paraná son turbias merced á sus suspensiones del norte y sobre todo á la que les da el loess santafecino. Las del Corrientes por el contrario, pasando entre barrancas de areniscas ó sobre bancos cuarzosos, son clarísimas, transparentes. Esa diferencia es notable biológicamente. Hace á las del Corrientes menos valiosas como fecundizantes por carencia de limo, dándole, por otra parte, una peculiaridad digna de consideraciones científicas.

En el mes de mayo, que lo pasamos por entero en Chavarría, pudimos notar la influencia de las lluvias en las crecientes del río Corrientes. Á los dos días de haber empezado á llover abundantemente iniciábase la crecida que duraba alrededor de una semana, según la importancia del agua caída. Estábamos en uno de los puntos de los vertederos naturales de las aguas precipitadas en los esteros, que lo son el Miriñay y el Corrientes, y podíamos apreciar, si no precisamente medir, las influencias de aquéllas. Entonces se hacía clara la hi-

pótesis de que los esteros del Iberá eran actualmente el resultado de una vasta región ahondada de naturaleza especial, impermeable ó saturada, que precipitaciones repentinas y abundantes colmaban de súbito. Llana en demasía, limitada por la continuación de esas barrancas del Burucuyatí que se elevaban como verdadera meseta y según las geografías por ondulaciones que cercaban la parte este de los esteros, ya en Chavarría aparecía verdadera la hipótesis comúnmente en discusión por todas partes : el estero es de cota superior al Paraná en Ituzaingó. Si había, pues, comunicación entre los esteros y un río ó dos, el Paraná y el Uruguay, como por un sifón singular y monstruoso no se veía dónde y cómo podría *s'amorcer* precisamente por efecto de lluvias caídas en la región del Iberá. Si ese sifón existía, debía tener un régimen muy pequeño por cierto. Así la cuestión de las causas formatorias de los esteros daba en nuestra inteligencia un gran paso. Luego que nos internáramos, veríamos de comprobar, en la medida de lo posible, si su suelo era impermeable, y una nivelación resolvería parciales problemas más tarde, cuando otras expediciones complementarias circunscribieran la tarea á determinados tópicos.

En Chavarría y contornos, prolongado arenal, la flora es pobre. Algún bosquecillo de espinillos de copa semiesférica da característica al paisaje. En los cañadones, helechos y oenoteráceas con poligonum. Del otro lado del río, más allá de los carrizales de tacurues, las barrancas boscosas que cobran un color azul violáceo, larga franja espesada.

En la inundación, fijadas á un banco de arena, poligonum y bromus forman un lente esmeralda, vivo, brillante. Es el principio de un embalsado. Cuando venga un repunte del río será una verde almodia deslizándose sobre el hilo del agua. Á lo lejos, el Zeiss divisaba una raya sinuosa, iridescente, fija, que se perdía hacia el norte, entre boscosa penumbra.

## LOS PRIMEROS NAUTAS DEL ESTERO

El señor Vicente Guevara, estanciero y comerciante en Chavarría, nos refirió varias veces lo que sigue á continuación. Bajo su dictado tomamos notas que hemos conservado.

Se ha creído y hasta se ha escrito que habíamos sido los primeros *en remontar* el río Corrientes. Sin entrar á detallar el servicio de

simples balandras, que se hace *ocasionalmente* entre la costa de Concepción é Itatí Rincón y entre este punto y el curso del Corrientes, Chavarría, Santa Rosa, Esquina, navegación rara, intermitente, inestable, conviene decir lo que bajo toda veracidad nos refirió el señor Guevara, siquiera sea para dejar establecida la historia del río Corrientes y de los esteros y por deber gratísimo de justicia.

Luis Guevara llegó al país, á Corrientes, el año 1884, viniendo de apartado pueblo vizcaino. Arrendó, en la costa de los esteros, al sur los campos conocidos por de Mármol y de Trin. En aquel entonces el río Corrientes sólo era conocido hasta la estancia de Thomas, á pocos kilómetros al norte de lo que es hoy Chavarría. En una balandra construída por él entró tres veces al estero para traer maderas (?). Fueron aquellos tremendos esfuerzos, con los peones sublevados que se creían perdidos, cercados por todas partes por los embalsados, exhautos y famélicos. Como á Colón, la promesa del éxito terceno salvó la intentona y la vida de todos, alcanzando la laguna de Itatí Rincón y luego la estancia de Thomas por el río Corrientes.

El señor Guevara dice que « abrieron el estero ». Abrir el estero, á nuestro juicio y experiencia, querrá decir romper y echar luego el embalsado para expeditar paso.

Demostrada la posibilidad del paso, el señor Luis Guevara hizo venir á su coterráneo Tomás Esnaldia, con quien tomando una concesión de chatas que para la navegación del Corrientes poseían los señores Ramos y García, se dispusieron á explotar la región, entonces rica en caza de lobos, tigres, nutrias, carpinchos y garzas. El trabajo de abrir canales (entiéndase desembalsar) fué largo, penosísimo. Luego, asociados con el catalán Juan Bauzá, y con la peonada adiestrada por Guevara, empezaron á abrir canales hasta Itatí Rincón por un lado, la laguna Trin y Medina y el riacho Carambola que da á Concepción. Realizábase así la navegación intermitente de Concepción á Itatí Rincón. Ya se navegaba con dos vaporcitos, *El Triunfo* y el *Vertiz*, de un señor Rufino Pastor.

¿ Qué maderas traían de los esteros ? Lo único que tengan explotable las isletas son tacuarales, uno que otro lapacho, talas y sangregrado. Á nuestro juicio, debieron explotar los montes de Itatí y de los rincones sur del estero, la vía acuática, siéndoles preferida por la dificultad de la travesía entre los montes espesos, por la presencia de bandidos alzados de revoluciones en la región montaraz y por otras causas fáciles de imaginar. Sin duda, relatos imprecisos como ese no han desbaratado la leyenda de los *inmensos bosques de lapa-*

*chos,* con que todavía se adornan los libros ó las clases elementales.

El señor Guevara se ha hecho eco de los « ruidos fuertes que se oían de á seis leguas, tras los que iba creciendo el estero. » Las crecientes son periódicas, de nueve á diez años. La mayor fué la del 89.

Sea lo que fuere y resulte lo que resultare de un estudio más detenido que el nuestro, forzosamente superficial, queda indicado un punto interesante y de investigación.

En esa barranca diseminados y á veces en hileras horizontales había algunos moluscos bibalvos del grupo de los de un gonce.

Mientras Uhart y Esteves luchaban con los teodolitos y con la nebulosidad y el viento para fijar trigonométricamente el pararrayo de Guevara en Chavarría y la bandera puesta en el tramo del puente del ferrocarril, sacamos algunas fotografías y estudiamos la naturaleza circundante.

Por todas partes, en el llano y bajo el parque de espinillos, de talas en la ribera, de alguna mirtácea las fuertes estepas. Jamás el arado fecundó allí la tierra con el oxígeno. Algunas cactáceas del grupo de los cercus, alzaban sus hermosos candelabros á la altura de las copas hemisféricas. En el suelo la misma flora de amarantáceas, alguno que otro ojo azul de commelia en los sitios húmedos. En los chañares enjambrecitos de avispas de abdomen franjado de amarillo. En el aire esos magníficos planeadores que la ciencia llama Cathartes, uno que otro Lorus volando en bisel y rompiendo el augusto silencio del sol el leñoso martilleo de los Dendrocaloptidos.

He aquí una lista de plantas observadas : Espinillo, Lapacho amarillo, Timbó, Quebracho, Niñorupá, Ñangapirú, Urupitá, Isipo, Tala.

En cuanto á las aves colectamos ú observamos : Cigüeñas, Caraos, Federales, Teru-terus, Tordos, Caranchos, Alcones, Lechuzas, Urubús, Cardenales, Calandrias, Viuditas, Chajaes.

Vimos pasar en dirección al norte el último vuelo rosado de las *Spatula platalea.*

Conviene repetir una vez más la pobreza, en aquel entonces, de la fauna aviar. Decididamente la enormidad de los tiros que llevábamos había de pesarnos y molestarnos. Por más alerta que tuviéramos la vista á uno y otro lado del horizonte, por más aguzado que estuviese el oído en el insomnio de la noche, pocas aves se divisaban, raleadas ó apareadas de acaso, y pocas veces silbaba el aire ese silbido tangente que anuncia el pasaje de un vuelo de palmípedos.

No hay, pues, ó para ser más exacto, no hubo en aquel año esos esteros que eran á manera de enormes é innumerables viveros, de

donde se alzaban al pronto sinnúmero de aves como los enjambrazones de las colmenas.

Digámoslo de una vez : nuestra exploración encontró una gran pobreza zoológica. No recomendamos contar con la caza á quienquiera que intente penetrar en el Iberá.

Quedamos en Caá-Guazú el 31 de mayo y medio día del 1° de junio. Colocada que fué una blanca y colorada bandera, punto de mira para la triangulación que se proponía hacer Uhart y Esteves, partimos después de proveernos, como en todas las paradas, de leña seca que abundaba, preciosa leña de algarrobo, de ñandubay, de espinillo.

En Itatí Rincón quedamos doce días, y la permanencia allí fué muy instructiva. Habremos de detenernos por lo tanto en detalles sobre ese punto. Allí se origina geográficamente el río Corrientes. Allí concluye el arco de resistencia al avance del estero, arco que empieza en el Rincón del Socorro. Allí es la parte más meridional del Iberá y una de las estaciones indicadas para estudiar sistemáticamente muchos problemas científicos del Iberá, si las cosas se hicieran con programa y método definido y con un suficiente número de colaboradores especializados en una rama determinada de la ciencia, ayudados por ayudantes y con otros menesteres.

El *puerto* de Itatí Rincón está en la parte oeste de lo que llamaré la peninsulita de Itatí, limitada al lado oeste por la laguna de Itatí Rincón, al norte por los esteros, al este por una barranca terrosa llamada del Aguará-ruguay, de unos diez metros de potencia y que está indicada para futuras investigaciones.

Al sur, los primeros meandros del río Corrientes.

Es una peninsulita de areniscas duras, asperones rojizos ó rosáceos, con fallas rellenadas por conglomerados arenáceos de cuarcitas rodados, geodas, ágatas, etc. Una ligera laminación de los bancos daríale un ángulo sedimentario apenas sensible, como si un levantamiento insignificante se hubiese producido en el mismo centro de la peninsulita, de unas dos leguas de diámetro.

En el centro la arenisca se diría metamorfoseada y se parece bastante á un pórfiro de grano finísimo, mientras que en contacto con la laguna, en el *puerto* mismo de Itatí Rincón se lamina y altera volviéndose friable, á tal punto, que traídas esas muestras á Buenos Aires y sometidas al examen de un geólogo, éste se pronunció por dos *formaciones diferentes*, la segunda, la de las *hojas alteradas*, posterior á la primera, la de los bloques homogéneos y duros.

Nosotros podemos afirmar categóricamente que no hay en el nivel

de la laguna, en Itatí Rincón, más que una sola formación de areniscas compactas, alteradas por la acción limnosa allí donde se ponen en contacto con el agua y de ninguna manera dos *formaciones diferentes.*

Por otra parte, esas areniscas son de la misma naturaleza que las de Mercedes y las que continúan sumergiéndose en los esteros. Puede, pues, considerarse las areniscas de Mercedes como una meseta de resistencia, cuyos límites son al norte los esteros del Iberá. Geológicamente esa disposición tiene una gran importancia, como la tiene geográficamente é hidrológicamente. De su levantamiento ó hundimiento en el tiempo pende uno de los puntos de apoyo del problema geológico del Iberá.

Á unos 1500 metros del *puerto* hay una isla de más ó menos 50 metros de diámetro que llaman isla de Itatí, habitada por gentes de vida mísera, que viven de la caza y de la pesca. En esa isla debimos construir un alto mangrullo para tratar de ligar otro punto topográficamente y eso ocasionó frecuentes viajes pudiendo estudiarla.

Bajo una capa de tierra humífera de unos 50 centímetros de potencia viene un banco de conchillas de 30 centímetros que se extiende en el subsuelo de toda la isla. Ese banco, de una monocondilada, estaba entonces (junio de 1910) sobre el máximo nivel de las aguas inundadas. Entonces de dos cosas una : ó ha habido un levantamiento gradual ó repentino que ha dado por resultado la elevación del banco, es decir, del fondo de lo que sería pequeño *plateau* subfluvial ó sublacustre ; ó las aguas han tenido antes una extensión ordinaria mucho mayor que la actual. El aspecto de la barranca del Aguará-ruguay inclinaría á esta segunda hipótesis, tanto como los terrenos inundables del río Corrientes, hasta el monte sobre la barranca que hacia el sur se extiende.

Si ha habido un levantamiento en Itatí Rincón, ese levantamiento se ha generalizado hacia el norte.

Si se ha generalizado, ¿ hasta dónde y cómo ?

Si fué un basculamiento, ¿ dónde está el eje ?

Si ese levantamiento continúa y se extiende — y aquí se impone la metodización de los estudios precisos — es claro que tiende á robustecer el norte correntino contra un posible avance del alto Paraná, por Ituzaingó, aun cuando ese mismo fenómeno tendería á desagotar los esteros por ese punto creando un canal de vertedero al Alto Paraná.

Se imponen sondajes en la región de Concepción que aclaren la

naturaleza del subsuelo y en la margen este del Iberá. Recién entonces, encerrando el problema en un círculo, se podría afianzar una deducción ampliamente justificada. En el estado actual de nuestros conocimientos geológicos é hipsométricos, sólo cabe acumular los datos sin dar más importancia á las deducciones parciales que la que puedan tener para mover á la investigación.

La geología de Itatí Rincón da la razón de ser de su botánica. En efecto, allí acaba la gran selva mediterránea que empieza en Entre Ríos y que se conoce comúnmente con el nombre de la selva de Montiel. Allí acaba por el lado oeste, prolongándose á lo largo del estero hasta la naciente del Miriñay, ó laguna de Iberá propiamente dicha, pero raleada y, en partes, con lunares uniespecíficos de espinillos y ñandubay.

En Itatí Rincón la selva es espesa, en partes impenetrable. Vista desde la costa del *puerto,* aparece como una sombría barranca, una banda negruzca que sigue, violácea, hacia el sur para juntarse con la barranca antigua del río Corrientes, hoy barranca de campos playos inundables, cubiertos de estepas, de carrizos, de tacurues, entre los que pasa el canal del río. Es la formación arbórea que llamamos de la meseta mercedeña, caracterizada principalmente al sur y oeste por las Leguminosas *(Prosopis, Caesalpinea, Desmanthus, Acacia, Bauhinia, Erythrina, Psoralea, Machaerium)* (raros) dominadas todas por el gigante obscuro, el bello timbó *(Enterolabium timbouva* Mart.), mientras que al norte, en el Rincón del Socorro, la flora tiene mucho de paraguaya, con dominancia de Mirtáceas, de Lauráceas, de Ficáceas y de Euforbiáceas *(Feijoa, Psidium, Eugenia, Ocotea, Nectandra).*

Eso es lo que á vuelo de pájaro se revela al viajero, que está muy lejos de ser un especialista.

Para éste el estudio detenido de lá región norte de la meseta mercedeña sería de mucho interés y esa conclusión fué la convicción que trajéramos de la exploración. Su lento y prolijo estudio botánico, ligado al de la flora misionera y paraguaya, es uno de los tópicos de un futuro estudio del Iberá, organizado maduramente y con el número suficiente de hombres de ciencia. Dados los antecedentes que detallamos al principio y la naturaleza y circunstancias apremiantes diversas de nuestra misión ; dados los escasos elementos, la ninguna colaboración, la falta de lugar para conservar colecciones, la sujeción al principal objetivo, que era internarse *previamente* á más profundos estudios ; se apreciará que este capítulo, salvo Itatí Rincón, no tenga la amplitud que se desearía encontrar en él. Merece una monografía y

sin duda el punto ha de tentar á futuros naturalistas que vayan allí mejor preparados y mejor ayudados y mejor provistos de los pertrechos varios que se requieren.

Llamónos la atención en Itatí Rincón el aspecto de los ñandubaes (*P. algarrobilla* Gr.). Hubiérase dicho árboles seniles roídos por una lenta causa en vías de consumirlos. No se trataba de la obra humana que los explota y los acaba por su lado, rápidamente, sino de una enfermedad (?).

Fuera de las tierras de la meseta mercedeña resecas, ondeantes campos escuálidos, donde el arado se despunta en la arenisca impermeable, están los de las formaciones arenosas permeables y húmedas de las orillas del Corrientes, de la costa de los esteros y del ángulo nordeste de la provincia. Allí ha de iniciarse el resurgimiento económico de Corrientes.

Nuestras intentonas para cazar venados fracasaron siempre. Jamás logramos ni siquiera avistar uno de esos bellos animales, contento de D'Orbigny en su penetración nordeste del estero del Iberá. Una vez, sin embargo, en una huella húmeda vimos el rastro bisulco.

Salvo impresiones digitales de tigres y de otros felinos menores, de carpinchos, nutrias y lobos, no hemos notado testimonios de otros mamíferos. Debe haberlos no obstante. La espesura del monte y su variedad botánica, lo despoblado de la región, la presencia del río y de los esteros y, más que todo, lo que se conoce sobre fauna correntina, son argumentos que podrán servir á otros investigadores.

Bajo un «canelón» (*Oreodophus ?*) encontróse una víbora que Mantilla llamó *muasso*. Tenía 60 centímetros de largo por tres de circunferencia. Era verde negruzca.

Salvo el éxodo producido por el primer repunte del crecimiento del Corrientes, en Chavarría, un grupo de Lachesis en la misma costa de la laguna Iberá y un *curyú* que se desplomó de un árbol en una islita del estero, la exploración, no vió otros ofidios. En verdad no es el invierno la estación más propicia para el ofidiólogo.

Con la sola vida del agua muchos naturalistas, clasificadores y biólogos, tendrían asaz ocupación y preocupación. El limnólogo, allí estaría en un vasto laboratorio. El botánico podría elegir entre dedicarse á la flora acuática pura ó á la anfibia. Y, ante todo, estudiaría en cada especie el fenómeno de la irrupción repentina del agua que crea un medio nuevo. Estudiaría la fitobiología en función de esos coeficientes.

La claridad de las aguas azuladas no nos dió ningún *plankton*. El

cedazo trabajó á menudo y el resultado de los frascos traídos á Buenos Aires fué tan sólo una *Synedra*, hallada por el profesor Augusto Scala. En mejores condiciones los resultados han de ser más abundantes.

Sería preferible la investigación de las lagunas y riachos en tiempos normales ó de bajantes. La ola de la inundación tiene grandes inconvenientes para ese orden de investigaciones.

El color fuertemente azulado de las aguas se debe á la cantidad grandísima de materias vegetales en descomposición, principalmente en los embalsados y á la naturaleza del fondo de arenisca. Hemos notado siempre que cuando este fondo era evidente, el colorido del azul era más intenso.

En cinco días una superficie de unos cien metros cuadrados, se llenó totalmente de catay *(Polygonum)*.

En las aguas sumergíanse hasta el fondo un metro y elevábanse otro sobre el nivel. Eso da idea del *avance* rápido del embalsado y de la detención que tal intrincada red ofrece al avance de la corriente. Contra esa malladique de catay atracan camalotes *(Pontederas, Eichornias)*; entre sus vacíos crecen las ninfáceas y si están muy á la costa los *Solanum angustifolium* y *S. glaucum*. Así se forma un *barrage* que se va extendiendo hasta obstruir completamente la vista del agua, mientras que la correntada pasa debajo.

Ese crecimiento tan rápido constituye un serio peligro. Abierto el embalsado — en general á machete — ciérrase detrás trabándose de nuevo. La fatiga y la exhaución traen el abatimiento. Si se concluyen las provisiones el explorador está perdido. Ese catay es el cancerbero del Iberá, esa es la *cadenita de oro* de la leyenda.

Extrañábanos mucho no encontrar ninguna *Ceratophyllum*. Su ausencia se explica: requiere fondos lodosos y bajos. El arroyo Azul se vuelve fusco en el verano debido á su abundancia. allí donde la poca profundidad (de $0^{m}50$ á 1 metro) se ha rellenado de barro. El Iberá es demasiado claro.

En cambio abundan las Hydrochoridaceas, las Lenmaneas, las Azollas, las Pinguicula sp., los Patamogeton.

Hemos notado también una plantita acuática que en todo se parecía á una *Pistra*, según los dibujos de los tratados de botánica. Los Hidrocharis tapan completamente las caletitas de agua mansa. Una infinidad de caracoles vive entre ellas.

En las ninfáceas se encuentra abudantemente la *Cabomba caroliniana* Assa Gray, cuya determinación la debemos á nuestro maes-

tro el doctor Cristóbal Hicken. Sus hojas sumergidas, se vuelven filicoideas, como si la *pelta* hubiera eliminado sus tejidos para reducirse á las nervaduras. Sólo hemos visto *Cabomba caroliniana* con hojas de forma filicoide.

En cuanto á la *Victoria crujiana* (?) de que dijimos anteriormente, no la hemos encontrado más allá de Santa Rosa, á mediados del río Corrientes. Ni en la Laguna de Itatí-Rincón, ni en las de Trin, Medina é Iberá jamás la hemos visto. Eso, naturalmente, no quiere decir que no exista allí.

En Itatí-Rincón sorprendiónos ver en casi todos los « uña de gato » ó *Tembetaru* una doble tela blanca que los recubría totalmente á manera de manchón ó doble membrana, desde el suelo hasta las primeras gruesas ramas, situadas á unos dos metros de altura. Nunca vimos dentro arañas y sí muchos homópteros pequeños, como de dos milímetros, totalmente verdes ó verde y amarillo.

¿ Á qué respondía esa enorme doble tela ? La naturaleza tiene excesos ó fenómenos que, en nuestra ignorancia parcial nos parecen tales. Esas preservaciones enormes en que parece haberse agotado la oferosidad del insecto, destinada á preservarlo del *azar* exterior, no siempre alcanza su objeto, si es que tiene un objeto. Poniéndose á estudiar la naturaleza en la naturaleza misma al lado de las admirables coordinaciones hacia un punto determinado, obsérvanse los excesos sin meta, las desarmonías. Se diría que los tejidos, los órganos, por una especie de hipertrofia funcional se independizaran de modo singular de la coordinación general que forma la vida de la especie. El órgano iría creando la función, iría aumentándola, exaltándola hasta un momento en que esa exaltación, absorbiendo el funcionamiento general diera en muerte con este. La *creación* de las especies ó transformación de la vida sería, pues, un simple fenómeno de naturaleza bioquímica. La fuerza variante estaría en el organismo. Esta verdad aparece extraordinariamente fecunda invitando á la experimentación.

La tela de ese arácnido ó de esas larvas nos traería otros sumandos, fisiológico éste, á adicionarse con las curiosas y no explicadas formaciones *aberrantes* que tanto sorprenden y suspenden en la paleontología. Preguntas que á cada paso impresionan y respuestas hipotéticas que, ni bien formuladas, ya se vienen como á incitar la edificación de una teoría con todo un museo de materiales. ¡ Cautivadores estudios dignos de toda una vida !

En cuanto á las ulterioridades de esa *turba* no las hemos podido establecer.

Nosotros atravesábamos riachos efectivos y perennes, especies de cuchilladas en el estero, pero también terrenos en seco en ordinarias épocas según afirmaciones de Mantilla, como lo probaba su poca hondura entonces. ¿Qué es, pues, de esa turbera hecha en toda esa extensión luego que por varios años el estero queda en seco? ¿Forma una tierra vegetal, un humus de gran valor ganadero? ¿O bien, cuando acaecen esos voraces y propagados incendios del estero que se prolongan á lo *inalcanzable* dentro del misterio de Iberá, esos incendios que arrasan en llama el estepal y el junco reseco y que arden la tierra por leguas y leguas gracias al rizoma, subterránea brasa, conviértense en ígneos materiales, desapareciendo? Vense, pues, las comprobaciones y los complementos que traerían por tierra en tiempos opuestos á los de nuestra exploración que lo eran de crecientes é inundaciones, otras expediciones al Iberá.

Ya que hablamos de *tierras cocidas* por incendios, traeremos este dato: en varios albardones que alcanzamos, entre Itatí-Rincón y laguna Medina había *regiones* que mostraban el subsuelo cocido como un terroso ladrillo de ceniciento y negruzco color. Ameghino estudió esas *formaciones* — son verdaderas formaciones por su extensión y las consecuencias que acarrean geológica y botánicamente — en la Pampasia y le dedicó uno de sus últimos volúmenes. Los continuadores de esos estudios tienen en los esteros una cosecha fecunda. Esta memoria, que es tan sólo de iniciación á las cuestiones complejas que levanta el Iberá, no puede extenderse más sobre ese tópico.

Problema interesante: relación entre la evaporación normal en condiciones determinadas de una masa de agua dada de estero inundado y la misma completamente cubierta de *Polygonum* ó embalsado. Consecuencias.

Fauna: chajaes, teros; aislados *Pytangus sulfuraceus* mirando al al agua en cómica actitud de pescadores novatos y tímidos. Grito infernal de *pollonas* invisibles.

Nos alcanza la noche temprano en una laguna de poco fondo, de imprecisada superficie, que Mantilla llama laguna Yacaré. Está toda rodeada de altas Morantaceas *(Thalia?)* que levantan el escapo floral reseco á cinco metros y más, mientras las anchas hojas enhiestas giran sobre su pedúnculo susurrando como palmeras.

Al día siguiente, al levantar la lona que nos cubría, la claridad naciente nos mostró el más curioso espectáculo que pueda cautivar los ojos de un naturalista. De la lancha á los juncos y por éstos hasta donde abarcara la vista, gruesos cables de seda amarillenta se ten-

dían por doquier y andaban por ellos enjambres de arañas negras, con abdomen superior adornado de rojo. Aquí y allí suspendíanse en racimos, como las abejas, acumulaciones del tamaño de un puño y en telas trabadas de cables tendidos; á la manera de los Epeiridos, el rocío perlaba las formas como singular encaje. Pudimos coger esas arañas á manos llenas y llenar los frascos de alcohol.

Azara habla de una araña sociable del Paraguay *(Efeira socialis)* negruzca, del grueso de un garbanzo que es el de la observada en la laguna Yacaré. Dice que los individuos viven en sociedades de más de cien de ellos, que fabrican en común un nido más grande que un sombrero, el que suspenden á la cima de algún árbol de modo que quede protegido por arriba; de ahí salen en todas direcciones un gran número de hilos gruesos y blancos de más de 50 pies de largo.

Nosotros no hemos observado nido alguno y todos los individuos que hemos recogido fueron hembras. Los pelotones ó enjambres suspendidos aquí y allí eran al parecer de reconcentración y de ellos salían arañas á arreglar un cable grueso — que llamaremos *tensor* — ó á tejer una red de caja entre cable y cable ó entre cable y junco como las Efeiras comunes, telas orbiculares de radios y polígonos. Es una asociación y un trabajo semejante al del *Uloborus republicanus* E. Simón.

De día esa enorme puntilla puesta al juncal al borde del agua está concentrada y tranquila. Sólo algún individuo recoge algún tensor, como un diminuto é invertido equilibrista negro. La masa está *ovillada*. Pero al caer la tarde se dispersan al trabajo, como las hormigas. Tienen como éstas, al parecer, una dirección general, una misión que responde á la asociación, *al espíritu de la masa*. Hemos seguido una con el anteojo, irse como á una cuadra y al fin entretenerse en detenida faena de aferre y regresar luego al enjambre donde se perdió entre las compañeras.

Por desgracia las circunstancias no nos permitieron efectuar experiencias con ellas, cosa que hubiera contribuído á alumbrar ese capítulo de biología aracnóloga.

Ese día, 8 de junio, entramos á un riacho, ensanchado canal bastante recto y regular de unos 40 metros de borde á borde que Mantilla llamó arroyo Yacaré.

Puestos en marcha á las 8, á las 9 un rescaldamiento del cluster nos obliga á pararnos, ya casi al término del riacho. Seguimos á botador, alcanzamos presto un albardón y se sirga un trecho. Del tope del arroyo bajo un *albardón,* dicen todos, sale el arroyo mismo con

gran correntada y no se puede ir adelante por la vegetación sobre la que se puede caminar fácilmente.

Se trabajó toda esa tarde á pala haciendo canal entre la raíz de espadaña y junco y Thalia (?). Cayó la noche al fondo de ese riacho *Yacaré*. El cansancio impidió reanudar el trabajo hasta entrado el día siguiente. Mantilla aseguraba que estábamos cerca de la laguna Trin, pero se creía extraviado.

Unas horas de esfuerzo más y se abrió la justa brecha para que pasara *La Blanca*, rozando los bordes y surcando el fondo. Los peones, metidos en el agua hasta la cintura, la empujaban; al fin pasamos. La *Yarará* y la *Curyu* siguieron fácilmente. Estábamos en la laguna Trin que se nos abría vasta y con oleaje de mar.

Su contorno está limitado por la typha, el junco, la morantácea. Á la derecha, al este, se ve una mancha violeta de árboles, perdiéndose en el horizonte. El anteojo nos permite distinguir alguna palmera, levantándose sobre el monte cuya especificación botánica nos es imposible determinar. Por la forma de algunas altas copas diríase Timbós (*Enterolabium Timbouwa*).

He ahí, pues, un extraño manantial, un extraño sifón que viene del Paraná ó del Uruguay y que sólo funciona cuando ha llovido sobre los esteros. ¡No! el agua del Iberá, es agua del Iberá y no la alimenta ninguno de los ríos.

Que en tiempos normales su caudal sea reducido, limitándose á las lagunas principales y á los riachos hondos, el agua contenida se explica por la naturaleza topográfica y geológica: *fondo de plato* é *impermeabilidad*. Los esteros y pantanos se explican de por sí dándose cuenta del suelo; arenas cuarzosas en el fondo, y arriba una formación medio de turbera, muy blanda.

Ese hecho afirmado por Dupont y por Mantilla de que había años en los que el estero y las lagunas estaban en seco, confirmado por la presencia de tacurúes en gran número en el fondo de parajes sobre los que navegábamos fácilmente, se acuerda mal con la presencia de un sifonaje suficiente.

La altimetría, por lo que respecta á Ituzaingó, es terminante. Allí el estero está á cota mayor ± 10 metros sobre el Paraná.

Si se tiene en cuenta la gran sinuosidad de los canales ó riachos, se ve que su enderezamiento habría de evacuar más rápidamente la avenida de aguas. Dragados complementarios en el río Corrientes y sobre todo en el Miriñay, permitirían aprovechar zonas de humíferas tierras. Pero éstas son ya conclusiones y habrán de venir después.

Castañeda nos piloteó hasta la laguna Medina, á la que llegamos en la mañana del 19, después de unas dos horas de marcha. El ancho y sinuoso canal ó riacho que los une estaba como cortado en un precipicio de Thalias, tan espesas y altas eran éstas. Más allá de las anchas hojas que cubrían *La Blanca* elevábanse los escapos florales, como agudos estoques negruzcos. Las aguas eran profundas, siempre de ese azul cobalto, y del fondo íbanse levantando las vegetaciones comunes allí : *Patomogetum, Mynophilos Cabombas*. Por mucho trecho no vimos catay, más allá seguía el junco. Nos era imposible divisar nada á ningún lado, tan elevadas eran esas marantáceas y esos juncos.

Siempre que íbamos por vegetación tan espesa y elevada, la profundidad de las aguas era mucha. Ambas razones coincidían en afirmar que entonces íbamos por riachos perennes. Esa observación es buena tenerla en cuenta en el estero para buscar aguas profundas. Hay muchas probabilidades de hallarlas donde más alto y tupido esté el junco y donde se levanten esas marantáceas de negruzcas varas ya sin frutos.

Entramos á la laguna Medina como á un encrespado mar. La ondulosidad de la marejada se exalta en volutas y recae sobre el seno del agua con blancos flecos de espuma.

Razón tenían, pues, esos pobladores de Itatí-Rincón cuando hablando del estero decían, todo ungidos de temeroso respeto, *la costa del mar*. Para la débil canoa del cazador una agitación semejante del agua equivale á las sudestadas mayores en el río de la Plata.

Extraña sensación fisicomental : navegar á toda máquina por un amplio *mar* en medio de una provincia interior.

He aquí lo que dicen las notas meteorológicas de ese día 19 de junio :

Estado higrométrico del aire: á las 10 de la mañana, 82; á mediodía, 72; á las 8 de la noche, 82.

Temperatura: máxima, 28° centígrados; mínima, 12°.

Cielo completamente nebuloso.

Fuerte viento del este que ha continuado toda la noche.

Tiempo tormentoso. Ha caído de noche un chaparrón.

Volvamos un poco atrás para esquematizar los accidentes geográficos principales de nuestro recorrido. Todo coincidió perfectamente con los datos que nos diera el piloto Mantilla en Esquina, si no es un reventón de piedra que él decía existir en la orilla izquierda (oeste) de la laguna Trin y que no hemos podido comprobar. La presencia de

asperón rojo en el *cerro* Ibicuy abona pro la tesis de un bajío de asperón, sobre el que descansara esa parte del Iberá.

La cartografía del Iberá es singularmente confusa é imprecisa. Pero para futuros trabajos el mapa de Corrientes, por el señor Zacarías Sánchez, es una base imprescindible y clásica, y ese mapa fué el que llevamos en la exploración, agregándole las notas que lo completan. Él nos ha sido utilísimo como comparación. De paso surge esta escolástica pregunta: ¿cómo no se lo ha adoptado en los textos? Al lado de las fantasías cartográficas usuales, su precisión inicial encarrilaría posteriores complementos.

El mapa de la Dirección general de correos y telégrafos de 1904, ejecutado bajo la dirección del señor Miguel García Fernández, trae un rosario de lagunas iberanas que se acercan mucho á la realidad, en su parte sur y céntrica, á pesar de la pésima topografía limnográfica. Así, por ejemplo, la laguna de Itatí extiéndese demasiado al norte, abarcando un área casi igual á las de Trin, Medina y otra que será la de Concepción.

En ningún mapa figura el ancho arroyo que sale de la laguna Medina al nordoeste, hacia Concepción, que Mantilla y Castañeda llamaban arroyo Loreto, con ese nombre, mientras el Carambola debe ligar á la laguna Medina con la gran laguna de Fernández. La claridad de estos ligamentos hidrográficos requiere una expedición especial, á fin de establecerlos, y ha de hacerse en épocas normales á canoa.

Cuando la inundación acaece, todo el estero, de Ituzaingó á los albardones, de los rincones oeste y sur hasta Itatí, es una enorme masa de agua, llena de embalsados y de juncos y talias y espadañas que, á merced de una desviación momentánea, crecerán formando barrera á la vista de arroyos y riachos efectivos.

Sólo una organización muy madurada, metódicamente organizada, con muchos elementos topográficos y muchos especialistas, trabajando aislados y al mismo tiempo bajo una dirección general podrán, en el curso de algunos años, darnos un mapa suficiente para encerrar bien el problema topográfico y discutirlo luego.

Mantilla nos explicó que estábamos en un puesto, llamado Rojas, donde un estanciero tenía hacienda, y al siguiente día, cuando se agitaba el cendal de la niebla, pudimos ver algunas vacas overasde empaque bravío.

Perforaciones á pala dan dos metros de hondura de tierra negrísima, humífera, arenosa, de la que se extrajeron huesos de yacarés, de chajá, una mandíbula inferior de carpincho y gres ó arenisca redon-

deados. Un resto de rancho y hasta un lirio blanco (*Iris florentina* L.) dicen que eso era lugar poblado.

En el agua la flora antibia del Cypero y del Yunco y la acuática. Como en ninguna otra parte las alimáceas embellecen el agua y el aire.

La *Sagittaria montevidensis* con sus verticilos en escalera, de tres blanquísimos sépalos rayados de rojo sobre canario en su centro. Los Echinodorus de elípticas hojas y de largas varas, coronadas en los nudos de embelas de blanquísimas flores, con un botón carpelar verde en el centro. Las lemnáceas, con predominio de la Azolla, nadando su mancha de orín y esos curiosos diminutos repollos de la *Pistia occidentalis ?* Bl., unidos los unos á los otros por un ligamento ocráceo. La *Eichornia azurea* Kth. de espiguillas vinosas y la *Pontederea cordata* Mart., más abundante, más esbelta y alta con sus varas de tupidas flores azules. Las *Cabombas* de flores de oro, los *Hydrocleis.*

Bajo un cielo gris y de ópalo la vista refluye sobre la belleza del agua para detenerse en ella. Estas figuraciones policromas de las flores, reflejándose con raros matices y brillanteces en el azul del charcal, parecen abigarrar la escasa luz y alegrarla á un tiempo con diversos y geométricos colores.

Dos días se permaneció en aquel puesto Rojas. Retengamos de él la internación que alcanza en el estero la inmediata vecindad del arroyo Plumero que lo costea. Es, pues, un punto estratégico para el estudio del Iberá. Un punto *céntrico* para exploraciones en tiempos de secas, donde se puede construir un mangrullo de observación topográfica, ligado á puntos fijos. Por lo que atañe á la botánica y á la zoología su situación es inmejorable. En su derredor es donde hemos visto más abundancia de flora y de fauna. El Plumero, profundo, permite una internación hacia el norte y luego, por la laguna Medina, hacia el arroyo Loreto y la costa oeste del estero, del lado del pueblo de Concepción.

Si *debido á la falta de lluvias* la región central no fuese abordable por agua por el río Corrientes, quedaría ese puesto Rojas dominando el Plumero al norte y al sur la laguna Fernández. Podría establecerse allí, previendo otras exploraciones más metodizadas y completas, un puesto sobre pilotaje, con mangrullo de observación y elementos simples destinados á ayudar un poco el aprovisionamiento en víveres y medicamentos á los exploradores. Además — y punto capital — colocar allí un puesto de *mareografía* y una cota de nivelación. Naturalmente sólo un ideal científico llevaría allí á un observa-

dor preparado. Hoy por hoy esa ave rara no existe probablemente en la Argentina. Pero para resolver problemas económicos de ingeniería su establecimiento puede ser necesario.

En ese albardón de Rojas hay profusión de helechos. Encontraremos felicineas más tarde, en casi todo el estero, sobre albardones, sobre embalsados *asentados,* en las isletas. Confesamos que nunca les dedicamos atención preferente, pensando especializarnos en ellas al regreso. Sólo buscábamos una importante *Ceratopteris,* el *C. thalictroides* Dph. que, según Basaldúa, halló subacuático bajo Ituzaingó. Á pedido del doctor Federico Kurtz, de Córdoba, y por los dibujos que dicho sabio nos remitiera, en la suposición suya de que la felicinea en cuestión fuese el *C. thalictroides,* buscámoslo como nos fué posible, sin hallarlo. Pero es oportuno decir cómo podíamos buscar. Recuérdese que íbamos de continuo en un mar de inundados entre tan espeso juncal, que las más de las veces nada se podía divisar al contorno. Nos quedaba, pues, el recurso de recorrer de continuo, durante días y días, el junco próximo al alcance de la mano, cansando la vista en esa especie de prolongadísimo acecho. Veíamos *Asmunda Pteros, Adiantum, Polypodium,* pero nunca semejante *Ceratopteris.* En cuanto á la vegetación que se alzaba del fondo arenoso para suspenderse en las azules aguas, flora rica en *Myriophillum* y *Patomogeton,* raro sería haber percibido el *Ceratopteris* y más distinguirlos si no existe abundantemente, y si de conjunto no se veían las basales hojas parecidas á las de un rábano, y las fértiles, interiores, recortadas finamente.

Ese helecho por sí solo constituye un grupo especial: las *Parkeriaceas.*

Discutióse largamente, ese brumoso y llovizmoso día 21 de junio, sobre el empleo de cabrestantes, de botadores y de motones, pues de los reconocimientos que se hicieron en canoa, resaltaba que las balandras podrían seguir, pero *La Blanca* para hacerlo, dada la poca profundidad del inundado, que se extendía al este y al norte, habría de requerir medios especiales de lento avance y de gran esfuerzo.

El cabrestante, con la larga cuerda ó un grueso alambre que se anudan ó enlazan en una isleta lejana, en un hincado botador, ó en una mata de junco tiene grandes inconvenientes y el principal es que su tracción recta rara vez se acuerda con el ancho de la vía, con su tortuosidad.

La sirga era de todo punto inconveniente. Hubiera debido efectuarse avanzando los sirgadores, metidos en el agua, expuestos al

pozo repentino y al ataque terrible de la palometa *(Pygocentrus* sp.), que por todas partes anda en cardúmenes. Además el pobre alimento, la necesidad de preservar la moral de los peones y no someterlos de lleno á una agobiante labor, nos hicieron adoptar el único medio, el clásico : el botador. *La Blanca,* con los dos tablones de pulgada y media, corriendo á lo largo de la borda, había sido de ese modo preparada para la extraña *navegación* que ahora iba á empezar.

Alcanzamos una isla ; la primera que pudimos visitar. Está rodeada al exterior de cortadera en flor *(Gynerum),* lo que le hace una brillante corona vellorí. Un ombú, un tala, y grandes tacuaras luego. Es una isla de unos treinta metros de diámetro. Como en todas las demás, en su linde ampularias rotas, huesos de chajá, de carpincho, de nutria *(Ryopotamus)* y de lobo *(Lutra).* En alguna que otra rama y bajo de ella, en el suelo, la degurgitación plumosa y peluda de aves de rapiña que no vemos.

Seguimos. Á las tres, descanso. De arriba de la cabina de *La Blanca* se ve, hacia el sur, una recia línea violácea como de barranca y por el contorno un archipiélago de montes obscuros. Alguno que otro, sin embargo, de un color de carne rubia que resalta de estupenda manera sobre el verde claro del juncal y sobre lo sombrío de los demás montes. Ese agradable y sorprendente color es producido por las hojas de una Euforbiacea, el *Crotton succirubrus* Pdi., que llaman allí « sangregrado » (posiblemente corrupción fonética de « sangre de drago »), árbol al que atribuye el vulgo propiedades y virtudes, conforme al libro de Monardes *(Delle cose che vengono portate dall' Indie occidentali,* traducción italiana) y de la más antigua leyenda recogida por Macer Floridus *(De viribus herbarum),* según A. de Gubernatis.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

En alguna isla se alza, al sur y al este, alguna palmera del tipo del yatay.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Día 24. La tormenta se va sin dejarnos agua. Andamos ahora (9 a. m.) en una gran espesura de pajas. No hay junco alguno. Aquí y allí tacurúes bajo el agua. No puede haber, pues, duda alguna respecto á que seguimos un camino de acceso merced á la inundación, camino que conduciéndonos de lagunas á riachos demuestra ser el estero en rosario ó lagunal de lagunas y canales. Y se deduce que, para estudiarlo en su totalidad, si no hubo grandes lluvias, el empleo de balandras y hasta de canoas no puede ser sino parcial y debe ser centrípeto, es decir, por Itatí-Rincón, por Puerto Rojas, por Paso Claro

por Ituzaingó y por Concepción hacia la región central del estero.

Al sur la línea obscura de barranca y monte se intensifica más y el panorama, ahora que está más despejado el contorno, muéstrase con una esporulación de isletas azuladas, vellorí, rosadas, violetas, verdes de un negruzco verde de laurácea.

Sigue el viento del este. Según Mantilla, mañana debemos llegar á un arroyo libre. Mientras tanto, algunos peones tuvieron que meterse al agua para empujar las embarcaciones. Mantilla no se puede mover casi por su infarto inguinal y Chamorro está muy anémico y débil.

Algún garabato escuálido y agalloso. Es la primera leguminosa que vemos desde Itatí-Rincón.

La marcha es penosísima. Todos estamos exhaustos.

Y entonces recordamos que más atrás también hemos visto juncos así manchados. Hay, pues, allí, en esa acción, temporaria por todo examen de la hormiga, *una adaptación* destinada á preservar la especie, *in situ*, del azar de las inundaciones. Si bien es cierto que ciertos formícidos pueden vivir mucho tiempo en contacto del agua y aun sumergidos (experiencias de M. Fielde con los *Stenamma fulvum*, y *Camponatus pennsylvanicus* que vivieron ocho días bajo el agua) en las condiciones generales de la inundación de los esteros la permanencia de la sociedad formícida requiere una tan sorprendente adaptación al medio. El Himenóptero es habilísimo y abundantísimo en recursos y ese caso de los juncos de los esteros del Iberá inundados harto lo prueba.

El 25 de junio á las 3 de la tarde, después de haber *cortado* una espesura de una curiosa planta que crece en matorral en *el borde de las aguas profundas* y cuyo dibujo damos por no haber podido identificarla, llegamos á un ancho arroyo ó canal que corre en dirección sur. Mantilla dice que va hacia la laguna Fernández. Su anchura, unos cien metros; sus aguas, azules. En su borde izquierdo levántanse *Thalias* de una altura como no hemos visto más, cuyas escapos florales, resecos y negros, sirven de posadero á algún *Amblyrhamphus haloserice͏us*, que pía tristemente, solitario, y á los cables tensores de las colonias de arañas sociales ya descritas.

Según Mantilla, ese arroyo se llama Carayá. Corre de noroeste á sudeste. Es bien escajonado y las *Thalias* y las *Typhas* lo delimitan. En cuanto á su flora, es la ya señalada en el puesto Rojas al fin del Plumero y su fauna también la misma.

Dejamos el Carayá que sigue hacia el norte y tomamos un arroyito

de dirección oeste, parando en una isla de unos 100 metros de largo por unos 50 de ancho, que se llama isla Carayá. Un lapacho caído y grandes tacuaras, y luego ombúes gigantes y un grueso espinillo todo corroído por el tiempo, donde han anidado cantidad de Piróforos.

En la isla hay un resto de campamento reciente y en la muelle y húmeda tierra negra pisadas frescas de tigre. Eso despertará el instinto cinegético de Rufer, que se irá á dormir á la isla, con el Winchester y la linterna de acetileno para *linternear* á los tigres.

Mientras se cortan ramas y tacuaras para colocar una bandera topográfica blanca y roja sobre los árboles más altos, recorremos la isleta para caminar un poco, que harta necesidad tenemos todos, y para efectuar observaciones.

Describir esta isla Carayá es poco más ó menos describirlas todas, tanto como se pueda generalizar, por las pocas que hayamos visitado.

Isla ó albardón, levántanse como negro domo redondo á un metro sobre el nivel del inundado. Ipomeas y convólvulos trenzan unas guirnaldas, donde se abren grandes flores blancas infundibuliformes, entre las ramas de algún ura-puta, de alguna gigante Bambusa, de un aislado lapacho. En el centro, bajo la sombra del ombú las malváceas arborescentes y una que otra *Gomphrena* y, en el linde, algún *Crotton*, algún *Gynerum*. Á veces las convolvuláceas forman espeso cortinado mirando al estero.

Abriendo grandes y profundos hoyos bajo la tierra negra se encuentra siempre una capa vitrosa, una *calotte* sólida de unos pocos milímetros ; luego, hasta una profundidad que no se ha agotado, otra vez tierra negra, arenosa, con impresiones de raíces en marcha á la fosilización.

Esa *calotte* vitriforme es singular y su constante existencia atrae como un problema interesante.

Diríase que una lenta filtración de agua ha ido precipitando, á hondura fija, sales calcáreas que luego se han concrecionado. Y se piensa en esa capa de tosca impermeable que cubre bajo unas pocas pulgadas el subsuelo de la provincia de Buenos Aires y cuya influencia hidrológica y agronómica es tan merecedora de estudio.

De la excavación que efectuamos resultó una media mandíbula inferior derecha de *homo*, unas tibias y huesos desordenados de carpincho, de lobo *(Lutra)*, de cigüeña y de chajá. Hicimos una colección de moluscos. De ella resultó un Bulimulus nuevo, que el doctor E. L. Holmberg nos hizo el honor de dedicar.

En esas islas ó isletas se desearía perforar el subsuelo hasta alcanzar elementos geológicos que trajeran luz para la discusión general de esos problemas. Recomendamos, pues, á otros exploradores el munirse de alguna de ellas, livianas. Es un punto que consideramos esencial.

El 26 se sigue rumbo al este por un encharcado de un metro más ó menos de profundidad, por entre una vegetación de juncos, de alismáceas de *Polygonum,* de *Colombas,* de *Pontedyriáceas* que en nada se diferencia á la anteriores.

Ninguna novedad botánica, zoológica ó geológica, á no ser en isletas desparramadas algún naranjillo *(Xanthosylon)* ó algún lapacho *(Tobebuina Avellanedae)* y la presencia repentina de un volido de tordos *(Molothrus)* un gran revoloteo de golondrinas y de patos *(Mareca).*

Á la tarde, tenemos la sorpresa de oir un tiro que parece de escopeta.

Al siguiente día (27 de junio), después de una marcha á botador relativamente fácil, hemos caído, á la tarde, en el arroyo Ombú, débil canal que remata en la laguna Ombú, pequeño lagunón, al fondo del que paramos. Rufer mata dos caimanes chicos *(Caiman sclerops)* y otros zambullen y desaparecen. Esta cacería es interesante porque revela la presencia de esos yacarés. Para nosotros fué una sorpresa por no haber visto ninguno después de la laguna Medina.

En la laguna Ombú las mismas palometas *(Pygocentrus)* y las mismas mojarras.

En su derredor se nota muy bien y se puede perfectamente estudiar ese fenómeno de los embalsados sucesivos, asentados los unos sobre los otros, que van á formar una verdadera turbera.

Dejando la laguna Ombú entramos por otro inundado ó encharcado como los anteriores. Vamos en dirección norte y luego giramos al sudeste.

La única novedad es la abundante presencia de una planta inidentificada que crece en verdaderos matorrales y siempre al borde de parte honda.

Seguimos con más agua, una profundidad de un metro más ó menos, que nos permite avanzar á botador cómodamente.

En el aire y sobre los juncos y *sarandíes (Euforbiacea,* non *Salis)* de rojiza corteza los *Amblyrhamphus.*

En el agua, cantidad de orugas negras, peludas. Un volido de pequeños microlepidópteros grisáceos nos causa agradable sorpresa. En partes hondas, el catay es abundantísimo y forma manchas esmeralda de un vivísimo colorido.

Seguimos hacia una isla llamada del Sordo, á la que llegamos al siguiente día (30 de junio).

Destacamos á Mantilla para que fuera en canoa por el Iberá hasta un puerto del Rincón del Socorro, á procurarnos carne fresca. Nosotros seguimos hasta dar con un espeso embalsado muy tupido. Allí hay tres capas distintas de embalsados unas sobre otras, mezclados de finísimas arenas de cuarzo que hacen un cemento al vegetal comprimido. Es un caso típico de un embalsado *asentado* sobre el que se puede caminar perfectamente, corriendo, sin embargo, debajo una verdadera avalancha de agua.

Esos enormes embalsados vienen á ser á manera de diques flotantes que disminuyen el *débit* de los vertederos naturales. Ciegan completamente los pequeños riachos y las poco profundas lagunas y la formación de seudoturbera que levanta el fondo de la laguna reteniendo gran cantidad de esa arena cuarzosa, al parecer eólica, que tanto se extiende por Corrientes, precisamente en los bordes de los esteros del Iberá y luego de Concepción á San Diego.

Todo el día 2 de julio lo empleamos en el trabajo de abrir un canal para dar en el *mar libre* del Iberá. Después de un minucioso reconocimiento á canoa y visto que sólo faltaban unos 100 metros para poder bogar libremente en un divertículo del Iberá, se emprendió el trabajo con un brío y un contento indecible. Solís había vuelto á sus alegres ocurrencias y la risa animaba la faena. Con los azadones y con las palas íbanse cortando grandes rebanadas de embalsado, que se suspendían luego, para dejarles escurrir el agua, en lo alto de las azadas, y se colocaban en el borde, á modo de parapeto.

Empezada la obra á la mañana del 2, continuó hasta el 4. El 3, al caer la noche, pudieron pasar la *Yarará* y la *Curyu* á agua libre.

Para la *Blanca,* debido al calado de ésta (85 centímetros) fué necesario seguir ahondando el canal.

Se trabajó empeñosamente sin más incidente que el hallazgo en el fondo de una hilera de postes hincados en el embalsado y en el suelo arenoso, postes que podían intepretarse como una obra antigua hecha allí á modo de dique, especie de pilotaje inconcluído.

Otra novedad fué la salida de un grupo de yararas *(Lachesis lanceolatus)*. Esas serpientes estaban refugiadas en la espesura del asentado embalsado como en estado de invernación. Esta hipótesis explicaría la rareza herpetológica constatada por la exploración.

## LA LAGUNA IBERÁ

Quien quiera estudiar detenidamente la laguna Iberá, en sí sola ó en relación con el río Miriñay, al que da origen, fácil le será abordarla por el Rincón del Socorro y Paso Claro, desde la ciudad de Mercedes. Esa vía de acceso es la más indicada para la gran mayoría de los habitantes de la nación.

Al entrar en el Iberá, en la mañana del 4 de julio de 1910, por su fondo nordoeste, con viento del sudeste, ni bien hubimos dejado un archipiélago de embalsados y espadañas *(Typha),* se presentó la laguna como un mar, con oleaje y glauco. Personalmente estábamos medio mareados, como en el estuario del Plata cuando pica la sudestada.

Íbamos en dirección sudoeste y al rato largo empezamos á percibir delante un grupo de palmeras que salía del horizonte, regulares y en hilera como en una avenida.

La sorpresa primera del Iberá fué sus aguas sucias y grisáceas. Habíamos andado entre tanta agua azul que nos habíamos acostumbrado á ella y nos parecía que toda debía ser igual.

Esa agua tenía mucha ceniza en suspensión, ceniza producida por los grandes incendios de los esteros y, además, el fuerte oleaje la cargaba de arcilla coloidal, sacada en las riberas del este.

Cuando estuvimos cerca de los caranday y yatay, mostróse enfrente un bosquecillo que contorneamos. Fuimos á atracar entre unas espadañas altas.

El *chiaro mondo* se presentaba bajo el aspecto de un rancho boliche-almacén y de una simpática y servicial familia, la del señor Nemesio Romero, á quien agradecemos aquí las atenciones que usaron con nosotros.

No fué poca la sorpresa de toda esa buena gente y de algunos estancieros, que llegaron á la noticia de nuestra presencia allí, al ver las balandras y sobre todo la lancha á nafta. Nos dijeron que eso era la demostración acabada de lo que podría hacerse con un plan de conjunto, llevado progresiva y perseverantemente á la práctica por el gobierno nacional.

En los días que siguieron se estudió el descenso de las aguas en los esteros del norte y se dedujo que, si no llovía abundantemente, sería imposible continuar el recorrido de ellos con la lancha á nafta

y hasta con las balandras. Unos días se pensó en irse en simples canoas para tratar de llegar á Ituzaingó por los esteros, pero se renunció pronto á un proyecto tan arriesgado. En realidad, esas internaciones de detalle correspondían al futuro, cuando se formalizase un proyecto y habrían de hacerse con mejores elementos y sistemáticamente.

Se resolvió entonces que el ingeniero Esteves, con dos peones y un carro de bueyes, seguiría costeando el estero hasta Ituzaingó, colocando banderas topográficas y efectuando las medidas angulares y las nivelaciones hasta el nivel del Paraná en Ituzaingó.

El mayor Uhart aprovecharía el primer repunte para regresar á Chavarría por el camino seguido á la ida. En cuanto á nosotros, pareciéndonos de todo punto inútil volver á recorrer los esteros en condiciones de imposibilidad siquiera colectora, optamos por recorrer el triángulo Rincón del Socorro, Mercedes, Chavarría, para estudiar su geología que habría de darnos luces en el problema general del Iberá.

Mientras se esperan los requisitos para efectuar esos propósitos, estudiamos esa región de Paso Claro y sus alrededores.

Al norte, y costeando los esteros, se extiende una tierra gredoarcillosa que retiene gran cantidad de agua; al sur domina la arena de cuarzo hialino, que ya hemos visto cuán abundante es en la región de Chavarría á Concepción y en el fondo mismo de los esteros sur y oeste. Son campos de estipa y de carrizo, donde la agricultura está esperando ejercer una acción transformadora sin temor á la invasión de la langosta, que es lo que hoy en día amilana las empresas, según se nos decía por allá.

Sobre la estipa y entre el *tacurú* algún monte de espinillos y de *Cereus,* donde los Dendrocolóptidos (*Picolaptes angustirostris* (Vieill.)) hacen resonar las leñas entre el gárrulo cantor de los *Mimidae,* mientras los *Tyrannidae* hacen proezas de malabarismo en el aire.

Paso Claro está en un monte donde hemos hallado las especies vegetales cuya lista sigue:

Caá tigua, *Trichilia caatigua?* (Fide Parodi).

Guaviyú (Balsamero), *Myrthus guaviyu.*

Aguay-guazú, *Styrax* sp.

Mburucuyá, *Clematis* sp. (non *Passiflora).*

Aguay-mí, *Ochras* sp.

Ñangapirú-ñandipa, *Genipa americana?* Pdi.

Canelon, *Oreo daphie?*

Curupai, *Piptadenia communis* (Fide Parodi).

Guayavo (Ura-chepiró), *Blephorocolis* sp.
Coronillo, *Gurugandra amorphoides.*
Guapohu, *Urostigma ?*
Caranday, *Copernicia cerifera* Mart.
Tembetaru, *Xanthoxylon* sp.
Yatay, *Cocus Yatay* (Mart.).
Sangre grado, *Crotton succirubrus* (Pdi.).
Caraguatá, piña, cardo = *Bromelia caraguatá.*
Caraguatá, piña, cardo = *Vernonia* sp.
Cardo santo, *Argemone mexicana.*
Cardo santo, *Lythroea* sp.
Cardo santo, *Eryngium* sp.
Bocaya (Palma guazú), *Aerocomia tatai* (Mart.).
Suelta con suelta macho = *Rhipsalis* sp.
Lapacho, *Tobebuia Avellanedae.*

HIPÓLITO B. POUYSSÉGUR.

*(Continuará.)*

# LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES

## ESTUDIO QUÍMICO, BACTERIOLÓGICO, GEOLÓGICO É HIGIÉNICO

POR EL DOCTOR ATILIO A. BADO
Jefe del laboratorio químico y de ensayo de materiales de las Obras sanitarias de la Nación

*(Continuación)*

---

QUINTA ZONA

| Caracteres físicos | José M. Moreno, 830 | Senillosa s/n., al lado, 682 | Senillosa, 533 |
|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Lig. opalino | Opalino | Límpido |
| Aspecto en caliente | Tubio | Turbio | Turbio |
| Color | Amarillento | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | |
| Dureza total | 5.0 | 12.0 | 5.5 |
| — temporaria | 4.0 | 7.0 | 4.5 |
| — permanente | 1.0 | 5.0 | 1.0 |
| Residuo á 105° C | 0.61800 | 0.68700 | 0.70900 |
| Cloro | 0.02485 | 0.03550 | 0.02840 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.01700 | 0.03500 | 0.01000 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00080 | 0.00035 | 0.00120 |

SEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Espinosa, 1119 | Franklin, 1284 | Huemul, 536 | Mocoretá, 581 | Polvorín, 447 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Opalino | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Opalino |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Muy escaso | Escaso | Escaso | Escaso | Nulo |
| Aspecto del residuo | Arenoso | Arcilloso | Arenoso | Arc-Ferros. | » |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.4810 | 0.6224 | 0.6166 | 0.7504 | 0.6588 |
| — á 180° C | 0.4764 | 0.6191 | 0.6090 | 0.7402 | 0.6774 |
| — al rojo débil | 0.4610 | 0.5948 | 0.5897 | 0.7384 | 0.6103 |
| Dureza total | 12.0 | 12.0 | 16.0 | 20.0 | 20.0 |
| — temporaria | 10.0 | 8.0 | 12.0 | 17.5 | 17.0 |
| — permanente | 2.0 | 4.0 | 4.0 | 2.5 | 3.0 |
| Alcalinidad | 0.31830 | 0.33720 | 0.46970 | — | 0.25100 |
| Permanganato empleado | 0.00118 | 0.00276 | 0.00118 | 0.00118 | 0.00474 |
| Oxígeno consumido | 0.00030 | 0.00070 | 0.00030 | 0.00030 | 0.00120 |
| Cloro | 0.00710 | 0.02130 | 0.03550 | 0.02130 | 0.02840 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | 0.00995 | 0.02540 | 0.00755 | 0.00480 |
| — nítrico | 0.0 | 0.03740 | v. | 0.05000 | 0.05000 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido silícico | 0.06400 | 0.06860 | 0.05440 | 0.07400 | 0.08260 |
| — carbónico | 0.14262 | 0.15107 | 0.21107 | 0.24135 | 0.11248 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.02760 | 0.02560 | 0.04310 | 0.07800 | 0.04800 |
| — de magnesio | 0.00115 | 0.00749 | 0.02378 | 0.02246 | 0.00980 |
| — de sodio | 0.23499 | 0.29740 | 0.31727 | 0.17239 | 0.25829 |
| — de potasio | » | » | » | 0.04351 | » |
| — de aluminio | 0.00040 | 0.00338 | 0.00095 | 0.00150 | 0.00130 |
| — de hierro | 0.00660 | 0.00262 | 0.00174 | 0.00455 | 0.00430 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00075 | 0.00546 | 0.00179 | 0.00282 | 0.00244 |
| — de sodio | 0.12940 | 0.13340 | 0.10869 | 0.16958 | 0.16560 |
| Cloruro de sodio | 0.01170 | 0.03510 | 0.05850 | 0.02667 | 0.04680 |
| Nitrato de potasio | 0.0 | 0.06995 | v. | 0.09351 | 0.09351 |
| Carbonato ferroso | 0.01063 | 0.00422 | 0.00280 | 0.00718 | 0.00693 |
| Sulfato de calcio | v. | 0.01691 | 0.04318 | 0.01283 | 0.00816 |
| Bicarbonato de calcio | 0.07981 | 0.05390 | 0.07322 | 0.21022 | 0.12911 |
| — de magnesio | 0.00420 | 0.02733 | 0.08678 | 0.08197 | 0.03577 |
| Carbonato de sodio | 0.27869 | 0.30506 | 0.39511 | 0.14870 | 0.18093 |

SEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Franklin, 1996 | Mocoretá, 871 | Polvorín, 250 | Paysandú, entre 1063 y 1083 |
|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Lig. opalino | Opalino |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Nulo | Escaso | Nulo | Escaso |
| Aspecto del residuo | » | Arc. arenoso | » | Arenoso |
| *Datos químicos* | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5232 | 0.6064 | 0.5790 | 0.5418 |
| — á 180° C | 0.5204 | 0.5986 | 0.5470 | 0.5280 |
| — al rojo débil | 0.5170 | 0.5882 | 0.5326 | 0.4958 |
| Dureza total | 8.0 | 12.0 | 6.0 | 12.0 |
| — temporaria | 6.0 | 11.0 | 6.0 | 11.0 |
| — permanente | 2.0 | 1.0 | 0.0 | 1.0 |
| Alcalinidad | 0.40250 | 0.32300 | 0.36100 | 0.28440 |
| Permanganato empleado | 0.00316 | 0.00039 | 0.00039 | 0.00395 |
| Oxígeno consumido | 0.00080 | 0.00010 | 0.00010 | 0.00100 |
| Cloro | 0.01775 | 0.01065 | 0.01065 | 0.02485 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | 0.00618 | 0.00652 | 0.01991 |
| — nítrico | v. | 0.05000 | v. | 0.01250 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.03220 | 0.07360 | 0.06360 | 0.06366 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.18035 | 0.24469 | 0.16173 | 0.12745 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxido de calcio | 0.02450 | 0.07840 | 0.01200 | 0.02160 |
| — de magnesio | 0.00754 | 0.01254 | 0.00360 | 0.00965 |
| — de sodio | 0.25994 | 0.17821 | 0.28661 | 0.23913 |
| — de potasio | » | 0.04351 | » | 0.01087 |
| — de aluminio | 0.00112 | 0.00104 | 0.00280 | 0.00281 |
| — de hierro | 0.00107 | 0.00056 | v. | 0.00159 |
| *Combinaciones* | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00211 | 0.01021 | 0.00527 | 0.00529 |
| — de sodio | 0.06344 | 0.13098 | 0.12437 | 0.12425 |
| Cloruro de sodio | 0.02920 | 0.01755 | 0.01755 | 0.04095 |
| Nitrato de potasio | v. | 0.09351 | v. | 0.02337 |
| Carbonato ferroso | 0.00172 | 0.00090 | v. | 0.00256 |
| Sulfato de calcio | v. | 0.01050 | 0.01118 | 0.03385 |
| Bicarbonato de calcio | 0.07086 | 0.21426 | 0.02140 | 0.02215 |
| Bicarbonato de magnesio | 0.02747 | 0.04576 | 0.01321 | 0.03525 |
| Carbonato de sodio | 0.36138 | 0.17473 | 0.36610 | 0.26376 |

SEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Neuquén, 726 | Polvorín, 272 | Tranway Parral y Miriñay | Zubiría, 480 |
|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Amarillento |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | |
| Dureza total | 28.0 | 5.0 | 20.0 | 5.0 |
| — temporaria | 24.0 | 2.0 | 15.0 | 3.0 |
| — permanente | 4.0 | 3.0 | 5.0 | 2.0 |
| Residuo á 105° C | 0.41800 | 0.23000 | 0.57300 | 0.69400 |
| Cloro | 0.02130 | 0.01400 | 0.01770 | 0.01775 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | v. | 0.0 | — | 0.02500 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00010 | 0.00010 | 0.00015 | 0.00040 |

SEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Añasco, 1270 | Acoyte, 976 | Beauchef, 815 | Bella Vista, 840 | Boyacá, 740 | Cayena y Cucha-Cucha | Craig, 872 | Gaona, 2343 | Hidalgo, 1774 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.69300 | 0.58400 | 0.68720 | 0.59500 | 0.48000 | 0.51000 | 0.50180 | 0.44900 | 0.44500 |
| Dureza total | 19.5 | 18.0 | 13.0 | 16.0 | 19.5 | 23.0 | 18.0 | 25.0 | 13.0 |
| — temporaria | 12.0 | 16.0 | 11.0 | 14.0 | 19.0 | 19.5 | 17.0 | 18.0 | 12.0 |
| — permanente | 7.5 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 0.5 | 3.5 | 1.0 | 7.0 | 1.0 |
| Cloro | 0.05600 | 0.01775 | 0.02130 | 0.02485 | 0.01065 | 0.01065 | 0.02485 | 0.01775 | 0.02130 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | v. | v. | 0.03400 | 0.02500 | 0.00250 | v. | 0.00500 | 0.01250 | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00100 | 0.00040 | 0.00030 | 0.00070 | 0.00030 | 0.00080 | 0.00050 | 0.00095 | 0.00010 |

SÉPTIMA ZONA

| Caracteres físicos | Gaona, 2868 | Terrero, 1797 | Sánchez, 1806 | Neuquén, 2347 |
|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Lig. opalino | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Opalino |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcal. débil | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Escaso | Escaso | Muy escaso | Nulo |
| Aspecto del residuo | Ferruginoso | Are.-arcilloso | Arenoso | » |
| *Datos químicos* | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5198 | 0.4622 | 0.4850 | 0.5422 |
| — á 180° C | 0.5089 | 0.4585 | 0.4812 | 0.5384 |
| — al rojo débil | 0.4958 | 0.4488 | 0.4775 | 0.5314 |
| Dureza total | 15.0 | 18.0 | 17.0 | 10.0 |
| — temporaria | 10.0 | 10.5 | 16.5 | 8.5 |
| — permanente | 5.0 | 7.5 | 0.5 | 1.5 |
| Alcalinidad | 0.33970 | 0.30150 | 0.29620 | 0.34200 |
| Permanganato empleado | 0.00158 | 0.00039 | 0.00079 | 0.00039 |
| Oxígeno consumido | 0.00040 | 0.00010 | 0.00020 | 0.00010 |
| Cloro | 0.01065 | 0.01065 | 0.01420 | 0.00887 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | 0.00789 | v. | v. |
| — nítrico | v. | 0.00500 | 0.00250 | 0.01700 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06160 | 0.05520 | 0.07480 | 0.06600 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.15228 | 0.13510 | 0.13271 | 0.15341 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxido de calcio | 0.03520 | 0.06360 | 0.06560 | 0.03880 |
| — de magnesio | 0.01383 | 0.02464 | 0.02118 | 0.01492 |
| — de sodio | 0.22479 | 0.15721 | 0.17211 | 0.23742 |
| — de potasio | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00102 | 0.00075 | 0.00040 | 0.00100 |
| — de hierro | 0.00175 | 0.00085 | 0.00097 | 0.00300 |
| *Combinaciones* | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00191 | 0.00141 | 0.00075 | 0.00188 |
| — de sodio | 0.12342 | 0.11088 | 0.15135 | 0.13241 |
| Cloruro de sodio | 0.01755 | 0.01755 | 0.02340 | 0.01462 |
| — de amonio | — | — | — | — |
| Nitrato de potasio | v. | 0.00935 | 0.00467 | 0.03179 |
| Carbonato ferroso | 0.00281 | 0.00137 | 0.00156 | 0.00483 |
| Sulfato de calcio | v. | 0.01341 | v. | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.10179 | 0.16797 | 0.18972 | 0.11221 |
| — de magnesio | 0.05047 | 0.08993 | 0.07730 | 0.05445 |
| Carbonato de sodio | 0.26115 | 0.14908 | 0.13786 | 0.25229 |

SÉPTIMA ZONA

| Caracteres físicos | San Matías, 1969 | Directorio, 2958 | Gaona, 1801 | Bacacay y Granaderos | Bacacay y Granaderos | Georgetown, 529 | Gaona, 1982 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Algo turbia | Lig. opalino | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reaccion | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | |
| Dureza total | 28.0 | 35.0 | 39.0 | 16.0 | 11.0 | 4.5 | 8.0 |
| — temporaria | 17.0 | 23.0 | 25.0 | 12.5 | 9.5 | 3.0 | 6.5 |
| — permanente | 11.0 | 12.0 | 11.0 | 3.5 | 4.5 | 1.5 | 1.5 |
| Residuo á 105° C. | 0.51000 | 0.51000 | 0.55300 | 0.56700 | 0.59100 | 0.57500 | 0.54500 |
| Cloro | 0.02130 | 0.01065 | 0.01775 | 0.01775 | 0.01775 | 0.01065 | 0.01065 |
| Amoníaco | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene |
| Anhídrido nítrico | 0.00500 | 0.02500 | 0.03400 | 0.01175 | 0.01900 | 0.01700 | 0.01600 |
| — nitroso | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00070 | 0.00010 | 0.00020 | 0.00050 | 0.00010 | 0.00010 | 0.00010 |

SÉPTIMA ZONA

| Caracteres físicos | A. Lamas, 807 | Georgetown, esquina Yerbal | Malvinas, 910 | Zamudio, esquina Tranway | Lafuente, 931 | Malvinas, 63 | S. América, 955 | Terrero, 1902 | Camarones, 1517 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Límpido | Turbio | Lig. opal. | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 17.0 | 6.0 | 16.0 | 21.0 | 1.5 | 8.5 | 16.0 | 22.0 | 15.5 |
| — temporaria | 16.0 | 0.0 | 13.0 | 14.0 | 1.0 | 7.5 | 13.5 | 20.5 | 8.5 |
| — permanente | 1.0 | 6.0 | 3.0 | 7.0 | 0.5 | 1.0 | 2.5 | 1.5 | 7.0 |
| Residuó á 105° C | 0.54120 | 0.44700 | 0.54300 | 0.57800 | 0.73100 | 0.55600 | 0.41800 | 0.61800 | 0.97700 |
| Cloro | 0.02840 | 0.03550 | 0.03550 | 0 01775 | 0.01775 | 0.01065 | 0.01065 | 0.03195 | 0.02130 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.00750 | 0.0 | 0.05000 | — | 0.02500 | 0.00250 | 0.02100 | 0.02100 | 0.01900 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00015 | 0.00160 | 0.00050 | 0.00035 | 0.00160 | 0.00070 | 0.00010 | 0.00040 | 0.00060 |

OCTAVA ZONA

| Caracteres físicos | A. Thomas, 110 | Canning, 328 | Canning, 450 | Canning, 426 | Dungenes, 183 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Opalino | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Regular | Alcalina |
| Residuo por reposo | Muy escaso | Escaso | Escaso | Arc.-areno. | Escaso |
| Aspecto del residuo | Arenoso | Arenoso | Arcilloso | Alcalina | Arc.-areno. |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.6194 | 0.5752 | 0.7368 | 0.6574 | 0.4908 |
| — á 180° C | 0.6100 | 0.5680 | 0.7249 | 0.6429 | 0.4894 |
| — al rojo débil | 0.5948 | 0.5518 | 0.7118 | 0.6304 | 0.4692 |
| Dureza total | 7.0 | 14.0 | 32.0 | 26.0 | 22.0 |
| — temporaria | 4.0 | 13.0 | 26.0 | 22.0 | 13.0 |
| — permanente | 3.0 | 1.0 | 6.0 | 4.0 | 9.0 |
| Alcalinidad | 0.39100 | 0.31800 | 0.43230 | 0.34510 | 0.30340 |
| Permanganato empleado | 0.00237 | 0.00158 | 0.00355 | 0.00434 | 0.00118 |
| Oxígeno consumido | 0.00060 | 0.00040 | 0.00090 | 0.00110 | 0.00030 |
| Cloro | 0.02130 | 0.01775 | 0.04615 | 0.03905 | 0.01065 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | 0.01579 | v. | 0.01030 | v. |
| — nítrico | 0.02500 | 0.00937 | 0.02500 | 0.02500 | 0.01250 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.05420 | 0.11980 | 0.07620 | 0.07680 | 0.07220 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.17521 | 0.14255 | 0.19367 | 0.15464 | 0.13593 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.01440 | 0.01820 | 0.07820 | 0.06200 | 0.06100 |
| — de magnesio | 0.00605 | 0.01037 | 0.03358 | 0.03502 | 0.02652 |
| — de sodio | 0.31383 | 0.25762 | 0.28109 | 0.23248 | 0.17386 |
| — de potasio | » | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00370 | 0.00270 | 0.00261 | 0.00491 | 0.00111 |
| — de hierro | 0.00110 | 0.00180 | 0.00299 | 0.00149 | 0.00326 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00207 | 0.00338 | 0.00491 | 0.00924 | 0.00214 |
| — de sodio | 0.10821 | 0.24034 | 0.15024 | 0.14733 | 0.14475 |
| Cloruro de sodio | 0.03510 | 0.02920 | 0.08190 | 0.06435 | 0.01755 |
| Nitrato de potasio | 0.04675 | 0.01752 | 0.04675 | 0.04675 | 0.02337 |
| Carbonato ferroso | 0.00596 | 0.00435 | 0.00481 | 0.00240 | 0.00525 |
| Sulfato de calcio | v. | 0.02685 | v. | 0.01751 | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.04164 | 0.02064 | 0.20592 | 0.15846 | 0.17642 |
| — de magnesio | 0.02208 | 0.03784 | 0.12255 | 0.12781 | 0.09679 |
| Carbonato de sodio | 0.37349 | 0.21178 | 0.23862 | 0.17395 | 0.13699 |

OCTAVA ZONA

| Caracteres físicos | Figueroa, 1275 | Ferrari 388 | Loyola, 225-35 | Lavalleja, 85 | Rivera, 1369 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Opalino | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Turbio | Límpido | Opalino | Límpido |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reaccion | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Escaso | Escaso | Nulo | Escaso | Nulo |
| Aspecto del residuo | Arcilloso | Arcilloso | » | Arcilloso | » |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5530 | 0.5634 | 0.5936 | 0.6384 | 0.6634 |
| — á 180° C | 0.5420 | 0.5564 | 0.5840 | 0.6238 | 0.6520 |
| — al rojo débil | 0.5348 | 0.5458 | 0.5692 | 0.6046 | 0.5980 |
| Dureza total | 11.0 | 18.0 | 16.0 | 10.0 | 4.0 |
| — temporaria | 9.0 | 15.0 | 13.0 | 7.0 | 2.0 |
| — permanente | 2.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 2.0 |
| Alcalinidad | 0.33890 | 0.32980 | 0.37440 | 0.35490 | 0.43350 |
| Permanganato empleado | 0.00474 | 0.00395 | 0.00355 | 0.00434 | 0.00079 |
| Oxígeno consumido | 0.00120 | 0.00100 | 0.00090 | 0.00110 | 0.00020 |
| Cloro | 0.01065 | 0.01065 | 0.00710 | 0.01065 | 0.03195 |
| Anhídrido sulfúrico | 0.01030 | 0.00741 | 0.00686 | 0.03296 | v. |
| — nítrico | 0.00937 | 0.03740 | 0.01870 | 0.01870 | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06240 | 0.05640 | 0.06260 | 0.06580 | 0.06560 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.15187 | 0.14776 | 0.16775 | 0.15881 | 0.19423 |
| Amoníaco | v. | 0.0 | v. | 0.0 | v. |
| Oxido de calcio | 0.01640 | 0.03680 | 0.01600 | 0.01420 | 0.00686 |
| — de magnesio | 0.00612 | 0.01657 | 0.00966 | 0.00591 | 0.00202 |
| — de sodio | 0.27248 | 0.24408 | 0.29341 | 0.31249 | 0.35193 |
| — de potasio | » | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00046 | 0.00023 | 0.00080 | 0.00323 | 0.00250 |
| — de hierro | 0.00394 | 0.00243 | 0.00280 | 0.00337 | 0.00418 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00086 | 0.00043 | 0.00150 | 0.00608 | 0.00570 |
| — de sodio | 0.12600 | 0.11425 | 0.12584 | 0.12799 | 0.12686 |
| Cloruro de sodio | 0.01755 | 0.01755 | 0.01170 | 0.01755 | 0.05265 |
| Nitrato de potasio | 0.01752 | 0.06995 | 0.03497 | 0.03497 | v. |
| Carbonato ferroso | 0.00635 | 0.00391 | 0.00451 | 0.00542 | 0.00673 |
| Sulfato de calcio | 0.01751 | 0.01259 | 0.01166 | 0.03447 | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.02657 | 0.09144 | 0.03258 | 0.01773(1) | 0.01966 |
| — de magnesio | 0.02233 | 0.06047 | 0.03525 | 0.00144(2) | 0.00736 |
| Carbonato de sodio | 0.32655 | 0.24647 | 0.35333 | 0.37817 | 0.44368 |
| Cloruro de amonio | v. | » | v. | » | v. |

(1) Sulfato de magnesio. (2) Sulfato de sodio.

OCTAVA ZONA

| Caracteres físicos | Rivera, 1646 | Thames, 372 | Triunvirato, 1077 | Villarruel, 970 |
|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Límpido | Opalino | Opalino | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Muy escaso | Escaso | Nulo | Nulo |
| Aspecto del residuo | Arenoso | Arenoso | » | » |
| *Datos químicos* | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5244 | 0.5760 | 0.5904 | 0.5914 |
| — á 180° C | 0.5202 | 0.5718 | 0.5893 | 0.5874 |
| — al rojo débil | 0.5119 | 0.5535 | 0.5742 | 0.5826 |
| Dureza total | 4.0 | 8.0 | 13.0 | 8.0 |
| — temporaria | 3.0 | 7.0 | 12.0 | 7.0 |
| — permanente | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| Alcalinidad | 0.38040 | 0.37310 | 0.35100 | 0.36800 |
| Permanganato empleado | 0.00118 | 0.00079 | 0.00079 | 0.00158 |
| Oxígeno consumido | 0.00030 | 0.00020 | 0.00020 | 0.00040 |
| Cloro | 0.01775 | 0.01420 | 0.01775 | 0.03905 |
| Anhídrido nítrico | 0.0 | v. | 0.02100 | v. |
| — sulfúrico | v. | v. | v. | 0.00056 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. |
| — silícico | 0.04010 | 0.07600 | 0.07720 | 0.06480 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.17053 | 0.16611 | 0.15724 | 0.16495 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. |
| Óxido de calcio | 0.00400 | 0.02400 | 0.04640 | 0.02560 |
| — de magnesio | 0.00216 | 0.00749 | 0.01340 | 0.00850 |
| — de sodio | 0.28765 | 0.28165 | 0.25866 | 0.29054 |
| — de potasio | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00083 | 0.00172 | 0.00174 | 0.00080 |
| — de hierro | 0.00119 | 0.00401 | 0.00204 | 0.00140 |
| *Combinaciones* | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00161 | 0.00324 | 0.00323 | 0.00150 |
| — de sodio | 0.07994 | 0.15101 | 0.15184 | 0.13031 |
| Cloruro de sodio | 0.02920 | 0.02340 | 0.02925 | 0.06435 |
| Nitrato de potasio | » | v. | 0.03927 | v. |
| Carbonato ferroso | 0.00192 | 0.00646 | 0.00328 | 0.00225 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | v. | 0.00095 |
| Bicarbonato de calcio | 0.01156 | 0.06941 | 0.13419 | 0.07291 |
| — de magnesio | 0.00788 | 0.04733 | 0.04891 | 0.03102 |
| Carbonato de sodio | 0.39516 | 0.32911 | 0.25455 | 0.32518 |
| Nitrito de sodio | » | » | » | v. |
| Cloruro de amonio | » | » | » | v. |

OCTAVA ZONA

| Caracteres físicos | A. Thomas. 1966 | Canning, esquina Padilla | Darwin, 372 | Figueroa, 1041 | Rivera, 601-7 | Rivera, 1751 | Thames, esquina Aguirre | Triunvirato, 1045 | Triunvirato, 821 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Opalino | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Opalino | Turbio | » | Turbio | Opalino | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Insípido | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alc. débil | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 16.0 | 13.0 | 12.0 | 18.0 | 9.0 | 5.0 | 12.0 | 9.0 | 6.0 |
| — temporaria | 11.0 | 12.0 | 6.0 | 12.5 | 6.0 | 2.0 | 11.0 | 5.0 | 5.0 |
| — permanente | 5.0 | 1.0 | 6.0 | 5.5 | 3.0 | 3.0 | 1.0 | 4.0 | 1.0 |
| Residuo á 105° C | 0.40100 | 0.19800 | 0.56400 | 0.75100 | 0.55140 | 0.4930 | 0.57300 | 0.4730 | 0.72300 |
| Cloro | 0.02130 | 0.01775 | 0.01065 | 0.04970 | 0.01775 | 0.0017 | 0.01065 | 0.0284 | 0.03195 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.02500 | 0.03710 | v. | 0.0 | 0.01250 | » | v. | » | 0.02950 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00030 | 0.00040 | 0.00100 | 0.00115 | 0.00040 | 0.00075 | 0.00020 | 0.00015 | 0.00040 |

NOVENA ZONA

| Caracteres físicos | Aráoz, 1737 | Almagro, 1550 | Costa Rica, 528 | Cabrera, 4249 | Charcas, 4260-62-64 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Opalino |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Poco | Muy escaso | Nulo | Escaso | Nulo |
| Aspecto del residuo | Arcilloso | Arenoso | » | Arcilloso | » |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.7156 | 0.6880 | 0.6130 | 0.4742 | 0.6736 |
| — á 180° C | 0.7117 | 0.6824 | 0.6090 | 0.4724 | 0.6680 |
| — al rojo débil | 0.6856 | 0.6692 | 0.5818 | 0.4698 | 0.6524 |
| Dureza total | 24.0 | 5.0 | 12.0 | 9.0 | 10.0 |
| — temporaria | 22.0 | 3.0 | 8.0 | 7.5 | 9.5 |
| — permanente | 2.0 | 2.0 | 4.0 | 1.5 | 0.5 |
| Alcalinidad | 0.4288 | 0.38987 | 0.34850 | 0.27530 | » |
| Permanganato empleado | 0.00079 | 0.00118 | 0.00070 | 0.00158 | 0.00118 |
| Oxígeno consumido | 0.00020 | 0.00030 | 0.00020 | 0.00040 | 0.00030 |
| Cloro | 0.03550 | 0.04260 | 0.02485 | 0.01065 | 0.03550 |
| Anhídrido sulfúrico | 0.00961 | v. | v. | v. | 0.01922 |
| — nítrico | 0.02500 | 0.02950 | 0.03740 | 0.01000 | 0.03740 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.07440 | 0.06560 | 0.06440 | 0.07320 | 0.05440 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.19209 | 0.17373 | 0.15613 | 0.12331 | 0.19480 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.08000 | 0.01520 | 0.02480 | 0.03400 | 0.01600 |
| — de magnesio | 0.02998 | 0.00605 | 0.01283 | 0.01398 | 0.02573 |
| — de aluminio | 0.00140 | v. | 0.00160 | 0.00102 | 0.00060 |
| — de hierro | 0.00202 | v. | 0.00380 | 0.00075 | 0.00018 |
| — de sodio | 0.26968 | 0.34932 | 0.28879 | 0.20684 | 0.27683 |
| — de potasio | » | » | » | » | 0.03253 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00263 | v. | 0.00301 | 0.00191 | 0.00113 |
| — de sodio | 0.14865 | 0.13336 | 0.12805 | 0.14700 | 0.10950 |
| Cloruro de sodio | 0.05850 | 0.07020 | 0.04095 | 0.01755 | 0.05850 |
| Nitrato de potasio | 0.04675 | 0.05517 | 0.06995 | 0.01870 | 0.06993 |
| Carbonato ferroso | 0.00325 | v. | 0.00612 | 0.00121 | 0.00029 |
| Sulfato de calcio | 0.01634 | v. | v. | v. | 0.03267 |
| Bicarbonato de calcio | 0.21194 | 0.04396 | 0.07172 | 0.09833 | 0.00693 |
| — de magnesio | 0.10941 | 0.02208 | 0.04682 | 0.05201 | 0.09390 |
| Carbonato de sodio | 0.24179 | 0.37382 | 0.28970 | 0.19496 | 0.32510 |

NOVENA ZONA

| Caracteres físicos | Charcas, 3654 | Darregueira, 2325 | Godoy Cruz, 489 | Gorriti, 706 |
|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Turbio | Opalino | Opalino |
| Olor | Incoloro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Residuo por reposo | Nulo | Nulo | Nulo | Nulo |
| Aspecto del residuo | » | » | » | » |
| *Datos químicos* | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.6500 | 0.7966 | 0.5986 | 0.5484 |
| — á 180° C | 0.6403 | 0.7824 | 0.5730 | 0.5360 |
| — al rojo débil | 0.6218 | 0.7684 | 0.5526 | 0.4998 |
| Dureza total | 9.0 | 10.0 | 10.0 | 11.0 |
| — temporaria | 6.0 | 8.0 | 7.0 | 7.0 |
| — permanente | 3.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 |
| Alcalinidad | 0.40600 | 0.46270 | 0.41200 | 0.33430 |
| Permanganato empleado | 0.00395 | 0.00158 | 0.00474 | 0.00197 |
| Oxígeno consumido | 0.00100 | 0.00040 | 0.00120 | 0.00050 |
| Cloro | 0.02130 | 0.04260 | 0.01775 | 0.01775 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | 0.01133 | v. | v. |
| — nítrico | 0.00937 | 0.02500 | v. | 0.01250 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.07500 | 0.07280 | 0.05200 | 0.06480 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.18192 | 0.20730 | 0.18445 | 0.14979 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.01120 | 0.01700 | 0.02480 | 0.02280 |
| — de magnesio | 0.00461 | 0.00634 | 0.00908 | 0.01009 |
| — de sodio | 0.33689 | 0.40373 | 0.28601 | 0.26030 |
| — de potasio | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00262 | 0.00116 | 0.00100 | 0.00095 |
| — de hierro | 0.00218 | 0.00184 | 0.00090 | 0.00110 |
| *Combinaciones* | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00410 | 0.00218 | 0.00188 | 0.00207 |
| — de sodio | 0.14857 | 0.14592 | 0.10392 | 0.12976 |
| Cloruro de sodio | 0.03510 | 0.07020 | 0.02925 | 0.02925 |
| Nitrato de potasio | 0.01752 | 0.04675 | v. | 0.02337 |
| Carbonato ferroso | 0.00422 | 0.00296 | 0.00145 | 0.00153 |
| Sulfato de calcio | v. | 0.01926 | v. | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.03248 | 0.02622 | 0.07172 | 0.06593 |
| — de magnesio | 0.01682 | 0.02313 | 0.03413 | 0.03922 |
| Carbonato de sodio | 0.40111 | 0.46263 | 0.37215 | 0.28717 |

NOVENA ZONA

| Caracteres físicos | Malabia 1718 | Paraguay, 4735 | Santa Fe, 4748 | Santa Fe, 4600 |
|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Límpido | Límpido | Límpido |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Nulo | Nulo | Nulo | Escaso |
| Aspecto del residuo | » | » | » | Arcilloso |
| *Datos químicos* | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.7564 | 0.8488 | 0.8190 | 0.6476 |
| — á 180° C | 0.7489 | 0.8259 | 0.8085 | 0.6420 |
| — al rojo débil | 0.7301 | 0.8232 | 0.7912 | 0.6338 |
| Dureza total | 4.0 | 10.0 | 8.0 | 6.0 |
| — temporaria | 2.0 | 7.0 | 6.0 | 3.0 |
| — permanente | 2.0 | 3.0 | 2.0 | 3.0 |
| Alcalinidad | 0.48110 | 0.55400 | 0.47930 | 0.40220 |
| Permanganato empleado | 0.00158 | 0.00197 | 0.00355 | 0.00118 |
| Oxígeno consumido | 0.00040 | 0.00050 | 0.00090 | 0.00030 |
| Cloro | 0.03550 | 0.04970 | 0.01775 | 0.02485 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | 0.00604 | 0.00845 | 0.02808 |
| — nítrico | 0.01870 | 0.00625 | 0.01870 | 0.0 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06950 | 0.07000 | 0.07560 | 0.05800 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.21556 | 0.25766 | 0.21475 | 0.01829 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. |
| Oxido de calcio | 0.00700 | 0.01620 | 0.00520 | 0.00360 |
| — de magnesio | 0.00576 | 0.00807 | 0.00590 | 0.00360 |
| — de sodio | 0.40260 | 0.43569 | 0.39633 | 0.34558 |
| — de potasio | » | » | 0.03888 | » |
| — de aluminio | 0.00115 | 0.00039 | v. | 0.00090 |
| — de hierro | 0.00185 | 0.00261 | v. | 0.00270 |
| *Combinaciones* | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00216 | 0.00073 | v. | 0.00169 |
| — de sodio | 0.13924 | 0.14164 | 0.15369 | 0.11630 |
| Cloruro de sodio | 0.05850 | 0.07020 | 0.02920 | 0.04095 |
| Nitrato de potasio | 0.03497 | 0.01169 | 0.03550 | » |
| Carbonato ferroso | 0.00298 | 0 00420 | v. | 0.00435 |
| Sulfato de calcio | v. | 0.01027 | 0.01362 | 0.00771 |
| Bicarbonato de calcio | 0.02023 | 0.03461 | 0.01770 (1) | 0.01080 (1) |
| — de magnesio | 0.02102 | 0.02945 | 0.04180 (2) | 0.02971 (2) |
| Carbonato de sodio | 0.48646 | 0.54889 | 0.51749 | 0.43046 |

(1) Sulfato de magnesio. (2) Sulfato de sodio.

NOVENA ZONA

| Caracteres físicos | S. Salvador, 808 | Soler, 1020 | Uriarte, 2322 | Oro, 2361-65 |
|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reaccion | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Nulo | Muy escaso | Nulo | Muy escaso |
| Aspecto del residuo | » | Arenoso | » | Arenoso |
| *Datos químicos* | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5484 | 0.7954 | 0.8048 | 1.0304 |
| — á 180° C | 0.5407 | 0.7884 | 0.7941 | 1.0107 |
| — al rojo débil | 0.5259 | 0.7723 | 0.7720 | 1.0027 |
| Dureza total | 16.0 | 20.0 | 12.0 | 12.0 |
| — temporaria | 11.0 | 17.0 | 9.0 | 9.0 |
| — permanente | 5.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 |
| Alcalinidad | 0.35300 | 0.46090 | 0.52350 | 0.63270 |
| Permanganato empleado | 0.00118 | 0.00237 | 0.00118 | 0.00434 |
| Oxígeno consumido | 0.00030 | 0.00060 | 0.00030 | 0.00110 |
| Cloro | 0.02485 | 0.07100 | 0.03905 | 0.05321 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | v. | 0.05287 |
| — nítrico | 0.01870 | 0.02500 | 0.01250 | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.04960 | 0.06730 | 0.07080 | 0.07860 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.15818 | 0.20649 | 0.23453 | 0.28345 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxido de calcio | 0.08100 | 0.06300 | 0.02160 | 0.02900 |
| — de magnesio | 0.01621 | 0.00270 | 0.00029 | 0.02054 |
| — de sodio | 0.19474 | 0.36634 | 0.42085 | 0.50007 |
| — de potasio | » | » | v. | » |
| — de aluminio | 0.00110 | 0.00153 | 0.00111 | 0.00188 |
| — de hierro | 0.00191 | 0.00202 | 0.00289 | » |
| *Combinaciones* | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00207 | 0.00290 | 0.00208 | 0.00353 |
| — de sodio | 0.09886 | 0.13403 | 0.14196 | 0.15643 |
| Cloruro de sodio | 0.04095 | 0.11700 | 0.06435 | 0.08776 |
| Nitrato de potasio | 0.03497 | 0.04675 | 0.02337 | v. |
| Carbonato ferroso | 0.00307 | 0.00325 | 0.00465 | 0.00475 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | v. | 0.07041 |
| Bicarbonato de calcio | 0.23127 | 0.18221 | 0.06246 | 0.02026 (1) |
| — de magnesio | 0.05916 | 0.00985 | 0.00105 | 0.07496 |
| Carbonato de sodio | 0.08211 | 0.36631 | 0.51923 | 0.62438 |

(1) Léase sulfato de sodio.

NOVENA ZONA

| Caracteres físicos | Aráoz, 2459 | Aráoz, 2461 | Av. Alvear, 1658-70 | Álvarez, 2010-20 | Arévalo, 1969-71 | Bulnes, 1840 | Bulnes, 1755 | Bustamante, 1018 | Billinghurst, 972 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Turbio | Opalino | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Opalino | Opalino |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Insípido | Agradable | Insípido | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Insípido |
| Reacción | Alc. débil | Alcalina | Alc. débil | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alc. débil |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 12.0 | 8.0 | 10.0 | 26.0 | 9.0 | 14.0 | 8.0 | 6.0 | 13.0 |
| — temporaria | 7.0 | 7.0 | 7.0 | 16.0 | 5.0 | 11.0 | 5.0 | 3.0 | 8.0 |
| — permanente | 5.0 | 1.0 | 3.0 | 10.0 | 4.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 5.0 |
| Resido á 105° C | 0.49800 | 0.74600 | 0.49300 | 0.76600 | 0.48300 | 0.74680 | 0.58600 | 0.41600 | 0.47800 |
| Cloro | 0.04260 | 0.06035 | 0.03550 | 0.04615 | 0.02840 | 0.05680 | 0.02485 | 0.02480 | 0.00260 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | 0.01475 | » | 0.01870 | » | v. | 0.00500 | » | » |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00030 | 0.00060 | 0.00035 | 0.00060 | 0.00025 | 0.00070 | 0.00060 | 0.00060 | 0.00010 |

NOVENA ZONA

| Caracteres físicos | Bompland, 1340-57 | Cabrera, 5142 | Charcas, 4675 | Charcas, 3661 | Charcas, 3473 | Charcas, 3333 | Canning, 2834 | Canning, 2430 | Cerviño, 970 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio | Opalino | Límpido | Opalino |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Insípido | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alc. débil | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 8.0 | 18.0 | 8.0 | 4.5 | 9.5 | 5.0 | 10.0 | 10.0 | 3.0 |
| — temporaria | 3.0 | 16.0 | 5.0 | 3.0 | 8.5 | 4.0 | 7.0 | 4.0 | 1.5 |
| — permanente | 5.0 | 2.0 | 3.0 | 1.5 | 1.0 | 1.0 | 3.0 | 6.0 | 1.5 |
| Residuo á 105° C | 0.41200 | 0.23060 | 0.52200 | 0.60920 | 0.69200 | 0.66480 | 0.54200 | 0.33600 | 0.58900 |
| Cloro | 0.03900 | 0.06035 | 0.0603 | 0.02840 | 0.03550 | 0.04260 | 0.06390 | 0.03905 | 0.02485 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | 0.03400 | » | 0.01000 | 0.02100 | 0.00750 | » | 0.0 | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00125 | 0.00080 | 0.00050 | 0.00170 | 0.00080 | 0.00070 | 0.00055 | 0.00150 | 0.00030 |

NOVENA ZONA

| Caracteres físicos | Cor. Díaz, 1340-56 | Cor. Díaz, 386 | French, 3160 | Godoy Cruz, 1952 | Guayanas 1276 | Las Heras y Malabia | Honduras, 717 | Güemes, 3374 | Mansilla, 1776 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Turbio | Límpido | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Insípido | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Insípido | Agradable | Agradable | Insípido |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 11.0 | 10.0 | 10.0 | 12.0 | 8.0 | 22.0 | 5.0 | 10.0 | 12.0 |
| — temporaria | 7.0 | 8.0 | 7.0 | 8.0 | 6.5 | 17.0 | 4.0 | 8.5 | 7.0 |
| — permanente | 4.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 1.5 | 5.0 | 1.0 | 1.5 | 5.0 |
| Residuo á 105° C | 0.52400 | 0.56640 | 0.74300 | 0.36200 | 0.44100 | 0.68100 | 0.60920 | 0.62800 | 0.41100 |
| Cloro | 0.04610 | 0.02840 | 0.03905 | 0.01420 | 0.03195 | 0.10650 | 0.03195 | 0.04615 | 0.0314 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | v. | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | 0.00750 | 0.01870 | v. | 0.0 | » | 0.01250 | 0.02100 | 0.02000 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00015 | 0.00050 | 0.00070 | 0.00035 | 0.00070 | 0.00045 | 0.00060 | 0.00040 | 0.00020 |

NOVENA ZONA

| Caracteres físicos | Lavalleja. 1285 | Güemes. 3722 | Güemes. 3397-99 | Paraguay. 4756 | Paraguay. 3258 | Paraguay. 3785 | Mansilla. 1508 | Santa Fe. 4540-52 | Santa Fe 5158-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Opalino | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Límpido | Turbio | Turbio | » | Límpido | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Lig. amar. | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 7.5 | 6.0 | 8.0 | 4.0 | 11.0 | 6.0 | 4.0 | 8.0 | 12.0 |
| — temporaria | 1.5 | 5.0 | 7.0 | 2.0 | 9.0 | 5.0 | 3.0 | 4.0 | 7.0 |
| — permanente | 6.0 | 1.0 | 1.0 | 2.0 | 2.0 | 1.0 | 1.0 | 4.0 | 5.0 |
| Residuo á 105° C | 0.18900 | 0.65440 | 0.51200 | 0.67000 | 0.48320 | 0.64040 | 0.59680 | 0.35500 | 0.70000 |
| Cloro | 0.01065 | 0.03550 | 0.03195 | 0.04260 | 0.03550 | 0.03550 | 0.02130 | 0.07100 | 0.01775 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhidrido nítrico | 0.01000 | 0.01200 | 0.02100 | » | 0.01250 | 0.02500 | v. | v. | 0.00937 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00030 | 0.00010 | 0.00010 | 0.00100 | 0.00010 | 0.00090 | 0.00030 | 0.00170 | 0.00040 |

DÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | S. Salvador, 831 | Soler, 1228 | Salguero, 1737 | Salguero, 1630 | Salguero, 1884 | Thames, 1290 | Thames, 2246 | Vidt, 1058 | Vidt. 443 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Límpido | Límpido | Opalino | Turbio | Turbio | Opalino | Opalino | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alc. débil | Alc. débil | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 10.0 | 4.0 | 6.0 | 8.0 | 4.0 | 10.0 | 10.0 | 10.0 | 10.5 |
| — temporaria | 4.0 | 3.0 | 3.5 | 6.0 | 3.0 | 7.0 | 7.0 | 8.0 | 7.0 |
| — permanente | 6.0 | 1.0 | 2.5 | 2.0 | 1.0 | 3.0 | 3.0 | 2.0 | 3.5 |
| Residuo á 105° C | 0.22500 | 0.58700 | 0.63720 | 0.66600 | 0.53840 | 0.52300 | 0.48700 | 0.72700 | 0.73760 |
| Cloro | 0.02650 | 0.02485 | 0.03195 | 0.02185 | 0.03550 | 0.05340 | 0.01260 | 0.05480 | 0.01260 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | v. | 0.00468 | 0.02500 | v. | 0.01900 | » | » | 0.03740 | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00140 | 0.00140 | 0.00080 | 0.00030 | 0.00020 | 0.00040 | 0.00035 | 0.00020 | 0.00010 |

DÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Cabildo, 636-38 | Carranza, 1972 | Colegiales, 2911 | F. Lacroze, 714 | F. Lacroze, 2985 | F. Lacroze, 2625-29 | F. Lacroze, 3360 | F. Lacroze, 2840 | Fitz-Roy, 1463 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Lig. opal. | Límpido | Límpido | Límpido | Lig. opal. |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Opalino | Opalino | Opalino | Opalino | Opalino | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Insípido | Insípido | Insípido | Insípido | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | » | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 7.0 | 6.0 | 18.0 | 10.0 | 12.0 | 9.0 | 4.0 | 12.0 | 12.0 |
| — temporaria | 6.0 | 2.0 | 12.0 | 7.0 | 7.0 | 8.5 | 3.0 | 10.0 | 9.0 |
| — permanente | 1.0 | 4.0 | 6.0 | 3.0 | 5.0 | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 3.0 |
| Residuo á 105° C | 0.57000 | 0.41900 | 0.59500 | 0.52200 | 0.49000 | 0.71000 | 0.59600 | 0.66800 | 0.58300 |
| Cloro | 0.01420 | 0.01770 | 0.02480 | 0.02130 | 0.01420 | 0.00887 | 0.01420 | 0.01065 | 0.04610 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrico nítrico | 0.02500 | » | » | » | » | v. | 0.02500 | 0.00937 | 0.0 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.0 | 0.00015 | 0.00035 | 0.00020 | 0.00025 | 0.00110 | 0.00150 | 0.00010 | 0.00030 |

DÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Cabildo, 308-18 | General Paz, 860 | F. Lacroze, 2864 | F. Lacroze, 2720 | F. Lacroze, 3216 | F. Lacroze, 2487 | Roseti, 18 | Giribone, 520 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Opalino | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Opalino |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | |
| Dureza total | 9.0 | 5.0 | 7.0 | 4.0 | 21.0 | 5.5 | 8.0 | 8.0 |
| — temporaria | 8.0 | 4.5 | 6.5 | 3.5 | 20.0 | 4.0 | 5.0 | 4.0 |
| — permanente | 1.0 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 3.0 | 4.0 |
| Residuo á 105° C | 0.61200 | 0.53400 | 0.61000 | 0.24200 | 0.61800 | 0.57200 | 0.41600 | 0.42700 |
| Cloro | 0.02840 | 0.01775 | 0.01420 | 0.02130 | 0.02840 | 0.01420 | 0.03195 | 0.02130 |
| Amoníaco | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene |
| Anhídrido nítrico | 0.00038 | 0.01000 | 0.02300 | 0.00750 | 0.02950 | 0.01000 | No contiene | » |
| — nitroso | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene | No contiene |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00020 | 0.00020 | 0.00040 | 0.00180 | 0.00050 | 0.00020 | 0.00120 | 0.00010 |

*(Continuará.)*

BREVES APUNTES

SOBRE LA

# PROBOSCIDEA LUTEA (LINDL.) STAPF.

SU IRRITABILIDAD ESTIGMÁTICA

POR ANA MANGANARO

Es bien conocida en toda la República Argentina la planta vulgarmente designada con el nombre de «Cuerno del diablo», y científicamente con la denominación *Martynea lutea* Lindl. ó mejor aún, según los autores más modernos, de *Proboscidea lutea* (Lindl.) Stapf., vegetal muy interesante y que merece ser detenidamente estudiado desde el punto de vista biológico.

Esta planta era característica de las vizcacheras, donde formaba constantemente una sociedad vegetal con el zapallito amargo (*Cucurbita Andreana* Naud.), el abrojillo (*Xanthium ambrosioides* Hook. K. Arn.) y en ciertos lugares con el amor seco (*Blumenbachia insignis* Schrd.); pero como tales accidentes biogénicos han desaparecido, ahora sólo se le halla al borde de las zanjas, en la pendiente de los taludes de caminos y ferrocarriles, de modo que se podría considerar como un tipo ruderal; me inclino sin embargo á clasificarla como una planta calcífila, pues en todas partes donde la he observado he visto que asomaban al suelo, ya sea toscas más ó menos abundantes, ya conchillas semifósiles, sea en *situ* ó transportadas con objeto de hacer balasto.

Llama inmediatamente la atención la gran variedad de tamaños que se observan á veces sin causa plausible; en efecto, á veces á poca distancia, otras veces mezcladas, se notan plantas enanas de 5-10 cen-

tímetros de altura con dos únicas hojitas y una raquítica inflorescencia de 3 ó 4 flores, al lado de plantas gigantescas que pueden cubrir de 2-4 metros cuadrados y levantarse hasta casi un metro de altura con espléndida ramificación tricotómica, terminando el eje de cada tricotomía en una hermosa inflorescencia conteniendo hasta 100 flores en racimos de anthesis basífuga, que van abriéndose paulatinamente mientras se alarga al mismo tiempo el eje de la inflorescencia.

La raíz pivotante, pero relativamente pequeña, está revestida por una corteza semicarnosa de color anaranjado, que en presencia del alcohol pone en libertad y sucesivamente dos colores: el primero amarillo, el otro rojo. El tronco siempre herbáceo, bastante grueso, está cubierto por una corteza verde, pero en los lugares muy asoleados la cutícula epidérmica se destaca formando debajo lagunas aeríferas que comunican al órgano un color blanco, como se observa en las Loasáceas; no hay duda, pues, que se trate de una defensa contra las excesivas irradiaciones caloríficas del suelo. Las hojas casi orbiculares, acorazonadas, de bordes casi enteros, apenas insensiblemente angulosoalmenados, y herbáceas algo gruesas de un hermoso color verde se hallan, como todas las partes tiernas y jóvenes, cubiertas de una vellosidad glandulosa enderezada, bastante tupida para hacerlas aterciopeladas y volverlas viscosas; por efecto del roce despiden un olor bastante fuerte *sui generis*, para mí poco agradable y que recuerda en algo al del éter enántico ó del cuero de Rusia; sobre esta vellosidad se hallan siempre adheridos una infinidad de pequeños insectos, que en ocasiones, dado su excesivo número, hacen aparecer las hojas como cubiertas por una capa de hollín. Los insectos capturados son siempre dípteros, raras veces algunos himenópteros, sea hormiguitas aladas, sea ichneumónidos; estos cautivos mueren allí rápidamente, lo que hace suponer que la secreción de la cabecita de los pelos sea tóxica para ellos; encerrando moscas, tábanos y hormigas grandes en un tubo con fragmentos de dichas hojas no tardan en perecer. ¿Cuál será, pues, el objeto de esta pubescencia glandular? Tengo dos sospechas al respecto: 1ª que se trate de un aparato capturador de la humedad atmoférica, dado que la planta en cuestión es seguramente xerófila; 2ª que pueda ser también un aparato entomófago y que la planta pertenezca á las carnívoras: en efecto he observado á veces que los pelos, especialmente los del margen basal de las hojas (que son más largos), se encorvan y se aplican sobre las víctimas, pero cabe declarar que no los he visto moverse, aunque la posición era seguramente muy sospechosa.

La planta tiene muy pocos enemigos, pues hasta ahora sólo observé correr sobre ella algunas larvas de hemípteros algo grandes y la he visto atacada por las orugas verdes (del mismo color de la planta) de un lepidóptero diurno, que no he podido criar y que no conozco; la misma *Diabrotica speciosa* Berg, que ataca con tanta saña toda clase de plantas, huye de la Martynia y no la he encontrado nunca ni sobre sus hojas ni en sus flores.

Las inflorescencias tardan en desarrollarse más de un mes, pero lo que llama la atención es que sólo las flores basales cuajan; en la bifurcación primaria del tallo y en los individuos robustos y grandes pueden desarrollarse hasta 15 gineceos, mientras que en las plantas débiles ó en las inflorescencias de las tricotomías secundarias sólo una y generalmente la primera inferior. Al principio creí que se debía atribuir este fenómeno á la falta de prónubos en la época avanzada del verano, pero más me inclino á creer que los ovarios que resultan fecundados primero absorben con tanta intensidad el agua y los principios nutritivos de la planta, que agotan las fuerzas de la misma y las flores serotinas caen aunque polinizadas. Las lluvias parece que facilitan la permanencia y maduración de los frutos.

Las flores hermosas y muy poco olorosas (no fragantes, como se dice en la *Flora brasiliensis*) son seguramente entomógamas, pero la visita de los insectos debe hacerse por la noche; los prónubos deben ser mariposas crepusculares ó nocturnas ó abejas matutinas; de las primeras no he notado nunca ningún ejemplar que visite dichas flores, pero dos ó tres veces he visto abejas *(Svastra detecta, Macroglossapis buccosa)*. Dichas flores están sostenidas por pedúnculos de más ó menos un centímetro de largo, que salen de la axila de una bráctea lineal angosta aguda apenas un poco más larga que ellos; el cáliz verde viscoso glanduloso algo zigomorfo está provisto en la parte dorsal superior de dos bracteolas casi trasovadas algo agudas y tan grandes como los sépalos mayores, á los cuales se asemejan muchísimo; los sépalos son libres, empizarrados, los dos ventrales mayores, un poco menos el impar dorsal externo y mucho más pequeños los dos laterales, subdorsales internos, opuestos á las bracteolas. Las corolas teñidas de amarillo intenso con puntos y estrías en parte de color anaranjado, en parte carmesí, antes de la anthesis son casi regulares, pues el pimpollo obcónico, regular y abierto, muestra circularmente distribuídos en su interior 4 estambres iguales en tamaño y color, de anteras libres, blancas, lisas é independientes entre sí, con estaminodio dorsal impar circundando el estilo central; mas, al abrirse la flor,

ésta se vuelve zigomorfa, el labio inferior de estivación interna es mucho más pronunciado y los estambres se arquean apoyándose en la pared dorsal los dos ventrales, resultando superiores y más largos, y los laterales al estaminodio más cortos é inferiores; las anteras se disponen horizontalmente en dos pares (en cruzados), y un reborde glandular, que circunda el conectivo, se hincha, segregando una substancia viscosa que hace adherir por pares dichas anteras (las más largas por el lado interno del saco polínico, las más cortas por el frente), de modo tal que, cuando se abren, parecen tenazmente soldadas de á dos. Nunca he visto apéndice ó glándula conectival que sobrepase los sacos polínicos.

El estilo también se arquea, se sitúa detrás de los estambres y, superando las anteras más largas, viene á apoyarse sobre la cara anterior de las mismas; el estigma elíptico ovalado laminar, verde, que se abre en dos hojuelas, una superior algo más pequeña y otra inferior más larga también encorvada hacia atrás, presentando así la superficie estigmática interna hacia la entrada de la corola, de tal modo que todo insecto algo grande que visite la flor necesita forzosamente rozar con su cabeza y dorso por lo menos el estigma inferior, antes de ponerse en contacto con los estambres que quedan posteriores.

Si un objeto cualquiera viene á frotar dichas superficies estigmáticas, éstas manifiestan una maravillosa irritabilidad, de tal modo que se estiran é inmediatamente cierran con rapidez el estigma aplicando una cara contra la otra.

Si el objeto está cubierto de polen, el estigma no se abre más, pero si fué solamente irritado, ó se le ha cubierto con alguna substancia inerte (arena, etc.), al cabo de 5-10 minutos vuelve á abrirse. El estigma se cierra también cuando se toca rudamente la flor en su exterior ó la inflorescencia, pero si no ha habido polinización, aunque se arranque la corola, el estigma vuelve á abrirse.

Quise investigar á qué causa era debida la paralización del estigma polinizado, y para ello he depositado sobre el estigma con mucha precaución una gota de agua: el estigma no se cerró; deposité entonces agua destilada y filtrada, después de haber tenido polen en suspensión por pocos instantes (el agua manifestaba una marcada opalescencia), dando por resultado el cierre del estigma, y á continuación, aunque con menor rapidez, la apertura del mismo; luego tomé polen, lo machaqué bien y en segida lo agoté con agua destilada; filtrada ésta y aplicada sobre la superficie estigmática, no dió resultado satis-

factorio; de modo que no he podido determinar la causa paralizante del estigma.

Los ovarios fecundados tardan más ó menos 45 días para madurar y entonces la planta, que es anual, se marchita y seca; en estas circunstancias los folículos drupaceos también pierden el epicarpio en dos valvas submembranosas, quedando el falso folículo subleñoso cubierto de púas y con crestas en la sutura dorsal prolongado en dos ganchos largos encorvados y agudos hacia el dorso, restos del estilo lignificado y que funciona como cuerpo adhesivo sirviendo á la diseminación de la planta, pues se prende con fuerza á los pelos de las patas de los caballos y á los vellones de los animales. La dehiscencia es lenta y paulatina prolongándose por casi toda la estación invernal, pues mientras las primeras semillas son dispersadas al principio de mayo (en La Plata), se encuentran folículos con semillas aun en octubre cuando empiezan á germinar las primeras plantas.

Los frutos ofrecen dos placentas parietales laterales, longitudinales y bífidas, que casi dividen la cavidad interna en cinco huecos; el borde de cada rama placental lleva dos hileras de óvulos ó semillas horizontales superpuestas, variando en cada hilera de 10-15 óvulos ó semillas. Las semillas, negras en número de 25-50 por cada fruto normal, rugosas con testa coriacea, contienen una pepita blanca aceitosa, sin albumen, formada por dos gruesos cotilédones ovalados. Dichas semillas son de bastante buen sabor, muy buscadas por los roedores campestres y con frecuencia por los mismos niños del campo.

# ESTUDIO DE LAS LEVADURAS DE MENDOZA

Por LUIS MANUEL LEJEUNE
Doctor en química

## INTRODUCCIÓN

La aplicación de las levaduras puras seleccionadas ha hecho hacer enormes progresos á las industrias de fermentación. Así vemos, por ejemplo, la antigua fabricación de la cerveza, basada en métodos empíricos que originaban productos de mala conservación y de calidades muy diversas, dependientes de condiciones desconocidas y que el fabricante no podía dominar, transformarse desde la aplicación de las levaduras puras, en algo por así decirlo, matemáticamente exacto. Y como el industrial en este caso conoce todas las condiciones de una buena fabricación, podrá obtener un producto que será siempre el mismo y cuya conservación estará asegurada. En una palabra, el fabricante será dueño absoluto del terreno y obtendrá siempre el producto que quiera obtener.

Lo que es cierto en cervecería, es también cierto en vinificación, aunque en menor grado, pues el fabricante de cerveza prepara él mismo su mosto y le da la composición más conveniente; el bodeguero por el contrario debe trabajar con un mosto cuya composición será variable de un año á otro y que no podrá modificar sino en algunos de sus elementos. El primero trabaja con un líquido esterilizado; en el mosto del segundo pululan organismos muy diversos, útiles unos, sumamente peligrosos otros.

Considerando únicamente las levaduras que se encuentran en el mosto, podemos dividirlas en dos grupos bien distintos: las levaduras útiles y las levaduras salvajes. Entre las primeras encontramos en un mosto sólo algunas razas de *Saccharomyces ellipsoideus;* entre las segundas encontramos otras razas de esta misma levadura, así también como distintas razas de *Saccharomyces apiculatus, pastorianus* y diversas torulas.

Si recordamos que conjuntamente con estos organismos, encontramos numerosos mohos y bacterios, será forzoso admitir que las levaduras útiles tendrán que luchar con numerosos microorganismos, para ser dueñas absolutas del terreno, condición indispensable para obtener un vino de buena calidad.

Tan pronto como la uva ha sido pisada, todos los microorganismos presentes empiezan á desarrollarse activamente; si las razas útiles consiguen hacerlo más activamente que los otros fermentos, las especies nocivas serán eliminadas sucesivamente; la fermentación se hará normalmente y el vino obtenido será más ó menos bueno ó excelente. Pero si los otros fermentos consiguen desarrollarse de un modo apreciable, molestarán enormemente á las buenas levaduras; la fermentación no será normal y el vino obtenido será malo y estará expuesto á enfermedades que lo transformarán rápidamente en un líquido no potable.

Vemos, pues, cómo podremos facilitar el triunfo de las buenas levaduras, en la lucha que deberán emprender para hacerse dueñas del terreno; el método más sencillo será agregar al mosto una cantidad tal de estas levaduras, que permita al mosto el entrar en fermentación, antes que los malos fermentos se hayan multiplicado; la condición de estos se hará cada vez más precaria, debido al alcohol y á ciertas toxinas segregadas por las levaduras, y la fermentación terminará normalmente. El vino obtenido será sano y se conservará perfectamente.

Otro método más complicado, pero también más seguro y más científico, será la esterilización del mosto por el calor, por el anhídrido sulfuroso ó por cualquier otro medio y la adición posterior de una levadura pura seleccionada.

De este modo el vinicultor será dueño absoluto de sus fermentaciones, pero es necesario recordar que la levadura pura seleccionada que debe emplearse, debe ser la más apta para hacer fermentar el mosto que poseemos.

En la República Argentina existe entre los vinicultores un ambien-

te desfavorable al empleo de estas levaduras; pero hay que confesar que los fracasos obtenidos se deben á varias causas, entre las cuales se cuenta indudablemente la falta de preparación científica de las personas encargadas de la vinificación.

Las levaduras puras seleccionadas que se han empleado, han sido en general, levaduras europeas; no es de sorprenderse que el resultado no haya sido bueno, lo contrario habría sido, si no extraordinario, por lo menos raro.

Nuestros industriales se forjaron ilusiones acerca de los resultados; creyeron que haciendo fermentar sus mostos con levaduras de las más afamadas bodegas europeas, obtendrían vinos semejantes á los producidos en éstas; es indudable que esto no podía suceder, pues si la levadura es mucho en una fermentación, no es todo, porque en ella interviene también la composición y la calidad del mosto, que depende de mil factores, imposibles de reunir sino en una región determinada. Y como he dicho más arriba, la levadura empleada deberá ser la más adaptada á la composición del mosto.

Por lo tanto no podremos emplear una levadura de Burdeos en la Argentina, el resultado sería nulo; es preciso que la levadura seleccionada sea una levadura indígena, es decir, una levadura perfectamente habituada á hacer fermentar el mosto que empleamos. Esto no basta; es necesario que dicha levadura haya sido bien estudiada, para conocer perfectamente sus exigencias, es decir, la temperatura de fermentación, la concentración del mosto, la acidez más favorable, etc., etc.; en esas condiciones, no dudemos, el resultado será excelente. No obtendremos seguramente un Burdeos ni un Sauterne, pero sí un producto tipo, de calidades bien definidas y que podrá tener tal vez tanto valor como los productos citados y que nuestros industriales tratan inútilmente de imitar.

El vinicultor debe tratar de fabricar el tipo de vino que su región puede producir, sin buscar imitar nada; en esa forma podríamos tener productos apreciados en nuestro país y en el exterior.

La industria vinícola no ha alcanzado todavía en la República Argentina el grado de perfeccionamiento a que ha llegado en otros países; y ello se debe en gran parte al hecho de que las levaduras de nuestras distintas regiones vinícolas no han sido aun objeto de serios y pacientes trabajos de laboratorio, absolutamente indispensables para que nuestros industriales puedan vinificar en las mejores condiciones, obteniendo de esa manera productos de calidad superior y siempre iguales ó muy semejantes en los distintos años.

Para que esto suceda es indudablemente necesaria la existencia de un instituto similar de los que existen en Europa, en donde el químico, el enólogo y el biólogo colaboren para el estudio científico de las levaduras de cada región vinícola de la República, y puedan suministrar al industrial cultivos puros de las levaduras más apropiadas a cada caso, conjuntamente con los consejos é indicaciones necesarios para su empleo.

Por las razones apuntadas es que he efectuado este pequeño estudio, que trata únicamente de las levaduras de los alrededores de la ciudad de Mendoza y que debería completarse con algunas determinaciones más y sobre todo, con algunos ensayos prácticos.

## RECOLECCIÓN DE LAS MUESTRAS

Después de visitar varias bodegas, creí conveniente recoger las muestras en la bodega y viñedo Santa Ana, propiedad del señor Luis Tirasso, situada cerca de la ciudad de Mendoza, en el departamento de Guaymallén.

Todas las muestras fueron recogidas en recipientes esterilizados que he llevado desde Buenos Aires. Para las muestras de vino y de borra he utilizado frascos con tapón automático, de la misma clase que las botellas para leche, pero de capacidad de 100 centímetros cúbicos solamente. Para las muestras de uva he empleado conservas de vidrio con tapa esmerilada, de una capacidad suficiente para contener un racimo.

Antes de esterilizar coloqué en el fondo de éstas una buena cantidad de algodón, lo mismo que en la parte superior, con el objeto de evitar que los movimientos del transporte machucaran el racimo, al mismo tiempo que impedía toda contaminación.

Los frascos fueron esterilizados á 120° al autoclave, teniendo la precaución de colocar en el fondo unas gotas de agua para asegurar la esterilización; las conservas á 160° en el horno Pasteur, habiéndolas envuelto previamente en papel, así también como los frascos antes citados; del mismo modo he procedido con varias cajas de Pétri en las que había colocado una cierta cantidad de algodón.

En la bodega y viñedo citado recogí: una muestra de vino tomada el último día de la fermentación principal, una de borra de un vino

descubado diez días antes y una de uva Malbec. Las muestras de vino y de borra provienen de esta misma clase de uva (1).

Para recoger las muestras de vino y de borra procedí del modo siguiente : abierta la espita de la cuba ó del tonel, dejé salir una cierta cantidad de líquido, luego retiré el papel que envolvía el frasco, saqué el tapón sin tocar los bordes de la abertura, dejé caer en el frasco el chorro de líquido y cerré luego, observando las mismas precauciones con el objeto de proceder asépticamente.

En el frasco que contenía la muestra de vino tuve especial cuidado de dejar un espacio vacío, con el objeto de que los gases provenientes del vino aún en fermentación tuvieran sitio para acumularse, evitando así que se produjera la explosión del recipiente; por otra parte, varias veces durante el viaje tuve la precaución de dejar libre el cierre del frasco, permitiendo así que los gases se escaparan, volviendo á cerrar antes que la presión hubiera igualado la de la atmósfera, evitando de este modo todo peligro de contaminación.

Como los frascos que contenían estas muestras hubieran podido romperse por cualquier causa durante el transporte, resolví retirar otras muestras que debían servirme únicamente en este caso, para lo cual utilicé las cajas de Pétri de que he hablado : retiré el papel sin tocar la parte interior de éste, levanté la tapa y con una pinza cuya punta previamente había sido pasada por la llama de una lámpara de alcohol, tomé el algodón que se encontraba en la parte interior y lo mojé con el chorro de vino ó de borra que salía por la espita de la cuba, coloqué nuevamente el algodón en la caja y envolví con el papel, procediendo lo más asépticamente posible. Estas segundas muestras no he tenido necesidad de utilizarlas.

Por lo que se refiere á la muestra de uva, fué recolectada del modo siguiente : elegí un racimo perfectamente sano, de un tamaño proporcionado al de la conserva destinada á recibirlo, y que se encontraba bien aislado; retiré el papel que envolvía la conserva, hice destapar ésta y retirar el algodón superior con una pinza esterilizada, introduje el racimo en la conserva (sin tocarlo para nada) y corté el pedúnculo del racimo con una tijera esterilizada; por último coloqué encima de éste el algodón y luego la tapa de vidrio, envolviendo todo con el mismo papel.

(1) La uva Malbec es uno de los cepajes más cultivados en la provincia de Mendoza, y conjuntamente con la Cabernet tiende á substituir casi completamente la antigua uva criolla.

Como puede verse, estas muestras fueron recogidas con todas las precauciones necesarias para impedir que se contaminaran, ya sea en el momento de recogerlas, durante el transporte ó bien durante su conservación posterior.

La uva criolla es cultivada en Mendoza desde el tiempo de la conquista ; el tipo primitivo traído de Chile y que procedía de cepas europeas, se ha modificado de tal modo que en la actualidad es imposible identificarla con ninguna de las variedades europeas; por lo tanto debemos admitir que las levaduras que se encuentran sobre sus frutos están perfectamente adaptadas á las condiciones de vinificación de la provincia y constituyen las que podríamos llamar verdaderamente levaduras de Mendoza.

Esta deducción hecha *a priori* no implica decir que estos mismos fermentos no se encuentren también sobre las uvas de otras cepas cultivadas en la misma región.

Sin embargo los bodegueros afirman que los fermentos de la uva criolla son más activos y también más resistentes á las temperaturas elevadas. Esto último he podido comprobarlo experimentalmente, como lo demuestro en la última parte de este estudio.

Por las consideraciones expuestas anteriormente, hubiera sido mi deseo que las muestras procedieran de productos fabricados con la llamada uva *criolla,* pero como en la época en que yo me encontraba en Mendoza no se vinificaba aún esta clase de uva, no pude hacerlo así, por lo que resolví traer á Buenos Aires unos dos kilogramos de esta uva, que recolecté en la Escuela nacional de vitivicultura, y con la cual practiqué una pequeña fermentación con el objeto de aislar luego las levaduras correspondientes.

Debo dejar constancia de que esta última muestra no ha sido recogida asépticamente, pues no había previsto el caso.

## AISLAMIENTOS

Los aislamientos fueron efectuados en mosto de uvas secas gelatinizado, que se prepara del modo siguiente: 200 gramos de pasas de uva se ponen en maceración en un litro de agua durante 24 horas en un sitio fresco ó mejor en la heladera; luego se calienta lentamente hasta ebullición, la que se mantiene por espacio de media hora; luego se hecha el todo sobre un género de hilo y se exprime fuertemente

para recoger todo el líquido; por último se agrega 100 gramos de gelatina de primera calidad y, una vez disuelta ésta, se completa á un litro si es necesario. Sobre 5 ó 10 centímetros cúbicos se determina la acidez, empleando papel de tornasol como indicador y operando por toques, teniendo la precaución de lavar el papel indicador después de cada toque, pues la gelatina dificulta mucho el viraje. Conocido el título, se agrega á la solución la cantidad necesaria de una solución de hidrato de sodio al 10 por ciento, para que aquélla tenga sólo una acidez de 1 por mil aproximadamente, evaluada en ácido tártrico. Esta reducción de la acidez es completamente necesaria, pues la gelatina lo mismo que la gelosa, calentadas á 100 ó 120° respectivamente con soluciones muy ácidas, pierden la propiedad de solidificarse por enfriamiento (1). Por otra parte he podido comprobar que algunas de las levaduras que he aislado no se desarrollan ya con una acidez de 2 por mil.

El medio de cultivo así preparado es completamente turbio, y como su clarificación sería casi imposible por filtración, se recurre al colaje, para lo cual se agrega una clara de huevo bien batida al líquido enfriado á una temperatura menor de 50°, se agita fuertemente y se deja unos 20 minutos en el autoclave á 101-102°; después de lo cual se echa todo sobre un filtro, continuando la filtración en el mismo autoclave. Finalmente se reparte en tubos de ensayos tapados con algodón y se esteriliza, calentando á 100° durante 15 minutos, dos veces sucesivas, con 24 horas de intervalo.

El medio de cultivo así preparado es sumamente favorable para todas las levaduras, y como su transparencia es perfecta, lo he empleado para todos los aislamientos á cultivos en gelatina que he efectuado en el curso del presente trabajo.

Los aislamientos fueron efectuados por el método de las diluciones sucesivas, operando en cajas de Pétri. La primera dilución en agua destilada y las dos últimas en mosto gelatinizado.

Para aislar los fermentos de la uvas Malbec y criolla, tomé varios granos que coloqué en un tubo de ensayo y aplasté luego con una varilla de vidrio. El jugo de las uvas se cargaba así con los fermentos que se encontraban en la superficie. Procedí con este líquido como si se tratara de vino ó de borra, pero suprimiendo la primera dilución en agua, pues la riqueza en gérmenes era indudablemente mucho menor.

Como he dicho en el capítulo anterior, la pequeña cantidad de uva

(1) L. Hauman Merck, Comunicación particular.

criolla que he traído de Mendoza, fué puesta en fermentación; al segundo día de ésta, efectué los aislamientos.

Todas estas operaciones y las siguientes fueron practicadas empleando recipientes y aparatos esterilizados, y operando según la técnica corriente de la microbiología, que, cuando está bien empleada, aleja toda posibilidad de contaminación; por lo tanto puedo afirmar que los fermentos aislados existían realmente en las muestras.

Las primeras operaciones del aislamiento fueron efectuadas á las 48 horas de recogidas las muestras, pero el trasplante de las colonias obtenidas solo fué posible efectuarlo unas tres ó cuatro semanas más tarde, pues como la temperatura ambiente era sumamente elevada en esa época, tuve que mantener las cajas de Pétri en la heladera (10-11°), para evitar la fusión del medio de cultivo. Esto tuvo por consecuencia aumentar el tiempo del desarrollo, pero en cambio he podido observar que las diferencias entre las colonias así obtenidas son mayores que cuando se opera á una temperatura más elevada; lo que no deja de tener grandes ventajas.

*Trasplante de las colonias.* — En algunas cajas se desarrollaron numerosas colonias de mohos, y como éstos crecen muy rapidamente, me he visto obligado á efectuar el trasplante de las colonias de levaduras que se encontraban en dichas cajas, cuando las colonias eran aún muy pequeñas; existiendo, por otra parte, probabilidades para que los cultivos resultaran impuros, efectué inmediatamente después del primer cultivo un segundo aislamiento en mosto gelatinizado. Las cajas en que esto sucedió correspondían á los aislamientos directos de los gérmenes que se encontraban sobre las uvas; de ellas provienen las levaduras señaladas con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

He aislado un total de treinta colonias que á primera vista presentaban entre sí algunas diferencias. El número de cultivos se redujo á 23, pues un cierto número de dichas colonias no eran tales, sino simples aglomeraciones de cristales (1).

(1) Ciertas aglomeraciones de cristales (bitartrato de potasio) que suelen formarse en los medios de cultivos, pueden ser confundidas fácilmente en un principio con colonias de levaduras; estas aglomeraciones eran muy raras en las cajas donde existía gran número de colonias, haciéndose muy abundantes en el caso contrario. Esto puede explicarse de dos modos: ó bien las levaduras en vida aerobia transforman la substancia que origina las aglomeraciones de cristales, ó de lo contrario, los productos formados por las levaduras impiden la cristalización de esta substancia; esto último me parece poco probable. En apoyo de la primera hipótesis se encuentran los trabajos de Laurent, que demostró que las levaduras

## PURIFICACIÓN

Si se tratara de bacterios, sería sumamente fácil comprobar la pureza de los cultivos así obtenidos; bastaría un simple examen microscópico después de coloración, ó la comparación de las colonias en placas de gelatina.

Tratándose de levaduras, el problema es mucho más difícil; la mayoría presentan formas, dimensiones y caracteres de coloración casi idénticos y el aspecto de sus colonias es también muy semejante. Y cuando se supone que la impureza posible, puede ser, no ya una especie diferente, sino una raza de la misma especie, se comprende que los medios comunes no pueden aplicarse en el caso de las levaduras.

Los métodos de purificación de las levaduras son bastante numerosos y se comprende que cada experimentador podrá modificar según su ingenio los ya existentes. Sin embargo pueden reunirse en dos grupos: el primero lo constituye únicamente el llamado método fisiológico; y el segundo, que comprende todos los demás, se designa con los nombres de método mecánico, de dilución ó de culturas fraccionadas.

El método fisiológico se basa en el hecho siguiente: cuando se siembra en un medio nutritivo determinado, una mezcla de dos especies, es general que el medio sea más favorable á una de ellas; ésta se desarrollará primero.

Si cuando se inicia el desarrollo hacemos una nueva siembra en el mismo medio, favoreceremos nuevamente el desarrollo de la especie que se adapte mejor. Repitiendo varias veces esta operación, tomando una muy pequeña cantidad de semilla, llegaremos á tener un cultivo completamente puro.

Es claro que puede suceder que el medio de cultivo sea igualmente favorable para las dos ó tres especies ó razas que constituyen el cultivo primitivo; en este caso bastará operar con otro medio ó hacer variar la temperatura.

Á pesar de todo y especialmente cuando la impurezas están formadas por razas de la misma especie que tienen propiedades muy semejantes, puede suceder que no se separen por este método; en este caso debemos recurrir á otro procedimiento.

asimilan débilmente el tartrato de potasio y enérgicamente el tartrato de amonio. (Véase Laurent, *Recherches physiologiques sur les levures*, pág. 56 y 57.)

Este método, pues, exige muchos tanteos y no lleva necesariamente al resultado apetecido; cuando lo logramos, muchas veces no podemos comprobarlo, por las razones expuestas más arriba. Podemos emplearlo solamente en casos especiales, como por ejemplo: obtención de un cultivo puro de *Saccharomyces apiculatus* partiendo de una mezcla de éste y *S. ellipsoideus*, pues el primero se desarrolla más rápidamente y sus caracteres morfológicos permiten reconocerlo fácilmente.

El procedimiento de Lindner, conocido bajo el nombre de cultivo en gotitas *(Tröpfchenkultur)*, lo he empleado del modo siguiente: una fracción de un cultivo joven se diluye en un medio nutritivo en la proporción de un décimo más ó menos, se agita perfectamente, y luego, con un palito mondadientes cuya punta ha sido finamente aguzada con una navaja y luego esterilizado en una caja de Pétri se depositan gotas sumamente pequeñas sobre un cubreobjeto, también esterilizado, el que se invierte sobre un portaobjeto con una concavidad central, teniendo la precaución de pegar los bordes del cubreobjeto con vaselina esterilizada; luego se cuenta al microscopio el número de células que hay en cada gota, se saca el término medio y se conoce de este modo la dilución que será necesario emplear para que en cada gota exista una sola célula; obtenida la dilución conveniente, se procede otra vez del mismo modo colocando $3 \times 3$ ó bien $4 \times 4$ gotas sobre un nuevo cubreobjeto y luego se examina detenidamente con el microscopio cada una de estas gotitas, que se tiene especial cuidado de hacer del mismo tamaño que en el primer ensayo; las gotas que contienen una sola célula se marcan con tinta con un pequeño circulito y luego se coloca toda la cámara húmeda en la estufa á 25°; las levaduras se multiplican, y á las 48 horas cada una de las gotitas que contenían una sola célula, se encuentra poblada por un gran número de éstas; entonces se levanta el cubreobjeto y, con un pequeño papel de filtro cortado en forma de triángulo, esterilizado y tomado con una pinza pasada por la llama, se absorbe una de las pequeñísimas gotas que en el origen tenían una sola célula, y se coloca en un tubo con mosto aséptico; por último se observa al microscopio si en la operación no se ha tocado alguna otra gota cercana; en caso negativo podemos tener la seguridad que poseemos un cultivo puro.

Este ingenioso procedimiento es uno de los pocos que pueden darnos una seguridad absoluta, pero exige el empleo de medios de cultivos y de aparatos que no contengan ningunas partículas extrañas, las que dificultan enormemente la observación, por lo cual creo que es practicable únicamente cuando se trata de un pequeño número de culti-

vos; pero como he operado con un gran número de éstos, me he visto obligado á abandonar este método y substituirlo por otro, que si bien es cierto, es mucho más largo, es en cambio más practicable; me refiero al método de las diluciones sucesivas en un medio gelatinizado, y desarrollo en cajas de Pétri.

El cultivo que se desea purificar se agita enérgicamente para obtener una suspensión homogénea; luego se sumerge en él un alambre de platino esterilizado, en una longitud de un centímetro; se pasa luego por un primer tubo con mosto gelatinizado, y con una pipeta Pasteur se toman diez ó doce gotas que se pasan á un segundo tubo; se vierte el contenido de ambos tubos en dos cajas de Pétri; para activar el desarrollo he colocado las cajas en la estufa á 22°. Al cabo de cinco días las colonias tienen un diámetro de un milímetro; entonces se transplanta una de ellas en un medio nutritivo. De esta manera se ha practicado una primera purificación.

Esta operación la he repetido dos veces más, llegando así á cuatro el número de aislamientos sucesivos.

Pasaré ahora á hacer la crítica de este método. Las investigaciones de Hansen, Miquel y Holm pusieron de manifiesto que una dilución de gérmenes perfectamente agitada, no siempre conduce á una separación completa de éstos; en consecuencia un cierto número de colonias pudieran estar formadas por la reunión de dos ó más especies ó razas si el cultivo primitivo no es puro. Holm demostró que para las levaduras este número es como máximo de un décimo, suponiendo que dos levaduras se encuentren en igual número en el cultivo primitivo; se comprende fácilmente que si una de las dos predomina, existen aún menor número de probabilidades para que una colonia tomada al azar resulte impura.

Es fácil calcular que al cuarto aislamiento las probabilidades para que los cultivos sean aún impuros, son menores de uno por diez mil, lo que en este caso equivale á decir que prácticamente los cultivos son perfectamente puros.

## IDENTIFICACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE LAS DISTINTAS LEVADURAS

Tenemos ahora nuestros cultivos perfectamente puros, pero debemos suponer que habrá muchas levaduras iguales entre sí; se trata, pues, de eliminar las que se encuentran repetidas, para lo cual he

efectuado una serie de ensayos que describo á continuación, con el objeto de diferenciar los distintos cultivos é identificar los que coinciden en todas sus propiedades.

Son necesarios muchos caracteres para identificar dos ó más levaduras y conocer el género y la especie á que pertenecen. En efecto, la forma y las dimensiones de las células de las distintas especies, no presentan grandes diferencias y estos caracteres son variables en una misma especie, según las condiciones físicas y químicas del medio y la edad de las células. Los caracteres fisiológicos son más constantes, pero no es raro que dos especies perfectamente definidas coincidan en un cierto número de caracteres. Por lo tanto, para asegurar que dos especies y sobre todo dos razas de levaduras son iguales, es obsolutamente indispensable haber examinado un gran número de caracteres.

Los que he utilizado son los siguientes :

### *Caracteres morfológicos*

Forma y dimensiones de las células.
Forma, número, disposición y dimensiones de los esporos.

### *Caracteres de cultivos*

Aspecto del depósito.
Aspecto y forma de las colonias en mosto gelatinizado.
Colonias gigantes.
Cultivos en picadura.
Cultivos en estría.

### *Caracteres fisiológicos*

Acción sobre la gelatina.
Ensayo de fermentación en un líquido mineral.
Cultivos en medio alcalino (0.5 ‰ de NaOH).
— en medio alcalino (1 ‰ de NaOH).
— en medio muy ácido (20 ‰ de ác. tárt.).
— á 37°.
— á 39°.
— á 41°.
— á 42°.

*Forma y dimensiones de las células.* — He examinado al microscopio cada uno de los cultivos, pudiendo comprobar que, salvo las levaduras 1, 23 y 25, todas poseen una forma elipsoidal y un aspecto muy semejante.

La levadura 1 tiene muchas células elipsoidales y otras cilíndricas con extremidades redondeadas.

Las levaduras 23 y 25 poseen una forma de limón, lo que hace posible distinguirlas inmediatamente de las demás. Este carácter, unido á la escasa cantidad de alcohol producida en el ensayo de fermentación, á la ausencia de esporos y á los caracteres de fermentación de los azúcares, permite identificarlos inmediatamente con *Saccharomyces apiculatus*, Rees-Hansen.

*Esporulación.* — Numerosos son los medios empleados para obtener la esporulación de las levaduras, pero la mayor parte de ellos no pueden ser utilizados sino en casos especiales.

Dos métodos sin embargo son casi generales: el de Gorodkowa, poco conocido, y el clásico de Engel-Hansen.

El primero consiste en sembrar células de levaduras jóvenes y activas sobre el medio siguiente:

| | Gramos |
|---|---|
| Gelosa | 1.0 |
| Peptona | 1.0 |
| Caldo de carne | 1.0 |
| Cloruro de sodio | 0.5 |
| Glucosa | 0.5 |
| Agua | 100.0 |

Las levaduras se desarrollan rápidamente durante las primeras horas, pero la débil cantidad de glucosa es agotada rápidamente; las células esporulan al cabo de dos ó tres días.

El método de Engel modificado por Hansen debe practicarse del modo siguiente: se toma un cultivo de una edad no mayor de 48 horas, durante cuyo tiempo se ha renovado dos ó tres veces el medio nutritivo. Se lava perfectamente la levadura con agua esterilizada, á fin de eliminar todo alimento (1), y se deposita sobre un bloque de yeso (con una superficie bien lisa), que se ha esterilizado en un pequeño cristalizador con tapa, con una cierta cantidad de agua. Se coloca el todo en una estufa á 25°

(1) Esta operación se efectúa cómodamente, empleando una centrífuga.

Á las 24 horas muchas especies forman esporos; otras tardan algo más.

Siguiendo este método he podido observar la mayor ó menor rapidez en formar esporos y el número que contenía cada célula, así también como el mayor ó menor número de células esporuladas.

Transcribo solamente el resultado de la observación efectuada á las 48 horas (1).

| | | Esporos |
|---|---|---|
| Levadura | 1 | ? |
| — | 2 | no hay |
| — | 3 | — |
| — | 4 | — |
| — | 5 | — |
| — | 6 | — |
| — | 7 | muy escasos |
| — | 8 | — |
| — | 9 | 1 y 2 |
| — | 10 | muy abund. 1, 2* y 3 |
| — | 11 | 1 y 2* |
| — | 12 | 1, 2 y 3 |
| — | 15 | muy escasos |
| — | 16 | 1 y 2 |
| — | 17 | muy escasos 1 y 2 |
| — | 22 | 1 y 2* |
| — | 23 | no hay |
| — | 24 | 1 y 2 |
| — | 25 | no hay |
| — | 27 | 1* y 2 |
| — | 28 | 1, 2 y 3 |
| — | 29 | 1 |
| — | 30 | muy escasos 1 |

*Aspecto del depósito.* — Los cultivos observados fueron hechos en agua de levadura (2) con 3 por ciento de sacarosa y 2 por ciento de

(1) Las cifras acompañadas de un aterisco indican que predominan las células con ese número de esporos.

(2) El agua de levadura se prepara del modo siguiente: se toma una cierta cantidad de levadura de cerveza (muy fresca) que se diluye en un gran volumen de agua, se filtra á través de un género de textura apretada para eliminar las impurezas y se deja reposar durante 24 horas en un lugar fresco. Este tratamiento tiene por objeto hacer desaparecer las reservas hidrocarbonadas de las levaduras, que pasarían al medio de cultivo y molestarían en ciertos casos (p. ej., cuando se estudian los caracteres de fermentación de los azúcares).

Se decanta el agua que sobrenada la levadura, se toman 100 gramos del depó-

glucosa. Los he examinado diariamente para tener conocimiento del aspecto más ó menos límpido ó turbio que toma el medio durante el desarrollo y después de la fermentación, lo mismo que el aspecto del depósito: datos que, según creo, tienen cierta utilidad.

Al quinto día del desarrollo todos los tubos presentaban un depósito formado por células de levaduras; su color es blanco sucio cuando se opera á baja temperatura; en el caso contrario es más ó menos pardusco.

Este depósito presenta un aspecto pastoso; cuando se agita se pone fácilmente en suspensión y el líquido toma un aspecto uniformemente turbio.

Esto no sucede en el caso de levadura 22, cuyo depósito se aglutina de tal modo que es imposible ponerlo en suspensión homogénea, por más violenta que sea la agitación. Esto permite reconocer inmediatamente esta levadura y diferenciarla de las demás. Si la agitación no es muy enérgica, la masa única que constituye el depósito, nada en el líquido conservando la forma del recipiente: agitando más vivamente se forman grumos más ó menos gruesos, los que se dirigen rápidamente al fondo y aglutinan nuevamente en cuanto cesa la agitación, sobrenadando un líquido enturbiado por grumos más finos y algunas células aisladas. En la última parte del presente estudio volveré á ocuparme de esta propiedad.

Agitando enérgicamente todos los tubos y observando después de treinta minutos de reposo, el líquido presenta los aspectos siguientes:

Turbio uniformemente: levaduras 1, 2, 3, 4, 6, 23 y 25.

Casi límpido en todo el tubo: levadura 5.

Perfectamente límpido en la parte superior: levaduras 7, 8, 9 10, 11, 12, 15, 16, 17, 22, 24, 27, 28, 29 y 30.

He observado también el momento de la aparición de un velo ó de un anillo ó la ausencia de éste. No quiero publicar estos datos, para no aumentar demasiado el volumen de este estudio con datos que en este caso creo que no tienen mayor importancia.

*Aspecto y forma de las colonias en mosto gelatinizado.* — Las levaduras estudiadas corresponden á los diferentes tipos de colonias que se

sito formado por ésta, que se diluye en un litro de agua y se lleva á la ebullición, la que se mantiene durante cinco minutos; se filtra en caliente, se agrega un 5 á 10 por ciento de azúcar y se esteriliza á 120°. Si no se consigue obtener un líquido límpido, se añaden unas gotas de una solución de ácido fosfórico y se neutraliza éste con agua de cal; se calienta á 120° y se filtra en caliente. El líquido así obtenido es completamente transparente.

desarrollaron en las cajas de Pétri al efectuar los aislamientos. Las diferencias eran á veces muy notables, pero las colonias obtenidas, á partir de los cultivos sucesivos, no presentan en muchos casos los caracteres de las primitivas colonias. En algunos casos esto se debe á que las colonias han sido originadas por dos células de razas ó especies diferentes, pero en otros casos es más lógico suponer que las levaduras esporuladas y desecadas que se encuentran en la superficie de las uvas, producen colonias diferentes de las originadas, á partir de un cultivo en mosto. Algo análogo sucede si se comparan las colonias obtenidas, partiendo de un cultivo en plena fermentación, con otras obtenidas de un cultivo cuya fermentación ha terminado.

Los caracteres de las colonias originadas á partir de estos últimos cultivos, son completamente fijos para una misma levadura, siempre que no se modifiquen las condiciones físicas y químicas del medio. Es á estas colonias á las que me refiero en el presente capítulo.

Consideraré únicamente las colonias superficiales, pues las profundas presentan en general diferencias casi insignificantes.

Se distinguen netamente cuatro grupos:

El primero lo constituye únicamente la levadura 1, con colonias muy grandes, desarrolladas al nivel de la gelatina, de forma irregular, color blanco sucio y aspecto cremoso; cada colonia está rodeada de prolongaciones, formadas por la yuxtaposición de pequéñísimas colonias profundas, que se dirigen en todas direcciones, lo que da al borde de la colonia un aspecto parecido á las de *Proteus vulgaris*.

El segundo grupo formado por las levaduras 2, 3, 5, 6, 23 y 25, presenta colonias blanquizcas, circulares, de borde liso y poco elevadas; el aspecto es también más ó menos cremoso.

El tercer grupo, comprende únicamente la levadura 4; sus colonias tienen los mismos caracteres que las del grupo anterior, pero después de varios días de desarrollo toman un color rosado que permite distinguirlas fácilmente de todas las demás. Este carácter, unido á la ausencia de esporos, nos autoriza á colocar esta levadura dentro del grupo de las *Torulas coloreadas*.

El cuarto y último grupo lo forman las levaduras 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 22, 24, 27, 28, 29 y 30; sus colonias son muy elevadas, generalmente filiformes, color blanquizco y aspecto consistente; las colonias son á veces tan elevadas, que por acción de la gravedad, su extremidad libre se encorva hasta llegar á tocar la superficie de la gelatina; desde este momento la colonia presenta la forma de un arco de puente.

*Colonias gigantes*. — Se llaman así á las que se desarrollan dispo-

niendo de una gran cantidad de alimento. El medio nutritivo empleado es el mosto de cerveza gelatinizado. La cantidad de gelatina puede variar entre 10 y 15 por ciento, según la temperatura ambiente; he empleado mosto de cerveza negra con 13 por ciento de gelatina, neutralizando el exceso de acidez con hidrato sódico, hasta que ésta no sea mayor de 1 por mil.

El medio de cultivo así preparado se distribuye en cajas de vidrio de tapa sobrepuesta y de un tamaño adecuado para contener unos 150 centímetros cúbicos de aquél, quedando aún un buen espacio libre. Se esteriliza á 100° en el autoclave dos veces consecutivas con 24 horas de intervalo, se deja enfriar y se siembra en el centro una pequeña cantidad de la levadura que se desea estudiar.

Después de treinta ó cuarenta días la colonia ha adquirido un gran tamaño poseyendo caracteres diferenciales á veces muy notables. Sería largo describir los de cada una de las levaduras aquí tratadas; en la última parte de este estudio se encontrarán descripciones y fotografías de algunas de ellas.

Si en vez de operar con un medio ácido lo hacemos con un medio ligeramente alcalino (1 por mil de $NaOH$), los caracteres diferenciales se transforman, acentuándose de una manera muy notable.

Los caracteres suministrados por las colonias gigantes en medio ácido y alcalino son muy útiles para la identificación de dos ó más cultivos de levaduras.

Operando en mosto ácido, he obtenido colonias de siete tipos diferentes; lo que me permite agrupar las levaduras estudiadas del modo siguiente:

| | Levaduras |
|---|---|
| 1er tipo | 1 |
| 2° — | 2 |
| 3er — | 3, 5 y 6 |
| 4° — | 4 |
| 5° — | 23 y 25 |
| 6° — | 22 |
| 7° — comprende todas las restantes. | |

Las levaduras comprendidas en el tipo 7° no forman colonias exactamente iguales; por el contrario hay diferencias bastante notables, distinguiéndose algunas por el gran número de líneas radiales y concéntricas que se distribuyen en su superficie; las primeras pueden ser muy finas ó bien tomar el aspecto de pliegues más ó menos anchos y numerosos.

*Cultivos en picadura.* — He operado en tubos de ensayo; en cada tubo distribuí unos 10 centímetros cúbicos de mosto de uvas gelatinizado. Previa esterilización y una vez frío y solidificado el medio de cultivo, practiqué las siembras en picadura.

Á los ocho días comparé los diferentes aspectos que presentan los cultivos así obtenidos.

Se observan cuatro tipos bien definidos:

1° Levadura 1; desarrollo abundante en superficie y en profundidad, licuante en superficie, en profundidad aspecto micoide.

2° Levaduras 2, 3, 4, 5 y 6; desarrollo abundante en la superficie, muy escaso en profundidad; la levadura 2 forma una colonia prominente. Las restantes están más ó menos hundidas, lo que indudablemente indica un principio de licuación de la gelatina; tanto en este ensayo como en todos los demás la levadura 4 es inconfundible, por el color rosado que presenta.

3° Levaduras 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 22, 24, 27, 28, 29 y 30; desarrollo muy abundante, tanto en superficie como en profundidad, no licúan la gelatina en ningún caso; el desarrollo en profundidad se presenta en forma de granos más ó menos grandes, dispuestos unos encima de otros; estos granos, cuyo tamaño disminuye al llegar á la extremidad inferior, pueden ser más ó menos esféricos ó afectar la forma de discos superpuestos.

Después de ocho ó diez días aparecen fallas en el medio del cultivo, debido al desprendimiento de los gases originados durante la fermentación.

4° Levaduras 23 y 25; desarrollo abundante en superficie y profundidad; la gelatina es licuada en forma de embudo alargado de paredes sinuosas.

*Cultivos en estría.* — He operado con el mismo medio de cultivo que he empleado en el ensayo anterior, pero dejando enfriar los tubos en posición casi horizontal, á fin de disponer de una gran superficie. Después de efectuar las siembras, el desarrollo se continuó á la temperatura ambiente (15-20°).

Á los diez días los cultivos eran bien aparentes y la observación fué practicada entonces.

Lo mismo que en el ensayo anterior, se distinguen netamente cuatro grupos, aunque cada uno de ellos no comprende las mismas levaduras que en aquél.

1° Levadura 1; ahueca y licúa la gelatina formando colonias separadas que se ramifican en todo sentido.

2° Levadura 2; forma una estría ancha que no licúa la gelatina, color blanco grisáceo, aspecto brillante, borde liso.

3° Levaduras 3, 4, 5, 6, 23 y 25; forman una estría ancha y profunda, producida por la licuación de la gelatina; las levaduras junto con el líquido formado corren hacia la parte inferior del tubo.

4° Constituído por todas las levaduras restantes; forman estrías anchas de borde desgranado, los granos pueden ser gruesos ó bien muy delgados, se insertan sobre la parte media y elevada de la estría. El conjunto de ésta presenta un aspecto parecido al que se da á las cadenas de montañas en los mapas en relieve. Su color es blanco mate; ninguna licúa la gelatina.

Es claro que no todas las levaduras de este grupo dan origen á estrías exactamente iguales; por el contrario, cada una se diferencia de las restantes por la altura y el tamaño de los granos; pero como puede formarse una verdadera escala entre las estrías con granos gruesos y las de granos finos, no es posible subdividir este grupo.

*Acción sobre la gelatina.* — Como hemos visto en los dos ensayos anteriores, hay un cierto número de levaduras que atacan la gelatina desde el principio de su desarrollo; otras en cambio no lo hacen ó lo hacen muy lentamente.

Después de cuatro meses he examinado nuevamente los tubos que había utilizado en los ensayos anteriores. Los tubos en que se habían efectuado cultivos en picadura presentaban la gelatina:

Licuada totalmente: levadura 1;

Licuada casi totalmente (la licuación ha progresado horizontalmente) levaduras 2, 3, 4, 5 y 6;

Licuada en su tercera parte (la licuación ha progresado en forma de embudo con la extremidad hacia abajo): levaduras 23 y 25;

Licuada muy poco ó no licuada (la observación es difícil por cuanto la gelatina presenta numerosas fallas debidas al anhídrido carbónico desprendido durante la fermentación): este grupo comprende las levaduras restantes.

La observación es más fácil en los tubos que corresponden al ensayo en estría; se forman tres grupos:

1° Licúan abundantemente: levaduras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 23 y 25;

2° Licúan ligeramente, pero lo suficiente para que el líquido formado corra hacia la parte inferior: levaduras 7, 10, 12 y 15;

3° No licúan: levaduras 8, 9, 11, 16, 17, 22, 24, 27, 28, 29 y 30.

En este último grupo algunas levaduras tienen una tendencia más

ó menos marcada á atacar la gelatina, pero ninguna llega á licuarla manifiestamente.

*Ensayo de fermentación en líquido mineral.* — He empleado el líquido de Mayer, cuya composición es la siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| Sacarosa..................... | 150.0 | gr. |
| Fosfato de potasio (monobásico)... | 5.0 | — |
| Sulfato de magnesio.............. | 5.0 | — |
| Fosfato de calcio (bibásico)....... | 0.75 | — |
| Nitrato de amonio................ | 0.75 | — |
| Agua.......................... | 1000.0 | — |
| Caldo peptonado y salado......... | 20.0 | c. c. |

En diversos matraces de 500 centímetros cúbicos coloqué 250 centímetros cúbicos de este líquido y, después de esterilizar, sembré en cada uno una pequeña cantidad de levadura.

He podido observar que este medio de cultivo es poco apropiado para las levaduras; pero, para el objeto que me proponía, podía utilizarse perfectamente. La fermentación sólo se inició después de varios días y fué sumamente lenta, á pesar de operar á 25°, temperatura muy favorable.

Después de trece días la fermentación había terminado en la mayoría de los matraces; agregué entonces á cada uno 50 centímetros cúbicos de una solución esterilizada de sacarosa al 50 por ciento, es decir, 25 gramos á cada ensayo; diez días más tarde, siendo ya muy débil la fermentación, agregué nuevamente á cada matraz 55 centímetros cúbicos de una solución de 800 gramos de azúcar disuelto en agua hasta ocupar un volumen total de 900 centímetros cúbicos, lo que corresponde á 48 gramos de sacarosa á cada ensayo.

En este momento el volumen total es de ± 355 centímetros cúbicos; la sacarosa ± 110 gramos, es decir, 31 gramos por 100 centímetros cúbicos, lo que equivale á 37 gramos de glucosa, que podrían transformarse en 17$^{gr}$8 de alcohol, ó sea, cerca de 22 por ciento de alcohol en volumen, suponiendo que el azúcar agregado fuera puro y que su transformación en alcohol se hiciera según la correspondiente ecuación química.

De este modo cada levadura podrá producir el máximum de alcohol que será capaz de soportar en esas condiciones.

Cuando la fermentación se había hecho muy perezosa aeré todos los ensayos, haciendo pasar una corriente de aire estéril y agitando fuertemente.

*(Continuará.)*

BIBLIOTECA DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

# PUBLICACIONES RECIBIDAS EN CANGE

## EXTRANJERAS

### Alemania

Zeftschrift der Gesellschaf fur Erdkunde, Berlin. — Verhandlungen des Naturhistorischen Vereins der preussischen Rhinalande-Westfalens, etc., Bonn. — Abhandlungen herausgegeben von Naturwissenschaftiichen Verein, Bremen. — Deutsche Geographische Clätter, Bremen. — Abh. der Kaiserl. Leop. Barol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Halle. — Nachrichten von der Konigl Gesellschaft der Wissenschaften, Gottingen. — Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft, Dresden. — Naturforschenden Gesellschaft, Leipzig. — Mitheilungen aus dem Naturhistorischen Museum, Hamburg. — Berichte uber die Verhandlungen der Koniglich Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig. — Mittheilungen der geographischen Gesellschaft, Hamburg. — Berichte der Naturforschenden Gesellschaft, Freiburg. — Jahres Berfchte des Naturwissenschaftlichen, Elberield. — Mathematisch Naturwissenschaftlichen Mitheilungen, Stuttgart. — Schriften der Phisikalisch — Okonomischen gesellschaft, Königsberg.

### Australia

Records of the geological Survey, Sydney.

### Austria-Hungría

Verhandlungen des naturforschen des Vereines, Brünn. — (Agram) Societe Archeologiches « Croate », Zagreb. — Annalen des K. K. Naturhistorischen of Museums, Viena. — Verhandlungen der K. K. Zoologisch Botanischen gesellschaft, Wien — Sitzungsberichte des deutschen naturwissenchaftlich Medicinischen Vereines fur-Bohmen, « Lotos » Praga. — Jarhbuch des Ungarischen Kapathen Vereines, Iglo.

### Bélgica

Acad. Royale des Sciences, des Letres et des Beaux Arts, Bruxelles. — Ann. de la Soc. Entomologique, Bruxelles. — Ann. de la Soc. Royale Malacologique, Bruxelles. — Bull. de l'Assoc. des Ing. Electriciens Institute Montefiore. — Liège.

### Brasil

Boletim da Sociedade de Geographia, Rio Janeiro. — Bol. do Museo Paraense, Pará. — Rev. do Centro de Sciencias, Letras e Artes, Campinas. — Rev. da Federacao de Estudiantes Brasileiros, Rio Janeiro. — Bol. da Agricultura, S. Paulo. — Rev. de Sciencias, Industria, Politica é Artes, Rio Janeiro. — Rev. do Museo Paulista, S. Paulo. — Bol. da Comissao Geográphica é Geologica do Estado de Minas Geraes, San Joao del Rei. — Comissao Geográphica é Geologica, San Paulo. — Bol. do Observ. Metereológico, Rio Janeiro. — Bol. do Inst. Geographico é Etnographico, Rio Janeiro. — Escola de Minas, Ouro Preto.

### Colombia

An. de Ingenieria. Soc. Colombiana de Ingenieros, Bogotá.

### Costarica

Oficina de Depósito y Cange de Publicaciones, San José. — An. del Museo Nacional San José. — An. del Inst. Físico Geográfico Nacional, — San José.

### Cuba

Universidad de la Habana, Cuba.

### Chile

Rev. de la Soc. Médica, Santiago. — El Pensamiento Latino, Santiago. — Verhandlungen des Deutschen Wissenschaftlichen Vereines, Santiago. — Actas de la Soc. Científica de Chile, Santiago. — Rev. Chilena de Hijiene, Santiago. — Ofic. Hidrográfica de la Marina de Chile, Valparaíso. — Rev. Chilena de Historia Natural, Valparaíso.

### Ecuador

Rev. de la Soc. Jurídico-Literaria, Quito. — An. de la Universidad Central del Ecuador, Quito.

### España

Bol. de la Soc. Geográfica, Madrid. — Bol. de la R. Acad. de Ciencias, Barcelona. — R. Acad. de Ciencias, Madrid. — Rev. de la Unión Ibero-Americana, Madrid. — Rev. de Obras Públicas, Madrid. — Rev. Tecnológica Industrial. Barcelona. — Rev. Industria é invenciones, Barcelona. — Rev. Arqnitectura y Construcciones, Barcelona. — Rev. Minera Metarlúrgica y de Ingeniería, Madrid. — La Fotografía, Madrid.

### Estados Unidos

Bull. of the Scientific Laboratoires of Denison University, Granville, Ohio. — Bull. of the Exxex Institute, Salem Mas. — Bull. Phi losophical Society, Washington. — Bull. of the Lloid Library of Botany, Pharmarcy and Materia Medica, Cincinati, Ohio. — Bull. of University of Montana, Missoula, Montana.— Bull. of the Minesota Academy of Natural Sciences, Minesota — Bull. of the New York Botanical Garden, New York. — Bull. of the U. S. Geological and geographical Survey of the territoires, Washington. — Bull. of the Wisconsin Natural History Society Milwankee, Wis. — Bull. of the University, Kansas. — Bull. of the American Geographical Society, New York. — Journal of the New Jersey Natural History, New Jersery, Trenton. — Journal of the Military Service Institution of the U. States. — Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society, Chapel Hill. Nord-Carolina. — « La América Científica », New York. — Librarian Augustana College, RockIslad, New York. — Memoirs of the National Academy of Sciences, Washington. — M. Zoological Garden, New York. — Proceeding of the Engineers Club, Filadelfia. — Proceeding of the Boston Society of Natural History, Boston. — Ann. Report Missouri Botanical Garden. San Luis M. O. — Ann Report of the Board of trustes of the Public Museum, Milwankee. — Association of Engineering Society, San Louis, Mas. – Ann. Report of the Bureau of Ethnology, Washington. — American Museum of Natural History, New York. — Bull. of the Museum of Comparative Zoology, Cambridge-Mas. — Bull. of the American Mathematical Society, New York. — Trasaction of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters, Madison Wis. — Trasaction of the Academ. of Sciences, San Louis. — Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, New Haven. — Transactions Kansas Academy of Sciences, Topekas, Kansas. — The Engineering Magazine, New York. — Sixtenth Annual Report of the Agricultural Experiment Station, Nebraska. — The Library American Association for the Advancement of Sciences. Care of the University, Cincinati Ohio. — N. Y. Vassar Brothers Institutes, Ponghtepsie. — Secretary Board of Commisioners Second Geological Survey of Pensylvania, Philadelphia. — The Engineering and Mining Journal. New York. — Smithsonians Institution, Washington. — U. S. Geological Survey, Washington. — The Museum of the Brooklin Institute of Arts and Sciences. — The Ohio Mechanics Institute, Cincinati — University of California Publications, Berkeley. — Proceeding of Enginneer Society of Western, Pensylvania. — Proceeding of the Davenport Academy, Jowa. — Proceeding and transaction of the Association, Meride. Conn. — Proceeding of the Portland Society of Natural History, Portlad, Maine. — Proceeding American Society Engineers, New York. — Proceeding of the Academy of Natural Sciences, Philadelphia. Proceeding of the American Philosophical Society, Philadelphia. — Proceeding of the Indiana Academy of Sciences, Indianopolis. — Proceeding of the California Academy of Science, — San Francisco. — The University of Colorado. « Studies ». Colorado.

### Filipinas

Bol. del Observ. Meteorológico. — Manila

### Francia

Bull. de la Soc. Linnennée du Nord de la France, Amiéns. — Bull. de la Soc. d'Etudes Scientfiques, Angers. — Bull de la Soc. des Ingénieurs Civils de France, Paris. — Bull. de L'Université, Toulouse. — Ann. de la Faculté des Sciences, Marseille. — Bull. de la Soc. de Géographie Commerciale, Paris. — Bull. de la Acad. des Sciences et Lettres, Montpelier. — Bull. de la Soc. de Topographie de France, Paris. — Rev. Génerale des Sciences, Paris. — Bull. de la Soc. de Géographie, Marseille. — Recueil de Médecine Vétérinaire, Alfort. — Travaux Scientifiques de l'Université, Rennes. — Bull. de la Soc. de Géographie Commerciale, Bordeaux. — Bull. de la Soc. des Sciences Naturelles et Mathematiques, Cherbourg. — Ann. des Mines, Paris. — Min. de l'Instruction Public et des Beaux Arts, Paris. — La Feuille des Jeunes Naturalistes, Paris. — Rev. Géographique Internationale. Paris. — Ann. de la Soc. Linnéenne, Lyon. — Bull. de la Soc. de Géographie Commerciale, Havre. — Bull. de la Soc. d'Etude des Sciences Naturelles, Reims.

### Holanda

Acad. R. des Sciences, Amsterdam. — Nederlandche Entomolog. Verseg, Rotterdam.

### Inglaterra

The Geological Society, London. — Minutes of Proceeding of the Institution of Civil Engineers, London. — Institution of Civil Engineers of Ireland, Dublin. — The Mineralogical Magazine Prof. W. J. Lewis M. A F. C. S. the New Museums, Cambridge. — The Geographical Journal, London. — Bristish Association for the Advancement of Science, Glasgow. — The Guaterly Journal of the Geological Society, London.

*(Concluirá en el próximo número).*

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA

# ARGENTINA

DIRECTOR : DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH

MARZO-ABRIL 1915. — ENTREGAS III-IV
TOMO LXXIX

ÍNDICE



BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS
684 — CALLE PERÚ — 684

1915

## JUNTA DIRECTIVA

| | |
|---|---|
| *Presidente* | Doctor **Francisco P. Lavalle** |
| *Vicepresidente 1º* | Ingeniero **Eduardo Huergo** |
| *Vicepresidente 2º* | Doctor **Claro C. Dassen** |
| *Secretario de actas* | Doctor **Luciano P. J. Palet** |
| *Secretario de correspondencia* | Ingeniero **Anecto J. Bosisio** |
| *Tesorero* | Ingeniero **Benno J. Schack** |
| *Protesorero* | Arquitecto **Raúl G. Pasman** |
| *Bibliotecario* | Profesor **José T. Ojeda** |
| *Vocales* | Ingeniero **Santiago E. Barabino**<br>Ingeniero **Jorge W. Dobranich**<br>Doctor **Martiniano Leguizamón Pondal**<br>Doctor **Tomás J. Rumi**<br>Ingeniero **Oronte A. Valerga**<br>Doctor **Enrique del Valle Iberlucea**<br>Ingeniero **Eduardo Volpatti**<br>Ingeniero **Alberto D. Otamendi** |
| *Gerente* | Señor **Juan Botto** |

---

## ADVERTENCIA

Los colaboradores de los *Anales*, que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos deben solicitarlo por escrito a la Dirección, la que le dará el tramite reglamentario. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con los editores señores Coni hermanos.

Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas.

Los manuscritos, correspondencia, etc., deben enviarse a la Dirección **Cevallos, 269**.

*Cada colaborador es personalmente responsable de la tesis que sustenta en sus escritos.*

La Dirección.

---

## PUNTOS Y PRECIOS DE SUBSCRIPCIÓN

**Local de la Sociedad, Cevallos 269, y principales librerías**

| | Pesos moneda nacional |
|---|---|
| Por mes | 1.00 |
| Por año | 12.00 |
| Número atrasado | 2.00 |
| — para los socios | 1.00 |

LA SUBSCRIPCIÓN SE PAGA ADELANTADA

**El local social permanece abierto de 3 á 7 y de 8 á 12 pasado meridiano**

Después de dos meses de fermentación y habiendo ésta terminado completamente, procedí al dosaje del alcohol, destilando 100 centímetros cúbicos de líquido y tomando luego la densidad del destilado á 15°

No he efectuado este ensayo con las levaduras 1, 2, 3, 4, 5 y 6, pues éstas no producen fermentación.

Los resultados obtenidos van á continuación :

| | Por ciento de alcohol en volumen |
|---|---|
| Levadura 7 | 10.5 |
| — 8 | 10.7 |
| — 9 | 10.5 |
| — 10 | 10.6 |
| — 11 | 10.3 |
| — 12 | 11.4 |
| — 15 | 10.6 |
| — 16 | 9.2 |
| — 17 | 11.0 |
| — 22 | 10.4 |
| — 23 | 0.5 |
| — 24 | 10.2 |
| — 25 | 0.4 |
| — 27 | 9.7 |
| — 28 | 10.6 |
| — 29 | 10.3 |
| — 30 | 9.3 |

Vemos, pues, observando el cuadro anterior, que es posible separar las levaduras que estudiamos, en tres grupos :

1° Las que no producen alcohol, números 1, 2, 3, 4, 5 y 6;

2° Las que en estas condiciones producen ± 0,5 por ciento de alcohol, números 23 y 25;

3° Las que en estas condiciones producen de 9,3 á 11,4 de alcohol, que son todas las restantes.

*Cultivos en medio alcalino* (0,5 ‰ NaOH). — He operado en tubos de ensayo á 25°, empleando como medio de cultivo agua de levadura adicionada de 3 por ciento de sacarosa, 2 por ciento de glucosa y 0,5 por mil de hidrato de sodio. Las cultivos fueron observados diariamente con el resultado siguiente :

Primer día : Hay desarrollo sin fermentación en los tubos 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 22, 24, 28 y 29.

Segundo día : Hay desarrollo sin fermentación en 16, 23 y 25.

Hay fermentación en 7, 8, 9, 10 (muy enérgica), 11, 12, 15, 17 (muy débil), 22 (íd.), 24 (muy enérgica), 27, 28, 29 y 30.

Tercer día : Desarrollo sin fermentación en : 1 (con velo), 2 (íd.), 3 (íd.), 4 (íd.), 5 (íd), y 6.

*Nota.* — El sexto día la fermentación ha terminado ; la levadura 6 ha formado velo. La 1 se ha desarrollado en forma de colonias ramificadas.

*Cultivos en medio alcalino* (1 °/₀₀ NaOH). — Primer día : Hay desarrollo sin fermentación en 7, 8, 10, 11, 12, 15, 17, 23, 24, 25, 27, 28, 29 y 30.

Segundo día : Aparece un velo superficial en los cultivos 23 y 25 (muy tenue).

Tercer día : Hay desarrollo en 1 (aspecto idéntico al del ensayo anterior), 2 (con velo), 3 (íd.), 4 velo unicamente, 5 (con velo) y 6.

Hay fermentación en los demás tubos. En los tubos 10, 23 y 25 el desarrollo es muy abundante, pero la fermentación es muy débil.

Al final de la fermentación la reacción es francamente ácida en todos los tubos.

*Cultivos en medio muy ácido* (20 °/₀₀ de ácido tártrico). — Medio de cultivo : agua de levadura, 3 por ciento sacarosa, 2 por ciento glucosa 20 por mil ácido tártrico. Temperatura 25°.

Primero, segundo y tercer día : No hay desarrollo.

Cuarto día : Hay fermentación en 12 (débil), 16, 27 (débil), 28, 29 (enérgica) y 30.

Quinto día : La fermentación se manifiesta en los tubos siguientes : 8 (débil), 9 (íd.), 17 (íd.), 22 (íd.) y 25.

Sexto día : Aparece la fermentación en 7, 10, 11, 15 y 24.

Décimo día : Habiendo terminado la fermentación en todos los cultivos en que se ha manifestado, se observa que la levadura 25 forma velo y se desarrolla abundantemente, mientras que la 23, que es también un *Saccharomyces apiculatus,* no forma velo y su desarrollo es casi nulo.

*Cultivos á 37°.* — Medio de cultivo : agua de levadura, 3 por ciento sacarosa, 2 por ciento glucosa.

La fermentación se manifiesta desde el primer día, salvo en los cultivos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 23 y 25. Es relativamente débil, excepto en el tubo correspondiente á la levadura 28 que fermenta tan activamente como á 25°.

*Cultivos á 39°.* — Medio de cultivo : el mismo que en el ensayo anterior.

Primer día : Desarrollo abundante ; fermentación franca en 7**, 8**,

9**, 10**, 11**, 12*, 15***, 17**, 22*, 24**, 27**, 28***, 29*** y 30***.

Los signos * indican la mayor ó menor actividad de la fermentación. Este ensayo y los siguientes no se han efectuado para las levaduras 1 á 6, 23 y 25, por haber sido negativo el cultivo á 37°.

Colocados los tubos en la estufa á 28°, la fermentación ha continuado activamente en todos, salvo en el 16 donde no hubo desarrollo.

*Cultivos á 41°*. — Medio de cultivo: el mismo que en los dos ensayos anteriores.

Primer día: Hay desarrollo en 7, 15 y 28.

Segundo día: El desarrollo se manifiesta también en los cultivos 9, 17 y 29.

Tercero y cuarto día: Lo mismo que el segundo día.

Habiendo colocado los cultivos en la estufa á 28° he observado lo siguiente:

Primer día: Hay fermentación en 7, 15, 17, 22, 28 y 29. Los demás han quedado en el mismo estado, durante todo el período de la observación.

*Cultivos á 42°*. — Medio de cultivo: el mismo que en los tres ensayos anteriores.

Primero y segundo día: Hay desarrollo en 7, 9, 15, 17 y 28 (muy débil).

Los cultivos fueron llevados á la estufa á 28°.

Primer día: Fermentación muy débil en el cultivo 7; aparece un ligero desarrollo en el 29.

Segundo día: Fermentación franca en 7, 9, 15, 17 (muy activa) y 28. Se acentúa el desarrollo en la levadura 29.

*Caracteres de fermentación de los azúcares.* — Aunque no haya utilizado este dato para la identificación, creo conveniente consignar aquí el modo operatorio, por cuanto he efectuado esta determinación para completar el estudio de las tres razas con las cuales he proseguido mi trabajo

Cuando se dispone de una cantidad suficiente del azúcar con el cual se desea operar, puede efectuarse el ensayo con una solución al 5 ó 10 por ciento en agua de levadura. Pero cuando se trata de productos raros ó caros como la manosa ó la gulosa, se emplea el método de Lindner, que consiste en colocar una gota de agua de levadura, conteniendo una dilución de gérmenes, en una cámara húmeda; se agrega, con un alambre de platino, una pequeña cantidad del azúcar que se desea examinar, previamente pulverizado; se cubre con un cubreobjeto bordeado con vaselina y se coloca en la estufa á 25°.

Al día siguiente se examina la preparación. Si se ha producido una fermentación, el cubreobjeto se encuentra algo levantado, habiéndose derramado una parte del líquido que llenaba la célula y encontrándose en ésta una gran burbuja de gas.

Puede comprobarse que este gas es anhídrido carbónico, dejando caer sobre los bordes del cubreobjeto unas gotas de hidrato de potasio. La burbuja de gas se encoge inmediatamente y desaparece.

*Resumen.* — Con estos datos podemos identificar las levaduras pertenecientes á una misma especie ó raza y diferenciar al mismo tiempo las distintas especies ó razas.

Creo lógico agrupar las distintas levaduras aquí tratadas, del siguiente modo :

Primer grupo : levadura 1 (1) ;

Segundo grupo : levadura 2 ;

Tercer grupo : levaduras 3, 5, y 6 ;

Cuarto grupo : levadura 4, *Torula* sp ;

Quinto grupo : levaduras 23 y 25, *Saccharomyces apiculatus ;*

Sexto grupo : levadura 22, *Saccharomyces ellipsoideus ;*

Séptimo grupo : levaduras 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 24, 27, 28, 29 y 30, *Saccharomyces ellipsoideus.*

Ahora bien, de los diversos ensayos practicados se deduce inmediatamente que no todas las levaduras colocadas en un mismo grupo son idénticas ; por el contrario en cada grupo se encuentran variaciones individuales.

En el séptimo grupo es donde las variaciones individuales son más apreciables. Cualquier carácter que tomemos para identificarlas, no nos dará una concordancia absoluta entre los diferentes cultivos, sino toda una graduación de caracteres, lo que nos autoriza á considerar todos los cultivos de este grupo como pertenecientes á una misma raza, que por ser la más abundante y la que casi exclusivamente se encuentra en los vinos y borras de la región de origen, podríamos llamar raza de Mendoza.

(1) No he determinado la especie ó el género de las levaduras que constituyen los tres primeros grupos ; pues como no originan la fermentación alcohólica, no nos interesan en este caso.

## PRINCIPALES CARACTERES DE LAS LEVADURAS 12, 22 Y 28

Practicada la identificación y diferenciación de los distintos cultivos, con el resultado expuesto anteriormente, resolví estudiar más detenidamente tres de ellos, los que presentaban en mayor grado un carácter útil. La levadura 12, por el elevado grado alcohólico que originó en el ensayo de fermentación en líquido de Mayer (más adelante se verá que, de las tres levaduras aquí estudiadas, es la 28 la que, en un mosto natural que contenga mucho azúcar, origina más alcohol); la levadura 22, por poseer la curiosa propiedad de aglutinarse enérgicamente, circunstancia muy útil en vinificación por disminuir considerablemente el número de trasiegos necesarios para obtener un vino límpido; y finalmente la levadura 28, por ser la más resistente á las temperaturas elevadas (véase el capítulo anterior, pág. 118 á 120).

En este capítulo reuniré los caracteres principales de estas levaduras.

### *Levadura 12*

*Caracteres morfológicos.* — Células elipsoidales, algunas veces esféricas; dimensiones: 4,5 á 10 μ de largo por 4,5 á 7 μ de ancho. La fotografía adjunta (fig. 1) (1) representa células procedentes de un cultivo de 24 horas.

*Esporos.* — Operando en las condiciones fijadas anteriormente (pág. 105), un cierto número de células esporulan; al cabo de 24 horas á 25° pueden observarse esporos bien formados. Cada célula contiene de uno á cuatro esporos, siendo muy raro observar una célula que contenga este último número de esporos; las más comunes son las de dos y tres esporos. Éstos son esféricos, de superficie lisa, como corresponde á la especie, y de un diámetro de 2,3 á 3,6 μ (fig. 2).

*Caracteres del depósito.* — Color blanco sucio, aspecto pastoso; al agitar el medio de cultivo se pone fácilmente en suspensión.

*Colonias en placas.* — Filiformes, muy elevadas, color blanquizco, aspecto mate, bordes regulares (fig. 3).

*Cultivos en estría.* — Estría ancha muy prominente en el centro. Color y aspecto idéntico al de las colonias en placas, borde aserrado; no se observan líneas longitudinales (fig. 4).

(1) Agradezco al señor Raúl Coni, el haber efectuado las fotografías que acompañan este trabajo.

*Colonias gigantes en mosto ácido.* — Colonias prominentes con bordes lobulados hundidos en la gelatina, aspecto ceroso; el conjunto de la colonia presenta la apariencia de un pequeño volcán. Existen

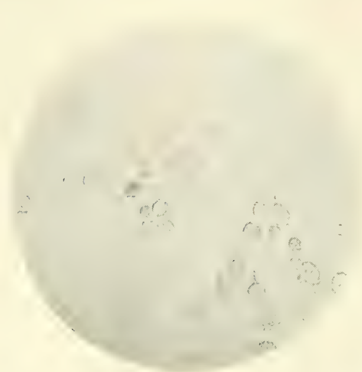


Fig. 1

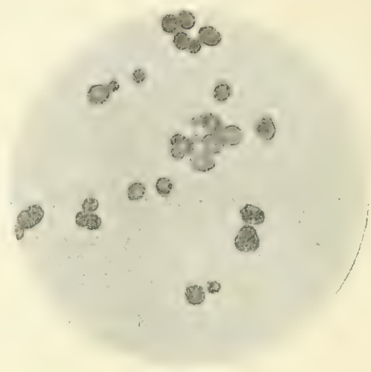


Fig. 2

finísimas estrías que partiendo del cráter terminan en la periferia.

Á una distancia media entre el centro y los bordes existe un segundo borde de aspecto seco. La fotografía de la figura 5 dará una idea más perfecta que cualquier descripción minuciosa.



Fig. 3

*Colonias gigantes en mosto alcalino.* — Se caracterizan por la aparición de numerosos círculos concéntricos que dan á la colonia un aspecto muy bonito (fig. 5).

*Examen de las células de las colonias gigantes.* — En el cráter de la

colonia las células son esféricas ó ligeramente elípticas, tienen un protoplasma granuloso y muchas poseen esporos.

En la periferia : células redondas elípticas y alargadas, tamaño muy variable, protoplasma hialino ó granuloso. En la parte de abajo : células en general muy alargadas (5 á 6 veces el ancho) con varios vacuolos y con protoplasma homogéneo.

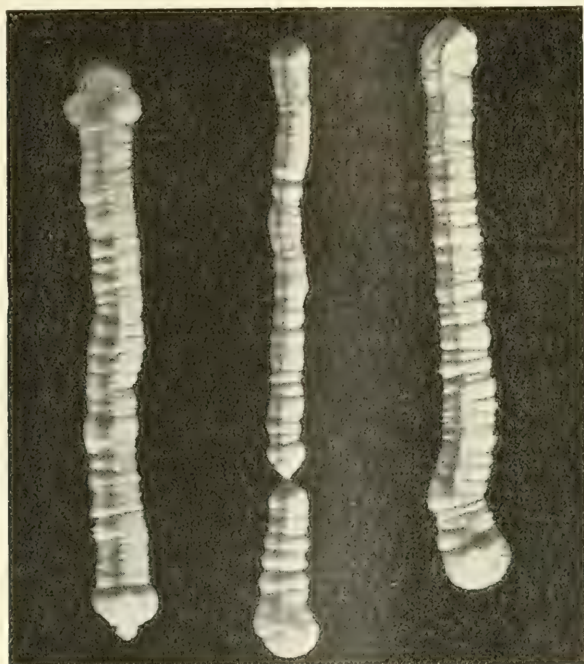


Fig. 4

*Acción sobre la gelatina.* — Esta levadura ataca ligeramente la gelatina (véase el capítulo anterior, pág. 111).

*Caracteres de fermentación de los hidratos de carbono.* — Esta levadura origina la fermentación alcohólica de los siguientes hidratos de carbono : dextrosa, levulosa, manosa, galactosa, sacarosa, maltosa y rafinosa (de esta última solamente $^1/_3$); no tiene acción alguna sobre la lactosa, la melibiosa y la dextrina, pero éstos pueden ser utilizados como alimentos, pues las levaduras se reproducen en los medios de cultivos que no contengan más que estos hidratos de carbono.

### *Levadura 22*

Los caracteres morfológicos, los de las colonias en placas y los caracteres de fermentación de los azúcares son los mismos que los de la levadura 12.

*Aspecto del depósito.* — Como he dicho anteriormente (pág. 107), esta levadura se caracteriza por la enérgica aglutinación de sus células. En la suposición de que esta propiedad fuera debida al desarrollo de una autoaglutinina, he efectuado algunos ensayos : terminada la fermentación, al líquido filtrado por bujía le he agregado una emulsión de otra levadura ; no hubo ninguna aglutinación. Á una nueva porción añadí una cierta cantidad de azúcar y una pequeña cantidad de otra levadura ; la fermentación se efectuó normalmente sin aglutinación. Á otro ensayo agregué azúcar y sembré en él una pequeña cantidad de la misma levadura 22 ; la aglutinación no fué mayor.

Estas rápidas experiencias deben hacernos abandonar la hipótesis de una autoaglutinina. Se trata seguramente de una propiedad específica de la célula misma ó de su membrana.

*Esporos.* — Cada célula de las esporuladas contiene uno ó dos esporos ; es sumamente raro encontrar células con tres esporos. Miden éstos 3,1 á 3,9 $\mu$.

*Cultivos en estría.* — Estría no muy ancha, borde lobulado, no se observan líneas longitudinales (fig. 4).

*Colonias gigantes en mosto ácido y alcalino.* — Son también prominentes y con los bordes lobulados, hundidos en la gelatina ; en mosto ácido los círculos concéntricos son visibles solamente con una iluminación oblicua ; en mosto alcalino las colonias no poseen ningún círculo concéntrico y su tamaño es mucho más reducido que en mosto ácido. En ambos casos se observan numerosas y finas estrías radiales (fig. 7 y 8).

De 30 á 35 por ciento de las células provenientes del cráter de la colonia desarrollada en mosto alcalino están esporuladas ; muchas tienen cinco y seis esporos pequeños y de tamaño desigual.

### *Levadura 28*

Las propiedades morfológicas y fisiológicas de esta levadura son las mismas que la de la levadura 12 (se comprende que así sea, pues

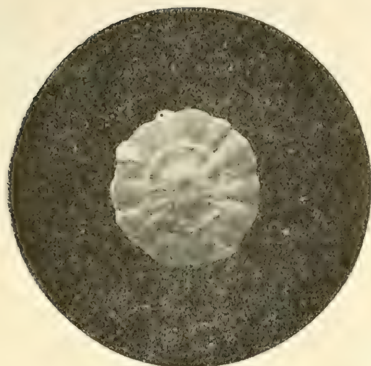


Fig. 5



Fig. 6

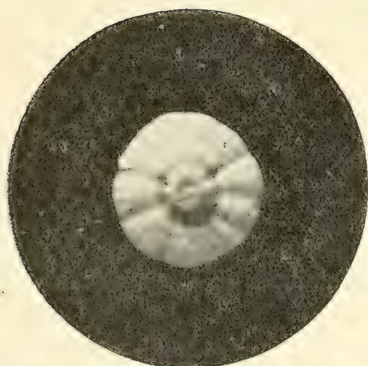


Fig. 7



Fig. 8

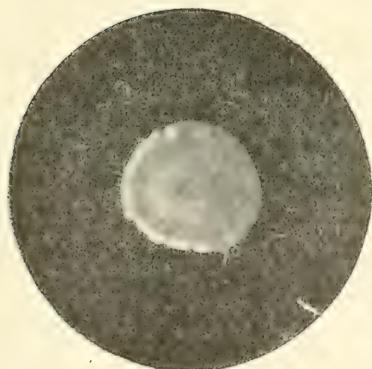


Fig. 9



Fig. 10

pertenecen á la misma raza; véase el resumen del capítulo anterior). Sin embargo existen algunas pequeñas diferencias. Esta levadura parece más activa, su mayor resistencia á las temperaturas elevadas la hace más apta para la vinificación en las condiciones de Mendoza; á esto se une un grado alcohólico más elevado del vino producido (véase el capítulo siguiente).

Entre sus caracteres de cultivo debe señalarse que los cultivos en estría presentan líneas longitudinales bien marcadas (fig. 4).

Por lo tanto las levaduras 12, 22 y 28 se diferencian principalmente:

1° Por el aspecto del depósito;

2° Por el número y el tamaño de sus esporos;

3° Por las características de sus colonias gigantes en mosto ácido y alcalino;

4° Por las características de sus cultivos en estría;

5° Por la mayor ó menor actividad á las temperaturas elevadas (38°);

6° Por la facultad de licuar la gelatina.

## DETERMINACIÓN DE LA ACTIVIDAD

La determinación de la actividad de una levadura puede hacerse por varios métodos; uno de ellos, indudablemente el más rápido y el más sencillo, es el de la atenuación.

Por atenuación se entiende la diminución de densidad que se produce en un mosto por la eliminación del azúcar durante el curso de la fermentación. Se llama atenuación aparente la que se observa directamente, determinando la densidad del líquido fermentado ó en fermentación: pero es preciso recordar que la diminución observada en la densidad, no se debe únicamente á la desaparición del azúcar del mosto, sino también al alcohol originado á expensas de este azúcar. Por consiguiente, si tomamos la densidad del líquido fermentado, privándolo del alcohol por ebullición, conociendo la densidad primitiva del mosto á la misma temperatura, tendremos los elementos necesarios para calcular la atenuación real.

Por otra parte, teniendo en cuenta que la diminución de densidad, originada en el vino por el alcohol, es la misma que en el agua, podemos también, conociendo la cantidad de alcohol, la densidad primitiva del mosto y la del vino fabricado, calcular la atenuación real.

Este método muy empleado para determinar la actividad de las leva-

duras de cerveza, lo es poco para las levaduras de vino; sin embargo lo he utilizado conjuntamente con el procedimiento siguiente, que es más exacto, pero también más delicado; es un método exclusivamente de laboratorio, mientras que el de la atenuación es más bien un método industrial.

El aparato (fig. 11) consta de un vaso de Erlenmeyer, de unos 400 centímetros cúbicos, tapado por un tapón de corcho (1) atravesado por dos tubos obturados á sus salidas con un poco de algodón, uno de

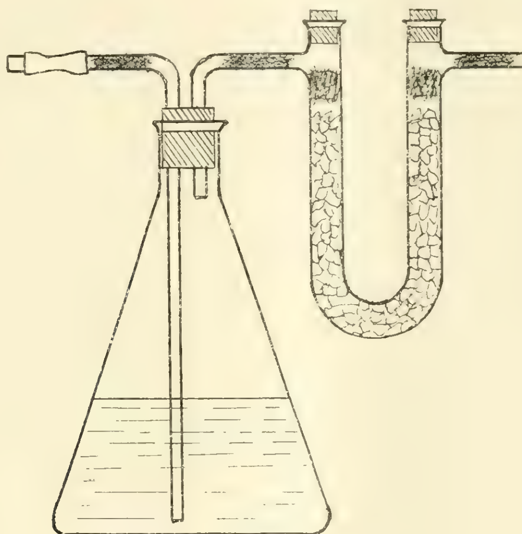


Fig. 11

los cuales llega hasta el fondo del recipiente y se cierra exteriormente con un pedazo de tubo de goma y un fragmento de varilla de vidrio; el otro, que termina cerca de la parte interna del tapón, está soldado exteriormente con una de las ramas laterales de un tubo en U lleno de piedra pómez embebida en ácido sulfúrico; los cuellos del tubo en U se tapan también con tapones de corcho, interponiendo entre éstos y la piedra pomez una cierta cantidad de algodón de vidrio; la otra rama lateral del tubo en U comunica con la atmósfera, pero se coloca en su interior un poco de algodón para disminuir la absorción de una pequeña cantidad de vapor de agua de la atmósfera por el ácido sul-

(1) Como el aparato deberá ser esterilizado por el calor seco á 160°, no es posible emplear tapones de goma, pues esta substancia es destruída á esa temperatura.

fúrico (hubiera sido más conveniente terminar el aparato con un tubo de goma formando válvula neumática).

Este aparato se esteriliza vacío en el horno Pasteur á 160°, luego se coloca la piedra pomez embebida en ácido sulfúrico, el cierre del tubo lateral, y se pesa.

Finalmente se vierten en el vaso de Erlenmeyer unos 250 centímetros cúbicos de mosto de uvas y 1 centímetro cúbico de un cultivo de la levadura por estudiar, se pesa nuevamente y se coloca en la estufa á la temperatura deseada.

Los aparatos así preparados se pesan diariamente para determinar la cantidad de anhídrido carbónico, producida en cada día. Cuando esta cantidad es pequeña (< de 2 gr.), se hace pasar por el aparato, antes de cada pesada, una corriente de aire, que arrastra el $CO_2$, al mismo tiempo que aumenta la actividad de las células.

Finalmente, después de treinta ó cuarenta días, cuando la fermentación ha terminado, se analizan los vinos así obtenidos, determinando, la cantidad de alcohol y el azúcar residual.

Operando de este modo, he efectuado tres series de ensayos: la primera á 25° con mosto de uva natural; la segunda á la misma temperatura, pero agregando 25 gramos de sacarosa pura á cada ensayo, que después de hidrolizarse por la invertina de la levadura, se transformarán en $26^{gr}316$ de azúcar invertida; y la tercera serie también con mosto natural, pero operando á la temperatura de 36°.

El mosto empleado proveniente de uvas de Mendoza tenía la siguiente composición:

| | En 100 gramos de mosto | En 100 centímetros cúbicos |
|---|---|---|
| Densidad á 15° | 1.0970 | » |
| Acidez en $SO_4H_2$ | 0.297 gr. | 0.326 gr. |
| Azúcar invertida | 20.291 — | 22.26 — |
| Extrato á 105° | 21.723 — | 23.82 — |
| Extracto sin azúcar | 1.422 — | 1.56 — |
| Materias minerales | 0.349 — | 0.383 — |

Los resultados de estos ensayos pueden verse en los siguientes cuadros de fermentación:

*Ensayo de fermentación á 25° en mosto natural*

| | Levadura 12 | Levadura 22 | Levadura 28 |
|---|---|---|---|
| Cantidad de mosto (1) | 276.327 gr. | 275.948 gr. | 275.721 gr. |
| Volumen del mismo | 251.9 c. c. | 251.6 c. c. | 251.3 c. c. |
| $CO_2$ desprendido el 1er día | 2.157 gr. | 1.802 gr. | 2.562 gr. |
| — 2º día | 12.203 — | 10.210 — | 10.996 — |
| — 3er día | 6.280 | 5.361 — | 6.082 — |
| — 4º día | 2.994 — | 3.232 — | 3.290 — |
| - 5º día | 1.398 — | 2.075 — | 1.677 — |
| — 6º día | 0.947 — | 1.653 — | 1.198 — |
| — 7º día | 0.344 — | 0.914 — | 0.535 — |
| — 8º día | 0.157 — | 0.480 — | 0.281 — |
| — 9º día | 0.073 — | 0.280 — | 0.136 — |
| — del 10º al 12º día | 0.137 — | 0.505 — | 0.195 — |
| — del 13º al 19º día | 0.030 — | 0.503 — | 0.061 — |
| — del 20º al 35º día | » | 0.054 — | » |
| $CO_2$ total | 27.020 — | 27.069 — | 27.013 — |
| $CO_2$ producido por 100 gramos mosto. | 9.77 — | 9.80 — | 9.79 — |
| $CO_2$ producido por 100 gramos de azúcar transformado | 18.42 — | 48.52 — | 18.72 — |
| Grado alcohólico del vino obtenido en volumen | 13.81 — | 13.81 — | 13.62 — |
| Grado alcohólico del vino obtenido en peso | 10.96 — | 10.96 — | 10.81 — |
| Azúcar residual | 0.272 — | 0.226 — | 0.497 — |

*Ensayo de fermentación á 25° en mosto natural + 10 por ciento de sacarosa*

| | Levadura 12 | Levadura 22 | Levadura 28 |
|---|---|---|---|
| Cantidad de mosto (2) | 300.637 gr. | 301.158 gr. | 300.354 gr. |
| Volumen del mismo | 267.00 c. c. | 267.47 c. c | 266.73 c. c. |
| Azúcar total (3) | 82.245 gr. | 82.351 gr. | 82.188 gr. |
| $CO_2$ desprendido el 1er día | 1.690 — | 1.513 — | 1.660 — |
| — 2º día | 11.952 — | 11.447 — | 10.402 — |
| — 3er día | 7.421 — | 5.423 — | 6.198 — |
| — 4º día | 3.760 — | 3.317 — | 3.728 — |
| — 5º día | 2.037 — | 2.051 — | 2.237 — |
| — 6º día | 1.191 — | 1.777 — | 1.987 — |
| — 7º día | 0.800 — | 1.215 — | 1.280 — |

(1) Inclusive 1 centímetro cúbico de pie de cuba.

(2) Inclusive 1 centímetro cúbico de pie de cuba y 25 gramos de sacarosa.

(3) Calculada en azúcar invertida.

| | Levadura 12 | Levadura 22 | Levadura 28 |
|---|---|---|---|
| $CO_2$ desprendido el 8° día.......... | 0.477 — | 0.877 — | 0.839 — |
| — 9° día.......... | 0.301 — | 0.510 — | 0.549 — |
| — del 10° al 12° día.... | 0.469 — | 1.165 — | 1.073 — |
| — del 13° al 19° día.... | 0.222 — | 0.861 — | 1.107 — |
| — del 20° al 35° día.... | » | 0.129 — | 0.163 — |
| $CO_2$ total.......................... | 30.620 — | 30.315 — | 31.223 — |
| $CO_2$ producido por 100 gramos mosto. | 10.18 — | 10.06 — | 10.39 — |
| $CO_2$ producido por 100 gramos de azúcar transformado................ | 46.72 — | 47.90 — | 47.66 — |
| Grado alcohólico del vino obtenido en volumen..................... | 14.48 — | 14.29 — | 14.87 — |
| Grado alcohólico del vino obtenido en peso......................... | 11.49 — | 11.34 — | 11.80 — |
| Azúcar residual (1)................ | 16.70 — | 19.07 — | 16.68 — |

*Ensayo de fermentación á 36° en mosto natural* (2)

| | Levadura 12 | Levadura 22 | Levadura 28 |
|---|---|---|---|
| Cantidad de mosto................ | 276.568 gr. | 275.162 gr. | 278.335 gr. |
| Volumen del mismo................ | 252.11 c. c. | 250.83 c. c. | 253.72 c. c. |
| Azúcar total...................... | 56.120 gr. | 55.835 gr. | 56.478 gr. |
| $CO_2$ desprendido el 1er día......... | 3.182 — | 2.432 — | 3.924 — |
| — 2° día.......... | 15.279 — | 12.564 — | 11.706 — |
| — 3er día......... | 4.422 — | 4.044 — | 5.405 — |
| — 4° día.......... | 0.470 — | 1.366 — | 2.161 — |
| — 5° día.......... | 0.302 — | 0.840 — | 0.931 — |
| — del 6° al 7° día...... | 0.113 — | 0.400 — | 0.374 — |
| — del 8° al 10° día..... | 0.049 — | 0.276 — | 0.167 — |
| — del 11° al 12° día.... | 0.044 — | 0.067 — | 0.036 — |
| $CO_2$ total.......................... | 23.861 — | 21.989 — | 24.704 — |
| $CO_2$ producido por 100 gramos mosto. | 8.62 — | 7.99 — | 8.87 — |
| $CO_2$ producido por 100 gramos de azúcar transformado................ | 50.40 — | 49.32 — | 50.85 — |
| Grado alcohólico del vino obtenido en volumen..................... | 11.13 — | 10.61 — | 12.05 — |
| Grado alcohólico del vino obtenido en peso......................... | 8.84 — | 8.42 — | 9.56 — |
| Azúcar residual.................... | 8.778 — | 11.252 — | 7.896 — |

Los diagramas que se encuentran á continuación, representan grá-

(1) Calculado en azúcar invertido.

(2) Terminada la fermentación á 36°, los ensayos se colocaron en la estufa á 25°, pero no hubo un nuevo desprendimiento de $CO_2$; lo que demuestra que la acción nociva de la temperatura persiste aún después de haber colocado las levaduras en condiciones más favorables.

ficamente la marcha de la fermentación de las levaduras estudiadas, en las condiciones fijadas.

Observando los cuadros anteriores, podemos deducir lo siguiente:

En los ensayos á 25° en mosto natural se ha manifestado una fermentación normal; la casi totalidad del azúcar ha desaparecido, dando origen á vinos secos con 13,8 á 13,6 por ciento de alcohol. Vinos que

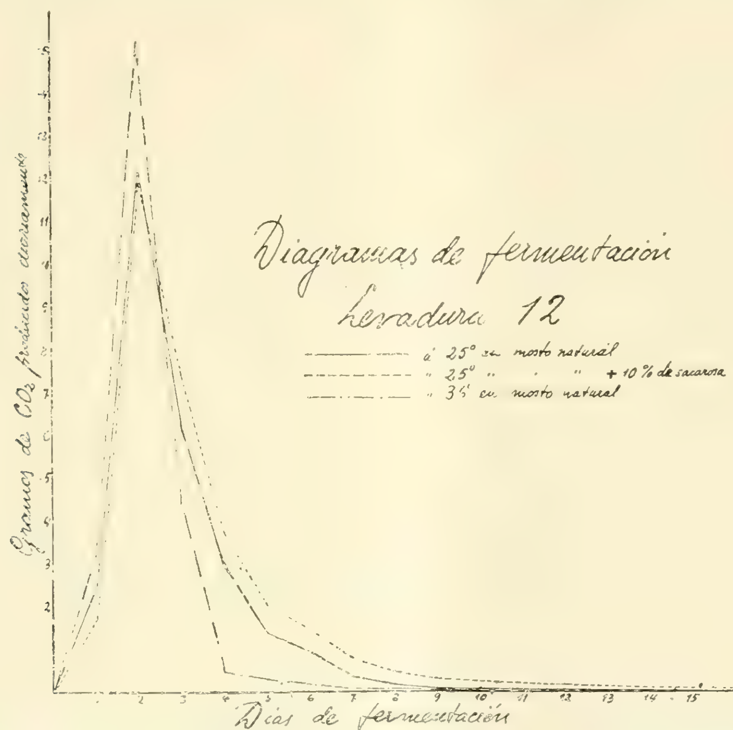



Fig. 12

por lo tanto se encuentran en excelentes condiciones para conservarse sanos. Esta elevada graduación alcohólica, obtenida con mosto de uvas de Mendoza, se observa muy difícilmente en los vinos de esa provincia, fabricados con mosto no adicionado de azúcar, lo que viene á comprobar lo que he dicho anteriormente sobre la superioridad de las levaduras puras seleccionadas.

La cantidad de anhídrido carbónico (48,42 á 48,72), originada por 100 gramos de azúcar, es ligeramente inferior á la cantidad teórica (48,86).

Examinando los diagramas (línea llena), vemos que la marcha de la fermentación ha sido perfectamente regular, sin inflexiones pronunciadas en la parte descendente de la curva, y que la fermentación secundaria ha sido nula ó casi nula (salvo para la levadura 22), pues casi todo el azúcar ya había desaparecido al terminar la fermentación principal.

En los ensayos á 25° en mosto adicionado de 10 por ciento de

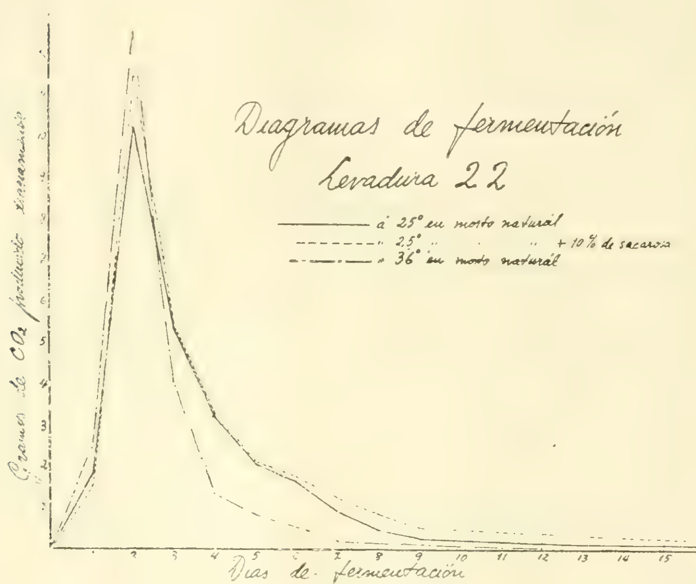



Fig. 13

sacarosa la fermentación ha sido también perfectamente normal, pero la cantidad de anhídrido carbónico (46,72 á 47,90), originada por 100 gramos de azúcar, es aún más inferior á la cantidad teórica que en el ensayo anterior.

Los vinos obtenidos tienen de 14,29 á 14,87 por ciento de alcohol, lo que garantiza suficientemente la buena conservación del vino, á pesar de contener aún una cantidad exagerada de azúcar, 6,25, 7,13 y 6,25 por ciento respectivamente para los vinos fermentados con las levaduras 12, 22 y 28.

En la práctica podría llegarse fácilmente con esta levadura á producir vinos con más de 15 por ciento de alcohol, pues es necesario recordar que, como por las exigencias mismas del ensayo he aereado

repetidas veces los mostos al final de la fermentación, se ha perdido forzosamente una pequeña cantidad de alcohol.

Los diagramas (líneas de puntos) indican que la fermentación ha sido también muy regular, habiendo tomado gran importancia la fermentación secundaria.

Vemos, pues, que la elevada concentración del mosto (32 % de azúcar) no ha molestado absolutamente á las levaduras.

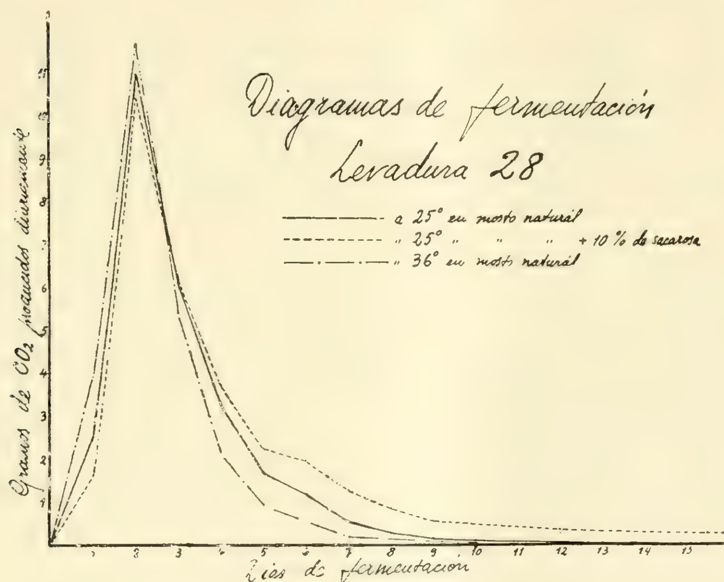



Fig. 14

Los ensayos efectuados á 36° han puesto de manifiesto la acción nociva de una temperatura tan elevada; sin embargo, los vinos obtenidos están aún en buenas condiciones de conservación, especialmente el vino fermentado con la levadura 12. Sus graduaciones alcohólicas son: 11,13, 10,61 y 12,05; y el azúcar restante es: 3,48, 4,48 y 3,11 por ciento respectivamente para las levaduras 12, 22 y 28.

La cantidad $CO_2$ producida por 100 gramos de azúcar es en este caso notablemente superior á la cantidad teórica (1).

(1) Esta discrepancia no debe sorprendernos; es preciso tener en cuenta que, encóntrandose la levadura en condiciones desfavorables, aumenta la cantidad de substancias de desasimilación, pudiendo así hacer variar la cantidad de $CO_2$ que

Por los diagramas (líneas de rayas y puntos) vemos que la fermentación se ha proseguido de un modo normal, aunque, debido á la elevada temperatura, la acción nociva del alcohol se ha ejercido más pronto, deteniendo la fermentación antes que todo el azúcar hubiera desaparecido. La influencia de la temperatura se manifiesta principalmente para la levadura 12, cuya curva, exageradamente elevada al segundo día, baja rápidamente presentando una inflexión muy marcada al cuarto día, terminando con esto la fermentación principal.

Como he dicho más arriba, he efectuado, conjuntamente con los ensayos anteriores y en las mismas condiciones, ensayos de atenuación; en el siguiente cuadro se encuentran los resultados obtenidos. Las densidades fueron determinadas á 24°, por serme más cómodo operar á esa temperatura, pero por la definicion misma de atenuación se comprende que es indiferente operar á cualquier temperatura.

se desprendería, si todo el azúcar desaparecido se transformara en alcohol y anhídrido carbónico. Recordemos también las palabras de Pasteur *(Études sur la bière)*: « La ecuación de una fermentación es esencialmente variable con las condiciones en las cuales ha tenido lugar... Cada fermentación tiene una ecuación que puede indicarse de un modo general, pero que en el detalle depende de las miles de variaciones que implican los fenómenos de la vida. »

Por otra parte es indudable que una cierta cantidad de alcohol ha sido arrastrada por el $CO_2$ y contada como tal, lo que unido á una mayor cantidad de aldehida producida y eliminada y, por consiguiente, contada también como anhídrido carbónico, puede explicar fácilmente el exceso de esta substancia en estos ensayos.

CUADRO DE ATENUACIÓN

| Número de la levadura | Á 25° en mosto natural | | | Á 25° en mosto + sacarosa | | | Á 36° en mosto natural | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 22 | 28 | 12 | 22 | 28 | 12 | 22 | 28 |
| Densidad primitiva del mosto | 1.096 | 1.096 | 1.096 | 1.125 | 1.125 | 1.125 | 1.096 | 1.096 | 1.096 |
| Densidad el 1^er^ día | 1.086 | 1.095 | 1.088 | 1.121 | 1.124 | 1.118 | 1.083 | 1·090 | 1.083 |
| — 2º día | 1.036 | 1.045 | 1.035 | 1.076 | 1.080 | 1.073 | 1.027 | 1.041 | 1.029 |
| — 3er día | 1.004 | 1.023 | 1.010 | 1.042 | 1.058 | 1.046 | 1.001 | 1.017 | 1.006 |
| — 4º día | 0.997 | 1.008 | 0.998 | 1.027 | 1.042 | 1.032 | 0.997 | 1.010 | 0.998 |
| — 5º día | 0.996 | 0.999 | 0.991 | 1.017 | 1.030 | 1.023 | 0.995 | 1.006 | 0.994 |
| — 6º día | 0.990 | 0.994 | 0.990 | 1.012 | 1.024 | 1.013 | » | » | » |
| — 7º día | » | 0.993 | » | 1.010 | 1.021 | » | » | » | » |
| — del vino | 0.989 | 0.989 | 0.990 | 1.016 | 1.017 | 1.013 | 1.007 | 1.012 | 1.002 |
| — del vino privado del alcohol | 1.008 | 1.006 | 1.008 | 1.034 | 1.035 | 1.032 | 1.021 | 1.026 | 1.017 |
| Grado de atenuación aparente | 107° | 107° | 106° | 109° | 108 | 112° | 89° | 84° | 94° |
| Grado de atenuación real | 88° | 90° | 88° | 91° | 90° | 93° | 75° | 70° | 79° |

En el cuadro anterior observamos que en la generalidad de los casos la densidad pasa por un mínimo, para luego ser mayor que este mínimo en el vino ya fabricado.

Este hecho, que á primera vista parece paradojal, se explica muy fácilmente, recordando que, durante la fermentación, el mosto se encuentra saturado de anhídrido carbónico, lo que disminuye mucho su densidad; en cambio, en el vino, dicho gas ha sido eliminado naturalmente y por lo tanto la densidad observada es la verdadera.

Vemos, pues, examinando el cuadro anterior, que es también posible tener una idea de la actividad de una levadura por medio de la atenuación.

Por otra parte, conociendo, como en el caso presente, la atenuación de una levadura, es posible en la práctica tener una idea de la marcha de la fermentación, por la simple determinación de la densidad primitiva del mosto y la del mosto en fermentación, privado de un anhídrido carbónico ó de su $CO_2$ y de su alcohol; método que indudablemente es mucho más rápido que la determinación del azúcar residual, empleado por muchos industriales.

## CONCLUSIONES

Voy á indicar aquí únicamente las principales conclusiones que se desprenden de este trabajo:

1ª Sobre la uva y en los vinos de Mendoza se encuentran varias razas de levaduras, algunas de las cuales son incapaces de provocar la fermentación alcohólica.

2ª Existen dos razas activas de *Saccharomyces ellipsoideus,* que por otra parte son bastante semejantes en sus caracteres fisiológicos; las mayores diferencias se observan en sus caracteres de cultivos.

3ª Una de estas razas, la levadura 22, posee la notable propiedad de aglutinarse enérgicamente, lo que representa una gran ventaja en la práctica de la vinificación, permitiendo disminuir considerablemente el número de trasiegos y hasta eliminar la filtración ó el colaje.

4ª La otra raza, que es la más abundante y la más activa, presenta numerosas variaciones individuales en sus cultivos.

5ª Uno de estos cultivos, la levadura 28, se distingue principalmente por su gran resistencia á las temperaturas elevadas y por el alto grado alcohólico de los vinos obtenidos.

6ª Las levaduras de Mendoza pueden producir vinos cuyo grado alcohólico llega á 15 por ciento de alcohol en volumen.

7ª Una adición aun muy exagerada de azúcar á los mostos no molesta mayormente á estas levaduras.

8ª Aun operando á una temperatura muy elevada (36°) mantenida durante todo el transcurso de la fermentación, pueden obtenerse con ellas vinos de buena conservación (12 % de alcohol); pero es preferible que la temperatura de fermentación sea algo más baja.

9ª Estas levaduras son mucho más activas, tanto por la rapidez de la fermentación, por la resistencia á las altas temperaturns, al alcohol y al azúcar en exceso, que las levaduras de Montevideo y de Sayago estudiadas por Vande Venne (1).

10ª El *Saccharomyces apiculatus* de Mendoza se distingue principalmente de las diferentes razas europeas, por la facilidad con que licúa la gelatina.

Laboratorio de microbiología de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, marzo-diciembre de 1914.

## OBRAS CONSULTADAS

Comisión Nacional, *Informe presentado al ministerio de Agricultura por la Investigación vinícola*, 1903. *Anales del ministerio de Agricultura.*

Dop et Gautié, *Manuel de technique botanique.*

Duclaux, *Traité de microbiologie.*

Guilliermond. *Les levures.*

Guilliermond, *Recherches cytologiques sur les levures.* Thèse.

Harden, *La fermentation alcoolique.*

Jacquemin, *Production rationnelle et conservation des vins.*

Kayser, *Les levures.*

Kayser, *Microbiologie agricole.*

Laurent, *Recherches physiologiques sur les levures* (extrait des *Annales de la Société belge de microscopie. Mémoires*, tome XIV, 1890).

Lindner, *Atlas der mikroskopischen Grundlagen der gärungskunde.*

Moreau et Lévy, *Traité complet de la fabrication des bières.*

Pacottet, *Vinification.*

(1) Véase obras consultadas.

PACOTTET, *Vinificación en la provincia de Mendoza.*

PASTEUR, *Études sur la bière.*

SEMICHON, *Maladies des vins.*

SCHUTZENBERGER, *Les fermentations.*

VANDE VENNE, *Estudios sobre levaduras de vino uruguayas.* Extractado de la *Revista,* número IV de la sección Agronomía.

VILAR, *Contribución al estudio de los vinos de la provincia de Mendoza.* Tesis.

# EXPEDICIÓN AL IBERÁ

*(Conclusión)*

---

La presencia de mucho guapohu *(Urostigma)* en el Rincón del Socorro da á la flora de esa región, en la ribera humífera y húmeda, un carácter especial que la distingue muy bien de la de Itatí-Rincón, aunque las dos tengan espesuras y matorrales que de lejos se presentan con el mismo aspecto.

En cuanto al paisaje, diríase árabe de África por las altas palmeras, irisando el ocaso ante un fondo fantástico, sanguinolento.

La fauna no presenta nada de anormal al naturalista que no puede efectuar sendos y detenidos estudios. La colección de aguas del Iberá sólo dió una *Synedra,* clasificada por el profesor don Augusto Scala. Los peces son las palometas en increíble cantidad *(Pygocentrus),* las mojarras *(Tetragonopterus).* Si los ribereños hablan de bogas y de dorados, debemos confesar que no los hemos visto. Pero de ningún modo podemos afirmar un juicio absoluto en esa cuestión de fauna, limitándonos á insistir para que se organicen expediciones sistemáticas. Dado el ya citado acceso por Mercedes y haciendo en esa ciudad el centro de la organización, podría, por ejemplo, hacerse que los cursos superiores de las facultades de ciencias de Buenos Aires y de La Plata, como entrenamiento de vacaciones, fuesen estudiando con detención, con la ayuda y colaboración de los profesores y de la universidad, los diferentes problemas del Iberá: geológicos, hidrológicos, botánicos, zoológicos y de ingeniería.

La lista de aves (cuya clasificación debemos al señor Roberto Dabenne, del Museo nacional) que sigue, es la expresión de las colecciones hechas en Paso Claro. Lo primero que sorprende es la abundancia

de cathartes, luego de rapaces, luego de roedores que allí llaman « conejos » (Cavia). La presencia del « conejo » explica la de los rapaces. En efecto, hállanse frecuentísimamente, bajo algún aislado montecito de espinillos, las degurgitaciones de los rapaces y en tal abundancia que esos lugares son verdaderos reservarios de osteología de roedores.

En un bosquecito de *Xanthoxylon* observamos la curiosa crisalidación de la *Perente Swainsoni* (Gray.) Grift., crisalidación que es gregaria y que se hallaba á unos veinte centímetros del suelo. De las veintiséis larvas crisalidadas sólo cinco habían llegado á pasar á la fase de imago y pudimos observarlas detenidamente en el curiosísimo fenómeno de la eclosión que pasa como en las Helicónidos. Las otras habían sido eliminadas *en masa* por los roedores comunes *(Mus musculus?)*.

Un día, habiéndonos alejado al interior, descansábamos bajo un bosque de *Cassia bonariensis,* al lado de unos hermosos *Cereus.* Unos *Picolaptes* subían y bajaban por los troncos buscando las larvas. Su vuelo llevábalos de un árbol á otro, como en pesada oscilación. En el suelo un tendal, un osario de mandíbulas de pequeños *cavia* y de félidos. En el aire cerníanse los cathartes como diminutos y silenciosos aeroplanos. Al oeste apareció de pronto una bruñida faja brillante, una espada de luz. Era la masa del Iberá que se veía tangente, como un hilo sin anchura casi : *I-berá.* Ahí estaba la explicación del nombre.

Algunos estancieros del contorno, que llevamos un día á recorrer una parte de la laguna en la lancha á nafta, admirábanse de la extensión de ésta. La rayita brillante, la *I-berá,* recién la conocían ellos, sus vecinos. Todos los días la veían como un lampo de luz y su misterio bastaba á su curiosidad.

## DOS OBSERVACIONES BOTÁNICAS EN PASO CLARO

Los *Cereus,* cortados en el monte y apoyados ó retenidos en las ramas de árboles, largan á la sombra cuatro raíces finas como piolines, de origen endógeno que se prolongan hasta la tierra, á la manera de muchos epidendros.

La caa-tigua *(Trichila caatigua?)* á las tres de la tarde (en julio) ya ha tomado su posición foliar de sueño. Estas posiciones de sueño son

fenómenos generalísimos y cualquier expedicionario se pasará muchos días observando el curioso cambio de aspecto de un árbol ó de un monte, por efecto de esas circunmutaciones de las hojas ó foliolas, sobre todo bajo una luna resplandeciente.

Cada vez se levanta más el terreno sobre una arenisca rojiza con valles de dirección general sudeste-noroeste ó noroeste-sudeste. Algunos hondos cañadones y algunos arroyos de profunda hoz, que han de ser mañana grandes embalsamientos para regadío y para fuerza motriz. La naturaleza está esperando al ingeniero.

En algún valle la geología ha colmado los antiguos thalwegs con detritus y acarreos cuyo estudio requiere detención: calcáreos psamíticos y cavernosos, areniscas, cuarzos hialinos, drúsicos, pulidos como cantos rodados.

La región recuerda la Auvernia entre Saint-Nectaire y el Mont-Doré. Es una verdadera meseta de arenisca, pobre é inculta. Algunas estancias paupérrimas, donde la higiene veterinaria jamás ha morado.

El 1° de agosto estábamos en la simpática ciudad de Mercedes. De nuestro viaje hasta allí podíamos concluir que el Iberá se apoyaba en esa meseta de arenisca, que llamamos Meseta mercedeña, y que forma una especie de grande promontorio de arenisca entre el río Corrientes y los esteros del Iberá por una parte al norte y el Miriñay por otra al este. Esa meseta de arenisca es uno de los ejes del problema geológico del Iberá.

Aparecía, pues, como estudio complementario el de las perforaciones sistemáticas en los rincones de Concepción, en la costa este de los esteros, en alguna de las isletas alcanzables por Puesto Rojas de una parte y el Iberá de otra.

Geológicamente, Mercedes descansa en la meseta de arenisca roja, que un empuje subterráneo de traquitas y meláfiros han levantado, inclinándolas ligeramente y dándoles en partes el aspecto metamórfico, en grandes bancos compactos.

La poca inclinación de las areniscas atestigua lo reducido y débil del levantamiento de los meláfiros y traquitas; la presencia de esas metamorfizaciones dicen que las erupciones subterráneas lo han sido después que se había depositado la arenisca.

La demostración de tal pasado estado de cosas en pro de la hipótesis de que, debido precisamente á esas erupciones subterráneas, cuyo centro sería la meseta de Mercedes, las aguas del Alto Paraná se han vertido hacia el Paraguay, dando el Paraná inferior actual.

Mercedes es también un sitio geodésico indicado para estudiar la *masa geodésica* en función de las coordenadas geográficas, estudios de los que saca gran provecho la filosofía geológica y empleados hoy día en la busca de filones de cobre. Esas investigaciones podrían hacerse con el péndulo ó por la balanza de torsión Cavendish y Eötvös.

El río Corrientes encajonado ya en su hoz dejaba aquí y allí al descubierto barrancas desmoronadas, donde se podía seguir la sucesión de varias sedimentaciones. Cerca de Paso Lucero contamos once. Sin generalizar más por el momento, se notará el interés que despierta en el naturalista la presencia de semejantes constataciones.

La inundación al retirarse ha dejado en los desplayados una arena cuarzosa hialina, que el viento lentamente acarrea en medanitos plateados. Las partículas más diminutas, polvillo infinitesimal, se alzan al soplo del aire, en una nubecilla irisada que se arrastra sobre los verdes grámenes.

Á esta hipótesis puede servir de corolario para el estudio geológico é hidrológico de Corrientes esta otra : el río Corrientes es un río que pasa por una fase de aumento. Sin dar exagerada importancia á la cartografía, se notará, sin embargo, que en el mapa de Azara, comparado al Miriñay, el río Corrientes tiene una importancia secundaria, hecho que hoy no puede admitirse de ninguna manera.

Se comprueba, pues, lo que decíamos en la introducción. Si la parte científica de la expedición al Iberá no ha traído la luz final á todos los problemas que se le sometieron, ha traído varias preguntas que podrán servir para alcanzarla.

Todos los peones y muchas personas de la costa del río Corrientes nos han afirmado que cuando el río baja las aguas de su curso medio son saladas, lo que no hemos comprobado, pero que puede hacerse en cualquier momento.

Habiéndose agotado los recursos, la expedición cesó de pronto en sus funciones. El 29 de septiembre, por Barranqueras, emprendíamos viaje de regreso á Buenos Aires. Comparativamente la geología de Santa Fe, difiere tanto de la de Corrientes y Entre Ríos, que su división, el Paraná, marca y sigue costeando dos formaciones diferentes. Por un lado las areniscas de la mesopotamia cortadas á pico hacia el Paraná, terciarias para D'Orbigny, cretáceas para Ameghino, del otro el pleistoceno y el cuaternario que se extenderá por toda la Pampasia.

## BIBLIOGRAFÍA DEL IBERÁ

Antes de llegar á las conclusiones conviene indicar la bibliografía.

Félix de Azara, *Voyage dans l'Amérique méridionale,* traducción de Walkenaer. París, 1808.

Obra que puede consultarse en el Museo nacional de Buenos Aires y que tiene *in extenso* conexión con el Iberá por su historia natural. Si los datos no son siempre reales, lo de Azara es siempre de interés bibliográfico. Respecto á la herpetología de la que manan tantas leyendas iberanas, se encontrará en Azara una exposición de los ovillos de Yararás que son conocidos fenómenos de celo en los ofidios.

Respecto del Iberá, luego de entrar en consideraciones metafísicas sobre las cataratas del mundo, dice: « Página 80. *Retournons au Paraná. Il y a un rescif que l'on appelle* saut *ou* cascade, *situé au 27° 27′ 20″ de latitude observée, et au 59° degré de longitude, mais le passage y est toujours libre pour les petits bâtiments et même pour les goëlettes, quand les eaux sont grandes; de sorte que le Paraná est navigable depuis le confluent de l'Iguazú jusqu'à la mer. Près de ce rescif* (hoy salto de Apipé) *on trouve le lac d'Iberá. Il a trente lieux de large au nord, parallèlement au Paraná, dont il est très rapproché, sans avoir de communication visible avec ce fleuve. Il se prolonge à 30 lieues au sud où il forme ce qu'on appelle la gorge d'Yuquicua; et s'élargissant ensuite à messure qu'on avance vers le sud, il finit par former la rivière* Miriñay, *qui est considérable et qui se jette dans l'Uruguay. Depuis Yuquicua les bords de Iberá suivent l'ouest pendant 39 lieues et il en sort trois rivières savoir: celle de Sainte Lucie, celle de Corrientes et celle de Bateles, que l'on ne peut jamais passer a gué et qui se jettent dans le Paraná. Le lac de l'Iberá ne reçoit ni rivière, ni ruisseau, ni source: il subsiste toute l'année sans presque aucune variation, et il est en grande partie rempli des plantes aquatiques, et même de quelques arbres.* Mais il est entretenu par la simple filtration des eaux du Paraná, *qui n'a pas d'exemple dans le monde. Cette filtration fournit non seulement l'eau des quatre grandes rivières dont nous avons parlé, mais encore celle qui est enlevée par l'évaporation dans une surface qui à au moins 1000 milles marines carrés et qu'on ne peut pas estimer au-dessous de 70.000 tonneaux par jour, d'après les expériences de Holley; on doit même la porter beaucoup plus haut, parce que le pays est plus chaud que l'Angleterre. J'ai lu dans quelque histoire manuscrite des jésuites, que dans l'intérieur du*

*lac Iberá, vivait une nation d'indiens pygmées, et ils en donnent une description très détaillée. Mais tout cela est faux et n'a pas plus de réalité que cet empire qu'on suppose exister au milieu de lac des Xarayes. L'Iberá est une grande etendue d'eau qui, dans certains endroits, forme un veritable lac, mais la plus grande partie est remplie de plantes, de sorte qu'il est impossible d'en reconnaître l'intérieur, ni a pied, ni a cheval, ni en bateau.* La situation et la disposition totale du pays, indiquent qu'autrefois le rivière du Paraná transversait le lac, et qu'elle se divisait ensuite dans les quatre rivières qui en sortent; et je ne doute pas que le Paraná ne reprenne par la suite son ancien lit.

Así, pues, Azara dice que el Iberá está surtido ó alimentado (mantenido) por filtraciones del Paraná; que en otros tiempos el Paraná atravesaba el Iberá y se vertía al sur por el Santa Lucía, el Batel, el Corrientes y el Miriñay y que en el futuro el Paraná volverá á esa antigua vía (rompiendo la leve barrera de Ituzaingo sin duda).

Cronológicamente la obra de D'Orbigny antecede á la de Woodbine Parish (1852); pero como habremos de analizar detalladamente lo escrito por el sabio francés respecto de la geología de Corrientes y del Iberá, citaremos ahora al descriptor inglés en su segunda edición, página 251:

*A singular physical feature in the province (Corrientes) is the vast marsh of Iberá, which, like those of Xarayes in the upper parts of the river Paraguay, is filled during the periodical rising of the Paraná, as is supposed, by some underground drainage, and inundates an inmense tract of country, supplying four considerable rivers the Miriñay which runs into the Uruguay; and the Santa Lucía, the Bateles, and the Corrientes, which discharge themselves into the Paraná. It was Azara's opinion, from the general aspect of the country, that the Paraná itself at some former period took its course throghougt this lake, and might at some time resume its ancien channel. At present it is hardly possible to explore any part of it, from the prodigius quantity of aquatic plants and shrubs by which it is covered in the greater part of its extents.*

*Connected with this lake there exists a tradition handed down by early spanish writers, of a nation of pigmies who where said to have lived in islands in the midst of it : a tale which the first discoverers, who where generally as ignorants as they were braves, seem to have as implicitly believed as that a race of giants once occupied other parts of the same.*

*Both tales are easily traceable to their true origins. The bones of extincts animals of monstrous size so frequentely met with, gave rise, as well they might, to the story of the giants. The* pigmies *are a race in-*

*fortunately not yet extinct, and are, I think, palpably the ants, whose marvellous works are no less calculated to have occasioned at first sight the most far-peached conjectures as to their origin.*

Woodbine Parish repite á Azara y hace justicia de la leyenda de los pigmeos con una explicación en que tiene en cuenta las observaciones y las sugestiones de los pueblos de civilización primitiva y de la ignorancia que es pereza de no investigar.

En cuanto á D'Orbigny lo que dice del Iberá merecería citarse íntegro por su valor documentario y por ser el sabio naturalista uno de los que se han internado en los esteros, si no mucho, por lo menos en una época del año (enero) y por un cuadrante (el nordeste) que después de él ningún explorador científico ha recorrido. Sus páginas que es indispensable conocer en la cuestión iberana, tienen además un interés vario y retrospectivo para el historiador y para el naturalista. D'Orbigny hace justicia de los errores contenidos en la mapoteca del Iberá, errores transmitidos por las copias de los planos de Azara y al hablar de los ríos que desagotan los esteros elimina el Santa Lucía, reduciendo, pues, los vertederos á los ríos Batel, Corrientes y Miriñay. El problema del Batel merece un estudio especial. D'Orbigny por primera vez en los mapas (que nosotros sepamos) indica la importancia del río Corrientes con un doble trazo, aunque no precisa su posición exacta eliminando así el error de Azara que le daba leve importancia, corriéndolo, además, muy al oeste y muy al norte. En el mapa de Azara el principal río de Corrientes resulta el Miriñay con una desproporción á su favor que demuestra á las claras el poco conocimiento que se tenía entonces del río Corrientes que es, respecto á la navegación, de condiciones superiores á las del Miriñay.

Ya hemos emitido como hipótesis — que pide comprobación — la idea de que las avanzadas de indios salidos del centro del Iberá de que hablan muchos historiadores y en especial Funes (1639) podrían provenir de tribus que navegaban el río Corrientes. Es un interesante problema etnográficohistórico que ha de tentar á los especialistas en la materia. Siendo de todo punto imposible que tribus numerosas hayan podido existir en las isletas del Iberá sedentariamente, esa hipótesis explicaría hechos indiscutibles de la historia eliminando la absurda explicación transmitida hasta hoy.

La descripción que hace D'Orbigny de los rincones ó albardones deja entrever que están formados por arena cuarzosa en un todo semejante á la que recubre la banda oeste del río Corrientes y que tiene su centro de Chavarría hasta San Diego. Todo indica que esa for-

mación es, ó restos de *bancos* de un lago ó delta ó, sin que esta otra hipótesis no cuadre con la anterior, de médanos.

Ya hemos indicado anteriormente que el río Corrientes de Santa Rosa ó Salamanca, parecía cortar como en canal las lomadas de arenisca deleznable que en el país llaman Ita-curuby. Si se demostrara que esas lomadas son recientes, es decir, que se han levantado posteriormente y gradualmente al Iberá, según la extensión que hubiese abarcado ese levantamiento, se plantearía el problema en una forma más concreta, y podría admitirse hasta mayores luces que el Corrientes desagotaba el Paraná. Un estudio detenido de las barrancas de Ita-curuby, estudio que nos ha sido desgraciadamente imposible efectuar, se requiere, pues, de inmediato. La paleontología correntina tan pobre hasta ahora podría enriquecerse alumbrando el problema del terciario correntino que queda hasta hoy sin solución acabada.

Si se demostrara que esas lomadas de Santa Rosa han sido mayores en épocas geológicas — que habría que determinar — que lo que son en la actulidad, entonces el Paraná ó debió verterse más bien por el Batel ó el Iberá era ancho estuario donde se depositaron las arenas cuarzosas que forman hoy el suelo de los rincones del oeste y de una gran parte de la margen oeste del río Corrientes.

D'Orbigny, más zoólogo que botánico, habla con preferencia de animales que de plantas. En éstos se limita á insistir sobre la extensión de los juncos y al hablar de las islas las da bordeadas por palmeras *pindó*. Nuestra flora, mucho más rica y especificada que la de D'Orbigny, aclara más el alcance botánico de las isletas. En cambio, en los mamíferos D'Orbigny, ha hallado más que nosotros. Él exploró en condiciones más adecuadas para ese capítulo del naturalista en tiempos anteriores de muchos años y en épocas normales. Nosotros lo hicimos durante grandes crecidas y recientemente. Á pesar de estas circunstancias el hecho de que no hayamos encontrado rastro alguno ni de oso hormiguero ni de *tamandua* aseveraría la extinción de esas especies.

La ornitología de D'Orbigny en lo referente al Iberá es pobrísima, los *cathartes*, los *auras*, los *caracaras* forman toda su lista. No cita ni los *chauna* ni los *Belenopterus* que en tanta abundancia hallamos nosotros, lo que quizá se debe al cambio de estación, pues nosotros exploramos en invierno.

El estudio de D'Orbigny siendo necesario para interpretar esta memoria, podrá consultarse la obra completa en el Museo nacional de Buenos Aires. Es obra rara. Los pocos ejemplares que hallan en venta

valen de 1500 á 2000 marcos. Por este dato se disculpará lo extenso de las citas que hagamos de él.

La bibliografía más abundante del Iberá es hasta hoy la publicada por el señor ingeniero don Santiago E. Barabino en los *Anales de la Sociedad científica argentina,* tomo LXX, entrega V, noviembre de 1910. Muy sensibles á los plácemes con que nos honra el señor Barabino, deseamos satisfacer tan amable confianza con el presente trabajo.

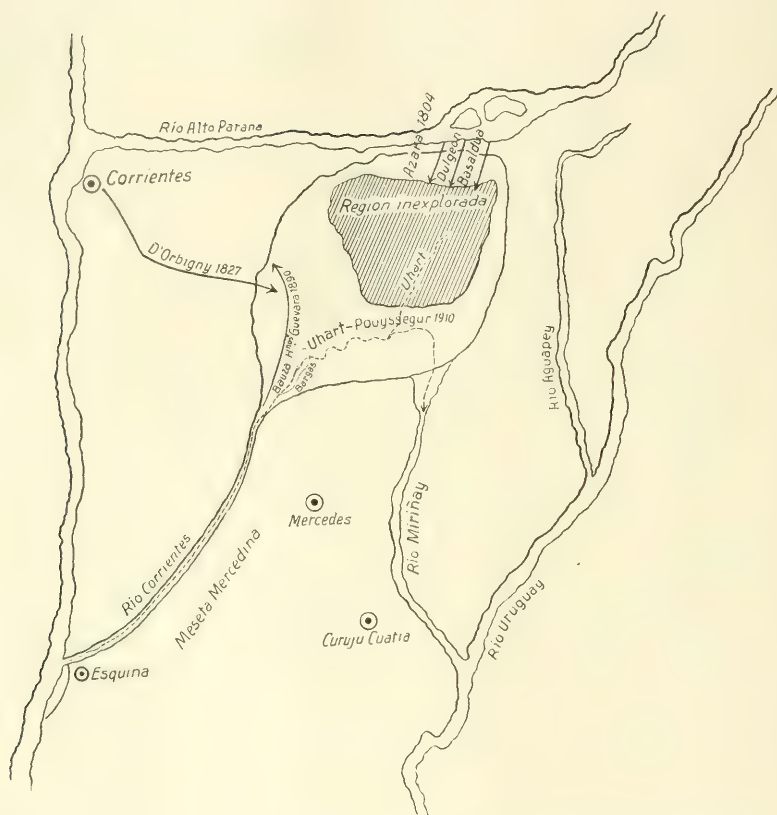
La bibliografía del señor Barabino es la publicación inicial á la que siguen naturalmente la memoria de nuestro jefe en la exploración el hoy comandante Pedro Uhart y ésta. Las tres forman un cuerpo.

Es ante todo importante saber que la idea de explorar los esteros del Iberá, data formalmente de la sesión del 11 de agosto de 1905. El honor de la iniciativa corresponde á los señores ingenieros coronel Arturo L. Lugones, Vicente Castro, coronel Agustín P. Justo y al doctor don Cristóbal Hicken. Las gestiones para conseguir los fondos del honorable congreso tuvieron por alma y brazo al señor ingeniero don Valentín Virasoro á quien tanto deben la geografía y las obras públicas nacionales. Recién el 29 de septiembre de 1909 votó el senado, á pedido de urgencia formulado por el señor Virasoro, una suma de 50.000 pesos. El entonces ministro de Agricultura, ingeniero Pedro Ezcurra, contribuyó á activar la entrega de los fondos.

No nos ha sido posible leer los escritos de don Pedro Bargas, ni los del doctor Dulgeon, ni tampoco una relación archivada en *La Prensa* de que es autor un señor Bonatti. Si nombramos á dichas personas es por deber de información y para ser lo más completos que nos sea dado.

El croquis siguiente da cuenta de las exploraciones intentadas ó efectuadas hasta el 1910. Las que partieron de Ituzaingó, Azara, Dulgeon, Basaldúa, fueron incipientes. Es por el río Corrientes que se han llevado á cabo las más importantes. Nos ha parecido justo citar á don Pedro Bauzá y á los hermanos Guevara que se esforzaron por llegar de Itatí-Rincón á Concepción, lográndolo á costa de grandes esfuerzos, de tiempo y de sacrificios que casi concluyen con sus vidas.

Nuestro piloto Mantilla nos repitió varias veces que en años anteriores (1910) había llevado en canoa por el Corrientes y de Itatí-Rincón por las lagunas Trin y Medina hasta el Caraya « á un inglés cónsul del Paraná que se la pasaba escribiendo y pintando » y « que se acobardó por la ponzoña de los mosquitos ». Es lástima que el alu-




Esquema de las exploraciones efectuadas en el Iberá. Por Ituzaingó : Azara (1804), Dulgeon y Basaldúa ; por Itatí-Rincón : Pedro Bauza y Guevara hermanos (1) (1890), Pedro Bargas, Pedro Uhart ó Hipólito Pouysségur (1910) ; por Concepción : Alcides D'Orbigny (1827) y Pedro Uhart (1910).

(1) Si los hermanos Guevara no han dejado nada escrito no por esto se les ha de olvidar entre los que se internaron (poco, en verdad) en el estero oeste.

dido señor no haya publicado nada. Sobre todo la parte de croquis *(sketches)* nos sería muy útil.

La copia precedente tomada de un mapa del siglo XVIII, Mapa del virreinato del Río de la Plata (1776-1810), dará una idea de lo que sabía la cartografía.

Lo más interesante es la deformación topográfica. Aun hoy no está completamente fijada la exacta posición perimétrica, lo más preciso y completo, siendo el mapa de don Zacarías Sánchez base de los futuros trabajos.

Otra cosa que se transmite es el cómputo del área que comprende el Iberá. Azara da la suma de 200 leguas y esa cifra se repite. Don Pedro Vargas estima de 20-40 kilómetros el gran eje de las lagunas Itati, Rincón, Trin, Medina. Otros toman esa base. En verdad falta todavía fijarla. Nuestra expedición no pudo hacerlo. Se limitó á *apreciar*.

La parte topográfica no se pudo llevar á cabo por imposibilidad de la región (altos juncos, niebla continua, necesidad apremiante de avanzar á toda costa y á toda prisa). Se dejaron banderas pensándose ligarlas desde la costa, pues siempre creímos que se votarían fondos para que el estudio llegase á ser lo más completo posible, con ayuda de personal científico numeroso. Además, los aparatos del ministerio de Obras públicas eran de precisión insuficientes.

Todo eso explica por qué la parte topográfica no haya adelantado nada y sea menester acudir al mapa de Z. Sánchez para poseer los datos más aproximados. La posición exacta de las lagunas de Trin, Medina, Fernández, Ombú, Iberá, Galarza, Naranjito, etc., no ha sido fijada, como tampoco se ha relevado el curso preciso del arroyo Plumero y demás. Lo mismo debe decirse del área de aquellas lagunas. Todo ese trabajo debe hacerse y nos parece, con Uhart, que unas cuantas comisiones de ingenieros tienen trabajo para tres ó cuatro años.

La Memoria de Uhart es lo más completo que se ha escrito sobre el Iberá y tiene entre otros el mérito de ser la expresión de un ingeniero que se ha internado en el corazón de ella. Es la Memoria-base.

## ANÁLISIS DE LA MEMORIA DE UHART

Dice Uhart, página 188, línea 31 y siguientes : « El gres de Itati-Rincón afecta una estructura tabular en las grandes masas, y hay trozos en que se divide en hojas de uno á dos centímetros de espesor ;

*se nota á simple vista que la separación en hojas es debida á la presencia de mica.* »

No hay tal mica. Lo único que hay es una arenisca de estructura sacaroide, como puede verse en las muestras que hemos depositado en el Museo nacional de Buenos Aires y en dos que donamos á la Escuela normal del Azul. Ya hay bastantes datos incompletos y sobrados errores para que esa mica venga á complicar más la mineralogía y por lo tanto la geología.

De esas areniscas de Itatí-Rincón, descompuestas por las aguas, llevadas á Buenos Aires fueron referidas por un geólogo á dos formaciones diferentes. No hay tales dos formaciones diferentes.

La única conclusión que se pueda sacar es que esas areniscas de Itatí-Rincón se descomponen fácilmente bajo la acción meteórica.

La presencia de *filones* de conglomerados á base de *gravier* de cuarzita, de ágatas, de calcedonias, etc., ha sido indicada por Uhart, que deduce de ella la demostración de un fuerte oleaje (marino ?) en la época de su formación.

Página 194, línea 35 : « Este islote (el Carayá), debe ser muy fácil de abordar partiendo de la costa sur de los esteros ». Dato importante para los futuros exploradores.

Donde Uhart repite las observaciones sobre rápida bajante de las aguas por señales observadas en las plantas, hay que tener presente la influencia del viento *(seiches)* como coeficiente de error que puede ser aditivo ó sustractivo.

Mientras marchábamos á Mercedes, Uhart volvía atrás y luego remontaba hacia el nordeste, por la laguna Carayá y por el arroyo Encontrado. En esa internación Uhart halló que había más agua que en el camino seguido por nosotros todos. Como Mantilla afirmó que el Carayá seguía por el sur hasta la laguna Fernández, se tiene un bajío, y quizás un riacho que describe un arco de círculo de la laguna Naranjito más ó menos á la de Fernández. Este dato deberá ser comprobado.

Uhart, solo, partiendo de Chavarría, recorrió la parte oeste del estero (véase página 204) y pasó por el estero I-pucú, que es el mismo que atravesó D'Orbigny en su célebre viaje. (Véase D'Orbigny, obra citada.)

Dice Uhart, página 204 : « Numerosos brazos de los esteros del Iberá limitan los llamados Rincones, que no son sino lenguas de tierra de poca altura, antiguos bancos de arena, consolidados por la gramilla y probablemente asentados sobre el gres rojo. » Todo eso

confirma nuestra creencia de que el gres rojo (impermeable por supuesto) forma como un plato *(cuvette)*, donde se almacenan los esteros del Iberá.

Página 205 : « El pie de las barrancas del Alto Paraná, desde Ibicuy hasta Ituzaingó, es de gres rojo muy cavernoso, sobre él está asentado un estrato como de 10 á 12 metros de espesor, de arena con muy poca arcilla ; en todas partes, donde la gramilla ha desaparecido, se ve que toda esta orilla es una faja medanosa. »

Ese gres cavernoso parece ser como el que se observa en la ciudad de Corrientes. La cavernosidad quedaría demostrando la acción del agua del Paraná, manifiesta en el caso citado.

El distinguido ingeniero Zeladas, jefe del apostadero del ministerio de Obras públicas en Corrientes nos obsequió con muestras sacadas por él del Salto de Apipé. Esas muestras eran de aspecto de traquitas. Holmberg en su *Viaje á Misiones,* determinó como meláfiras las rocas de Apipé. De todo lo que resulta que entre Apipé y Corrientes hay una llave del problema geológico del Iberá. A este respecto dice Uhart : Ibid. : « Lo más probable es que de Itá-Iboti hasta Apipé hayan existido unos diques transversales que embalsando las aguas del río le hayan obligado á pasar por Ituzaingó é inmediaciones hacia los esteros del Iberá. Como fundamento para esta creencia citaré los depósitos de cascajo encontrados en Itatí-Rincón que son iguales materias que los cascajos del Alto Paraná.

« Demolidos los diques del cauce, las aguas del Paraná bajaron y fueron entonces las del estero que afluyeron al río produciendo con las variaciones anuales del caudal, los bancos que el viento convirtió en médanos. Hasta hoy las aguas del estero fluyen al Paraná por las filtraciones que se ven desde Ibicuy hasta la Zanja de Loreto. »

Esa demolición de los diques del cauce, restingas de gres (arenisca) rojo según Uhart, página citada, había dado por resultado, pues, que el Alto Paraná, en vez de seguir por Iberá al Corrientes, al Aguapey, haya perpendicularizado al Paraguay yendo á formar el actual estado de cosas. En la Memoria de Uhart parece desprenderse que esa demolición ha sido la obra del agua, lo que es decir, de una desnivelación, condición evidentemente *sine qua non* para que el nuevo cauce se produjese. Aquí entrarían las traquitas ó las meláfiras del subsuelo de la meseta de Mercedes, erupciones que han levantado esos depósitos de arenisca, de modo casi horizontal es verdad, y que aflorarían precisamente en Apipé.

Por lo que se restringe al río Corrientes la región de Santa Rosa

parece ser incompatible con un caudal abundantísimo como el que fué sin duda el antiguo Paraná. Su estudio, más detenido, fijará las ideas hoy contradictorias, pero todo nos parece demostrar que fué por el Miriñay-Aguapey que se vertía el Alto Paraná. Por otra parte, los bancos de Conchilla de la isla Itatí-Rincón son argumentos en pro de un levantamiento lento de los esteros, si se descarta, lo que también parece probable, la otra hipótesis de un lago más profundo y más extenso. En la actualidad es difícil estrechar la discusión por la falta de datos suficientes y suficientemente precisos.

He aquí el enunciado de la hipótesis de los dos ríos geológicos: Alto Paraná-Uruguay y Paraguay-Bajo Paraná.

« El Alto Paraná desvió *poco á poco* á la altura de Posadas y *fué absorbido* por el Paraguay. El Aguapey, la Iberá, el estero del Miriñay representan las cuencas sucesivas del Alto Paraná. Á su vez el Paraná fué desviado y absorbido por un golfo de agua muy salobre en el cual desembocaba el Uruguay, formando así los dos ríos el actual río de la Plata ».

Uhart estima en 6000 kilómetros cuadrados el área de los esteros en los que se embalsan, según su apreciación, de 3-4 kilómetros cuadrados de agua. Esa agua, estamos todos contestes en afirmarlo, proviene de las lluvias. Lo que falta fijar es la economía general y particular de la lluvia, que se puede estimar en 1,50-2 metros anuales, basándose en la caída en un polígono circunscripto.

En la memoria de Uhart se fija el verdadero papel de la famosa zanja de Loreto y se indica « un nuevo canal de desagüe » que las filtraciones de los esteros al Paraná están abriendo al oeste de Ituzaingó.

Según las nivelaciones de Esteve, el desnivel del estero es de $\frac{1}{16.000}$ y la pendiente hacia el sur. Respecto a los vertederos de los esteros, dice Uhart, página 211 :

« Los esteros de Iberá no presentan á la vista más que tres desagües y éstos son :

« Hacia el norte, el arroyo Ibicuy, que desemboca en el Alto Paraná.

« Al sudeste, el río Miriñay.

« Al sudoeste, el río Corrientes. »

Á renglón seguido Uhart da un resumen de lo que es el Iberá *(sensu lato)* que, para muchos espíritus ha de ser suficiente :

« Dentro de los esteros hay grandes lagunas libres de embalsados en que las aguas alcanzan profundidades de más de cuatro metros ;

algunas presentan el fondo perfectamente limpio de vegetación acuática, pero la mayor parte van llenándose de plantas, que en época de bajante, llegan hasta la superficie del agua, dificultando la marcha de las embarcaciones. Las márgenes de estas lagunas, cuando no tocan tierra firme, están formadas en su totalidad por embalsados, que son entretejimientos de tallos y raíces flotantes. El agua circula por debajo de ellas, con velocidad bastante apreciable en algunos parajes. Se hallan también riachos profundos y correntosos, cuyas orillas son también de embalsado. »

Luego deduce Uhart de la naturaleza y orientación de las lagunas y riachos de los esteros la existencia de tres canales, « por donde pasaba el Paraná en direccion al sudoeste ».

En la página 212, líneas 34 y siguientes, asienta Uhart la significación de que ahora « el nivel de las aguas es mayor al de antes, lo que nos parece en contradicción con lo que indicaría el banco de moluscos, emergido en Itatí-Rincón, con los grandes desplazados de arena cuarzosa de todo el lado oeste. Lo que, á nuestro juicio, debe deducirse es que la vegetación tiende a levantar el nivel general del suelo, pero nos parece que el problema general de las aguas se cifra por una creciente diminución. En una palabra, hoy por hoy, los esteros del Iberá tienden á la disecación progresiva. Si se desembalsasen los canales citados por Uhart y obstruídos por la vegetación turbiosa que dejan los embalsados, el aprovechamiento general sería un hecho. Se nota en seguida de lo expuesto que sin esperar una gran acción del gobierno federal que haría un vasto proyecto ingenieril, la acción privada puede aprovechar fracciones de esteros con poco trabajo de drenaje y canalización.

La vegetación de los esteros ha hecho un suelo humifísimo que contrasta con el medanoso de la parte oeste, arenas cuarzosas que la irrigación lesiva fácilmente. Agronómicamente el aprovechamiento de esos seis mil kilómetros cuadrados daría á Corrientes sus mejores tierras. Pero es menester una intensa población agrícola, en la hoy muy despoblada provincia, para las obras que eso traigan merezcan la realización. Los latifundios son los peores Iberás que tiene el país.

En la discusión de los resultados á que llegó Uhart, se expresa así, con relación á los problemas cuya solución debíamos intentar alcanzar.

1° *¿ Existe alguna relación entre las crecientes del río Paraná y de la laguna ?* Por *laguna* debe entenderse los esteros (la cuenca, o *assiette*) inundada é inundable.

« La única relación que puede existir es la coincidencia de las épocas lluviosas en la cuenca del Paraná superior y en la parte nordeste de la provincia de Corrientes. Las aguas de los esteros proceden únicamente de las lluvias que caen en una superficie territorial de treinta mil kilómetros cuadrados ; cuyo suelo, muy permeable, por estar formado casi exclusivamente de arena, descansa sobre « una plataforma de gres rojo, cuyos afloramientos se ven desde Esquina hasta Paso Claro por el sur y desde Corrientes hasta cerca de Posadas por el norte. »

El pasaje anterior es una especie de definición de lo que es el Iberá. Puede adoptarse como tal sin más reservas que las particulares geológicas que puedan dar, sobre todo, Santa Rosa, la Barranca de Caá-guazú y la del Aguará-Buguay en Itati Rincón.

No se le puede hacer á Uhart el reproche de ser catastrofista. Todo en su memoria respira las « causas actuales » con una convicción que podría llamarse beatífica. Á nuestro juicio, no tiene bastante en cuenta las diferentes épocas geológicas. Es una explicación sincrónica, quizás demasiado simplista, desde que hay tantas « lagunas» en los datos.

La lógica, general, después de todo, vale poco en la ciencia. Por lo que se refiere á los cascajos *(gravier)* que hace venir de muy alto, diremos que las areniscas de conglomerados de la meseta mercedeña las poseen en abundancia y que esas mismas areniscas (gres) dan rápidamente una arena cuarzosa, medanosa. Por desgracia no hay fósiles, hasta ahora, que permitan discutir con rigurosidad el problema en el tiempo.

Dice Uhart, página 215, línea 27 : « Es evidente que los ríos de la provincia de Corrientes no han tenido de donde sacar estos materiales » (cascajos). Lo que es evidente — sin que ello implique decir que han venido del norte — es que en esa arenisca roja de conglomerados tienen los ríos de Corrientes hasta reservorios de cascajos.

En la página 216 dice Uhart que las islas de Apipé, que es uno de los lugares capitales del problema « están constituídas sobre bancos de arena », testimonio de la gran medanización porque pasó la provincia cuando las aguas del Alto Paraná dejaron de formar la gran hernia del Iberá.

Contrariamente á lo que afirma Uhart (pág. 218), nosotros aseguramos que las aguas del Iberá están sujetas á fenómenos de *seiches*, llamados vulgarmente mareas. Este es un estudio delicado que sólo podrá efectuarse *in situ*, como tantos otros de ciencias naturales que atañen al Iberá.

Después de haber apreciado en ocho litros la evaporación por día y por metro cuadrado, y en 33.000.000 de metros cúbicos, también por día, el caudal de agua que sustraen los emisarios del Iberá, Uhart, sobre la base del agua que cae anualmente sobre esos 6000 kilómetros cuadrados y en la suposición de que el fondo en los esteros sea ese manto de gres impermeable, llega al siguiente dilema importantísimo:

« Pero si el agua no se resume es debido á la presencia de un fondo impermeable, que en este caso bien podría ser el manto de gres rojo, y entonces el drenaje de los fondos sería una tarea de probabilidades muy discutibles y de ningún provecho. » Se ve que Uhart sólo tiene en cuenta el aprovechamiento de los esteros bajo un punto de vista agronómico.

Lo antedicho es todo lo que tengamos que comentar á la Memoria de Uhart. La claridad de su exposición le agrega un valor más á los informativos y deductivos que son muchos, y, aumentado la nitidez del mapa que la acompaña é incluyéndole algunas fotografías y esquemas, sería conveniente difundirla en los colegios nacionales y en las escuelas normales por lo menos.

## LA GEOLOGÍA

*Il y a plus affaire à interpréter les interprétations, qu'à interpréter les choses.*

(MONTAIGNE, *Essais.*)

D'Orbigny, en la tercera parte del *Voyage dans l'Amérique méridionale*, hace notar *la faille gigantesque*, que representa el Paraná con relación á las barrancas de la Mesopotania y del pampeano santafecino.

D'Orbigny, como lo expresa, sólo ha recorrido á Corrientes por el Paraná — fuera de la internación ya citada al estero I-pucú — y ese recorrido, en el que ha observado las barrancas, le ha bastado para establecer la parte geológica de Corrientes, que clasifica netamente como terciaria. Acompaña su larga descripción con varios cortes geológicos que son, á nuestro conocimiento, los primeros que se hayan hecho de la Mesopotamia. Nada sabría compensar la lectura y meditación del artículo de D'Orbigny, en la página 28 de la citada publicación, que se encuentra en el Museo nacional.

Veamos lo que dice Ameghino, ahora que el principal estudio es-

tatigráfico, el de base, nos es conocido por la descripción de D'Orbigny (ob. cit., 3ª parte, pág. 28 y siguientes).

En el censo de 1895, en la parte *Geología* se expresa así, página 73:

«La subdivisión del cretáceo en secciones y pisos no se deja todavía efectuar con todo rigor en la Argentina. Sin duda porque entran en su composición espesos yacimientos que carecen de fósiles ó los llevan tan particulares que *poco se prestan al paralelismo* con capas de otras procedencias. Á los primeros pertenecen depósitos gruesos de areniscas coloradas y de otros colores, con frecuente contenido de yeso, que asoman en la falda de la cordillera y de las sierras pampeanas y que, desde D'Orbigny, se distinguen como *guaraníticos* en las sierras de Misiones y en las colinas de Corrientes.

« Á la segunda categoría deben atribuirse capas de areniscas, margas y tobas que cubren grandes superficies en la Patagonia y *que antes se juzgaban terciarias,* pero cuya fauna singular lleva á clasificarlas como de mayor edad. »

En la página 75, tomando el conjunto de la geología sudamericana para dar un concepto general, dice: «el centro geológico del continente sudamericano lo forma la inmensa meseta brasileña, cuya estructura uniforme y grandiosa contrasta con los dislocados estratos del resto del continente. Sobre su zócalo arcaico descansan, casi horizontalmente, extensos depósitos paleozoicos, y encima siguen, cubriéndolos por miles de leguas, depósitos más modernos, con la misma horizontalidad. Entre ellos, nos interesan especialmente *areniscas coloradas con rocas eruptivas básicas,* que alcanzan en el sur al suelo argentino, componiendo las sierras de Misiones, el subsuelo de Corrientes», etc.

Página 87. Las areniscas coloradas sin fósiles y las rocas eruptivas básicas, que constituyen las serranías del territorio de Misiones, forman parte del conjunto de *edad* dudosa *cretácea* ó *triásica,* que cubren casi toda la superficie del Paraguay y de los estados brasileños de Pará, Santa Catalina y Rio Grande del Sur.

Continúan al sur, por la provincia de Corrientes y de Entre Ríos, en cuyas colinas forman el *substratum* de depósitos más modernos, de naturaleza distinta, y rellenados de fósiles marinos y terrestres.

En la página 115 da Ameghino el cuadro siguiente que establece un paralelo de la terminología D'Orbignyana, — adoptada á la cronología de Ameghino — con la clásica división geológica:

*Cretáceo (superior)*

| Formaciones | Epocas | Formas fósiles dominantes |
|---|---|---|
| Guaranítica ó de las areniscas rojas. | Cenomaniana. Senoniana. Daniana. | Dinosaurios. Saurópodos y mamíferos. Multituberculata. Pyrotherium. Ungulados primitivos. Tilodontes. Sparassodontes. |

Página 116. « Otro gran sistema de areniscas coloradas de la época cretácea aparece en la provincia de Corrientes á lo largo de la costa del Paraná, extendiéndose por el norte al Paraguay hasta penetrar en el Brasil. »

« Página 118. Formación guaranítica :

« Representa el cretáceo superior y consta principalmente de capas de areniscas rojas y amarillentas que aparecen en varios puntos de la Patagonia y en la provincia de Corrientes. *Las barrancas de la margen izquierda del río Paraná, de La Paz á Corrientes que se elevan de 15 á 25 metros sobre el río, pertenecen á esta formación.*

« Esta vasta formación con una pequeña inclinación al este y al sudeste, según los puntos, desciende más abajo del nivel marítimo, y como es principalmente de origen terrestre ó subaéreo, parece denotar la existencia en esa época de un gran continente, ó la persistencia de la mayor extensión continental que ya nos ha revelado la formación chubutense.

« *Lo que más llama la atención es la presencia de huesos de grandes dinosaurios y de mamíferos en la misma formación.*

« Los dinosaurios gigantescos pertenecen á dos especies distintas del orden de los *Sauropoda*, el *Argyrosaurus superbus* Lyd, y el *Titanosaurus australis* Lyd ; una tercera especie de tamaño más reducido, el *Microcœlus patagonicus* Lyd, es de colocación incierta. Conjuntamente con los dinosaurios se encuentran también reptiles de otros tipos, particularmente crocodilianos, ofidianos, lagartos y tortugas, hasta ahora no estudiados, con excepción de los primeros, representados por los géneros *Dynosuchus* S. Lm. Vood y *Cynodontosuchus* S. Lm. Vood del grupo de los *Mesosuchia* y parecidos á los del horizonte purbeckiano del jurásico de Inglaterra.

« Los mamíferos son de formas sumamente variadas y comprenden los antecesores de casi todos los grupos más modernos. Los órdenes

y subórdenes representados en esta formación son los Prosimiae (con las familias de Notopithecidae y Archaepithecidae); los Typotheria (Protypotheridae, Hegethotheridae, Trachytheridae); los Hyracoidea (Archaeohyracidae); Piroteria (Pyrotherium, Archaelophus, Astrapotheroïdea (Parastrapotherium, Liarthus), Tosodontia (Pronesodon, Proadinotherium, Lenodon, etc.); Condylarthra (Phenacodontidae Periptychidae); Liptopterna (Mesorhinidae; Adianthidae. Proteroptheridae Notohiffidae); Ancylopoda (Homolodontotheridae. Leontinidae. Isotenmicidae): Tillodontia (Notostylops. Trigonostylops, etc.); Rodentia (Cephalomydae); Plagiaulacoidea (Polydolops, Endolops, etc.) Pedimana (Microbiotheriidae); Sparassodonta (Proborhyoena, Pharsophorus, etc.); Gravigrada (Megalonychidae, Crophodontidae), Glyptodontia (Palocopeltidae, Propaloehoplophoridae); Dasypoda (Prodosypus, Prozaëdius, Praentatus, etc.); Peltateloidea (Piltephilus)...

« Esta fauna de mamíferos consta de unos 70 géneros con cerca de 120 especies, número que, dado el escaso material hasta ahora recogido, debemos suponer no representa más que una pequeña parte de la fauna de esa época. Tal variedad indica que la aparición de los mamíferos remonta á una época geológica todavía mucho más remota; y, bajo este respecto, las formaciones anteriores á la guaranítica nos reservan sin duda grandes sorpresas.

Página 122. Formaciones cenozoicas. « La causa que quizás más ha retardado y aún embrollado el conocimiento de las formaciones terciarias de nuestro país fué la confusión que se hizo de especies de moluscos procedentes de diferentes horizontes y distintas localidades, especialmente del género *Ostrea*.

« Toda *Ostrea* de gran tamaño, de cualquier procedencia, debía ser necesariamente *Ostrea patagónica*, y *formación patagónica* el terreno que la contenía; tal confusión empezó en el mismo punto de partida con Darwin y D'Orbigny, que confundieron con *Ostrea patagónica* no sólo especies distintas procedentes de la Argentina, sino también de Chile. Produjo esto tan grande confusión en el estudio de los terrenos terciarios, que puede decirse hubo que empezarlo de nuevo con mayores dificultades que si no hubiera habido nada hecho al respecto. »

Eso dice Ameghino en su exposición geológica de la Argentina, del Censo de 1895, y su concepto de la geología mesopotámicomisionera no ha variado desde aquel entonces esencialmente. Mas es en *Las formaciones sedimentarias de la República Argentina*, gruesa memoria

de polémica contra Wilckens, publicada en el tomo VIII, serie 553 de los *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires,* donde se hallarán mayores datos que servirán pora abarcar el estudio de Corrientes y por lo tanto del Iberá y darlo al fin como definitivo, previas mayores expediciones de especialistas.

Pero lo que se desprende en seguida del estudio comparado de la Memoria de D'Orbigny — con todo que es minuciosa y la expresión de una observación é investigación detenidas — y de los escritos de Ameghino es la necesidad de rehacer el estudio del Paraná más meticulosamente, por ejemplo en un barco fletado expresamente por todo el tiempo que requieran los estudios; y ver de ligar luego acabadamente esa tajada geológica Ituzaingó, Corrientes, Esquina, por un lado é Iberá este y río Corrientes por otro, con las areniscas rojas metamórficas de la meseta mercedeña.

De lo dicho por D'Orbigny y Ameghino, puesto á adaptarlo á lo que nos dió la observación del Iberá y sus bordes, todo permite aceptar la idea de que el Iberá y el río Corrientes — reténgase lo que dijimos sobre Santa Rosa — son los lugares topográficos que marcan dos formaciones geológicas diferentes, la más antigua de la meseta mercedeña, levantada eruptivamente por las traquitas del fondo, formado de areniscas ó asperones rojos metamórficos y las *capas* D'Orbignyanas que desde el Iberá (?) van á rematar al Paraná, donde forman la gran falla paranense. Á nuestro juicio, las cosas pasarían del modo siguiente:

La diferente naturaleza de las rocas, la superposición probabilísima de las areniscas ó los asperones, la inclinación misma que revela en las barrancas del Paraná una *poussée* cuyo hipocentro parece hallarse bajo Corrientes mismo, ó más al oeste desde que la inclinación de las capas es hacia el este, es decir, hacia el río Corrientes y el Iberá, mientras que la meseta de Mercedes, allí donde se puede distinguir una tabulación, la presenta en sentido inverso.

Para evitar confusiones en un orden de ideas confuso de suyo propondremos que los asperones, ó areniscas ó gres de « la meseta de Mercedes » se llamen *asperones correntinos* reservando el nombre de *areniscas* á las de las barrancas del Paraná que se ligarán luego según las áreas que revelen las posteriores investigaciones; y el nombre de *gres á conglomerados* se reserve, por ahora, á los que ocupan el ángulo donde se levanta la ciudad de Corrientes. Serían los que D'Orbigny indica con la letra A de su corte geológico y que se observan, cavernosos y oxidados, bajo el puerto de esa dicha ciudad.

Desde ya, las perforaciones mandadas efectuar por la División de hidrología, geología y minas con el propósito práctico inmediato de buscar agua potable, han enriquecido la geología con datos interesantes.

Para el problema que nos ocupa, se han hallado, en San Cristóbal, provincia de Santa Fe, recién á los 883 metros de profundidad, las mismas rocas eruptivas del subsuelo de la meseta correntinomisionera.

Esto, en cierto modo, viene á medir la falla ó garganta geológica, murada hoy por las barrancas del Paraná.

Como el asperón rojo de Mercedes no aflora en la margen oeste del río Corrientes sino en el cerro Ibicuy frente á Itatí-Rincón, y se hunde bajo los esteros y el río Corrientes y el resto oeste de la provincia se tendría que las formaciones del curso del Paraná, de Corrientes á La Paz descansarían sobre los asperones rojos.

Es conveniente recordar que en su Memoria Uhart sincroniza los asperones rojos de Itatí con el gres cavernoso del puerto de Corrientes, lo que no está conforme con las conclusiones de los anteriores trabajos analizados, sino es el de D'Orbigny. Pero ya se ha visto que D'Orbigny generalizó, sin ver, al otro lago del estero I-pucú, lo que sólo es aplicable á la parte que el sabio francés recorrió.

Tendríamos que considerar por fin, para ser completos la analogía ó paralelismo que pudiera existir entre la naturaleza geológica del Iberá y la de los Everglades de la Florida, estudiados por el reverendo John Macgonigle en *Report of the International Geographical Congress*. Washington, 1905.

Esos Everglades eran considerados como *marshes*. Su desconocimiento, su área enorme (130 millas por 70), sus leyendas lo hacían muy comparable al Iberá. No es, pues, de sorprenderse si aquí se han citado á menudo á los Everglades al referirse al Iberá.

Según John Macgonigle, citado por E. A. Martel en *La Nature*, número 1726, correspondiente al 23 de junio 1906 el suelo de los Everglades sería « un calcáreo eoceno, especie de espina dorsal de la Florida, en realidad la cima de un macizo montañoso emergiendo apenas del mar, y sus características muy especiales son los innumerables lagos, muchos de los cuales se comunican entre ellos por vías subterráñeas enormes fuentes (de Plata, del León, Azul) lagos y corrientes subterráneas que han revelado perforaciones. Las aguas de esas perforaciones están á diferentes temperaturas y á menudo cargadas de gases y de elementos sulfurosos. » « El subsuelo calcáreo

es muy cavernoso, horadado por grandes abismos, algunos de los cuales absorben el agua, mientras otros la vierten.» Es tan difícil recorrer los Everglades que solamente una vez han sido atravesados por hombres blancos (expedición M. Ingraham en 1892, casi terminada por una catástrofe). Solamente conocen los pasajes los indios Semiolos (salvajes escapados de las deportaciones de 1842).

«Es extremadamente curioso notar que en ninguna parte bajo los Everglades el agua es estancada; parece escurrirse en masa del noroeste al sur y al sudeste subdividida bajo tierra en numerosas corrientes y contracorrientes. En 1897, el teniente Villougby ha observado muchas emergencias, que los caprichos de los canales naturales interiores llevan a la superficie. Ningún drenaje exterior alimenta los Everglades, alimentados solamente por la precipitación atmosférica y por los aflujos subterráneos.

«Pero se escurren por diversos arroyos hacia el océano y hacia el golfo de Méjico, y a veces hacia el norte y por sobre un dintel natural hacia la cuenca del lago Olheechobie.

«En realidad, afirma M. Macgonigle, los Everglades no son *marshes* como se los creía corrientemente, sino un macizo rocoso de intersticios llenos de agua pura en continuo movimiento. Es el manto de hierba y de vegetales en el que hay isletas de cipreses y de cocoteros, lo que ha hecho nacer la leyenda de los Everglades.»

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

«La lutra (*Lutra* sp.) es la principal fuente de los recursos de los indios Semiolos, que viven en los Everglades desde hace 70 años, y sin duda todavía por mucho tiempo porque, los aligatores y las serpientes venenosas pululan al punto de volver toda exploración muy peligrosa. Se había sin embargo proyectado el drenaje de los Everglades, particularmente para explotar las riquezas turberas, pero la abundancia de aflujo de las aguas subterráneas rendiría sin duda impracticable semejante trabajo.

«En resumen los Everglades constituyen una curiosidad natural bastante misteriosa cuya investigación parece ser de conducción difícil.» (E. A. Hartel).

La analogía entre el Iberá y los Everglades, por lo que se sabe de ambas hasta ahora. estaría en:

Ser ambas la cima geológica de unas mesetas que actualmente se levantan poco sobre el nivel del mar, y general del terreno. Calcaracas del eoceno, probablemente los Everglades y asperones grésicos el Iberá. Ambas son regiones alimentadas por las lluvias, con esta

diferencia: que los Everglades parecen tener un real aporte sifónico de otras fuentes y que el Iberá no es, con casi seguridad, sino el resultado de lluvias abundantes en una hoya chata é impermeable ó saturada.

Misma manera de verterse: los Everglades hacia el golfo de Mejico y el Atlántico y el Iberá por los dos grandes ríos el Corrientes y el Miriñay.

Mismos problemas generales á resolver: ¿drenaje? ¿canalización? etc.. etc.

Mismas leyendas, mismas dificultades y, hasta, para hacer más comparables las analogías, misma área aproximadamente y misma latitud. Cámbiense los cipreses y cocoteros por los ombúes y bambúes y carandays para tener otra similitud de aspecto general.

Esa misma latitud y la afirmación formal de la existencia de turberas en los Everglades, cuya explotación ha llegado á plantearse, es oportuno y de gran interés relacionarla con la misma latitud del Iberá y la existencia en esta de verdaderas turberas. Por desgracia el documento de los Everglades que tenemos á la vista *(op. cit.)*, no menciona las especies botánicas á que se deba esa formación turbosa. Ya dijimos que en el Iberá debíase principalmente al género Polygonum.

La principal dislogia sería que la naturaleza geológica de los Everglades estaría formada por el calcáreo cavernable y fisurable, dando, pues, una región de espeleolación hoy sumergida; mientras que el Iberá reposaría sobre un suelo de asperones y areniscas impermeables.

El Iberá sería un fenómeno puramente superficial, mientras los Everglades llamarían principalmente la atención por su influencia subterránea.

Con todo ser estos datos comparativos incompletísimos — el estado actual de la cuestión se encuentra sin embargo en ellos — servirán siempre para fijar las ideas generales al respecto.

### FAUNA ORNITOLÓGICA DE ITATÍ-RINCÓN CLASIFICADA POR EL DOCTOR ROBERTO DABENNE, COLECCIONES POUYSSÉGUR (1910, JUNIO-JULIO).

Podicipediformes. *Aechmophorus major* (Bodd.).
Lariformes. *Phaetusa magnirostris* (Licht.).
Charadriiformes. *(Parridæ)* Jacana jacana (Linn.).
Ardeiformes. *Butorides striata* (Linn.).

Palamedeiformes. *Chauna cristata* (Lw.).

Cathartidiformes. *Cathartes urubutinga*. Pelz.

Accipitriformes. *Geranoætus melanoleucus* (Vieil.). *Rupornis magnirostris Pucherani* (Verr.). *Hypothriorchis fusco-coeruslescens* (Viell.). *Cerchneiss sparverius australis* (Bidgno.).

Psittaciformes. *Miziopsitta monachus* (Bodd.).

Coraciiformes. *Ceryle torquata* (Linn.). *Ceryle amazona* (Lath.).

Piciformes. *Compephilus leucopogon* (Valene).

Passeriformes *(Deudro colaptidæ)*. *Picolaptes angustirostris* (Vieill.).

(Tyrannidae). *Toenioptera cinerea* (Vieill.). *Toenioptera irupero* (Vieill.). *Lichenops perspicellata* Gm.

Turdidae. *Phanesticus rufiventris* (Vieill.).

Mimidae. *Mimus Saturninus modulator* (Gould).

Vireonidae. *Cyclarhis ochrocephala* Tsch.

Mniotiltidae. *Compsothlypis pitiayunai.* (Vieill.).

Tanagridae. *Piranga flava.* (Vieill.).

Fringillidae. *Saltator coerulescens* (Vieill.). *Spinus ictericus* (Licht.). *Brachyspiza capensis.* (P. L. S. Müller). *Paroaria capitata.* (Orb. Lapr.) *Paroaria cucullata* (Lath.).

Icteridae. *Amblyrhamphus holosericeus.* (Scop.). *Molothrus boñariensis* (Gm.).

## CONCLUSIONES DE INTERÉS INMEDIATO

En este orden de conclusiones entran las respuestas á las preguntas formuladas por la Sociedad científica, conclusiones que son las siguientes :

1ª Un estudio mucho más detenido y pacientemente preparado se impone sobre la base aproximada de un proyecto de nueva exploración que presentaremos en oportunidad ;

2ª La región entendida generalmente por Iberá no es otra cosa que una hoya muy chata, de naturaleza *impermeable*, alimentada por las precipitaciones atmosféricas. Arenas cuarzosas saturadas, que descansan sobre los asperones rojos de Itatí-Rincón hasta el Rincón del Socorro y que pertenecen á la formación geológica que hemos llamado *meceta mercedeña,* y los gres ferruginosos del oeste correntino forman el plato donde se depositan las aguas ;

3ª Las aguas del Iberá desagótanse desde el extremo norte (el pueblo de Ituzaingó) al Paraná sur por el río Corrientes por una

parte y al Uruguay por el Miriñay por otra. Esta disposición es notable:

4ª En el estado actual de los conocimientos geológicos del suelo correntino y vistas las discrepancias entre sabios como D'Orbigny y Ameghino y en las precarias condiciones en que se llevó á cabo nuestra exploración, queda en suspenso la cuestión del terciario en el Iberá. Nos limitamos á señalar la barranca de Caá-Guazú y la del Aguará-Buguay como puntos de interés en el estudio de ese posible terciario iberano:

5ª Respecto á la cronohidrología ó geohidrología la cuchilla de areniscas fuscas que cortan el río Corrientes entre Santa Rosa y Salamanca nos parecen necesitar muy especial estudio. Es posible que ese estudio abone la opinión de que el río Corrientes es reciente con relación al Iberá y que ésta no es sino el resto de una antigua *hernia* cuya estoma estaba en la región de Ituzaingó;

6ª El Iberá es una vasta turbera en formación;

7ª La pobreza de fauna de toda la región del Iberá se explica, después de nuestra comprobación, por su naturaleza misma.

La exploración, á la que le fué casi imposible traer colecciones ha aumentado el grupo de los moluscos del género Bulimulus con el B. Pouysseguri con que nos ha honrado el doctor E. L. Holmberg;

8ª Se ha comprobado la existencia de ombúes, pero la exploración nada puede decir sobre la cuestión del centro de dispersión de esta Phytolacacea;

9ª Todos los problemas generales que suscita el Iberá, especialmente los de su fauna y su flora han menester del estudio *in situ* por muchos especialistas que dispongan de comodidad y de tiempo.

## CONCLUSIONES DE IMPORTANCIA MEDIATA

Estas conclusiones interesan en alto grado a la geografía económica de las repúblicas del Brasil y del Uruguay tanto como á la nuestra y son problemas que habían de resolverse de común acuerdo. Para la claridad de las deducciones es necesario tener presente que:

1° Las aguas del Iberá, cuya cota es de 10 metros superior á la del Paraná en estiaje, en Ituzaingó, descienden por el Iberá y luego por el Corrientes por una parte y por el Miriñay por otra, desagotándose en el bajo Paraná (Esquina) y el Uruguay. (Este segundo desagote es particularmente interesante);

2° Sin poder precisar la profundidad á la que se encuentra el fondo impermeable que forma el Iberá, las arenas y sedimentaciones y embalsados convertidos en turberas alcanzan potencias de dos metros y más, lo que da una constitución que permitirá una canalización;

3° Las crecientes ó avenidas de los ríos Paraná y Uruguay no coinciden, es decir, que cuando el Paraná crece el Uruguay suele estar en estiaje.

## CONCLUSIÓN

Libramos á la reflexión de los gobiernos brasileño, uruguayo y del nuestro y al estudio de sus ingenieros el proyecto siguiente:

Aprovechando las condiciones excepcionales geograficohidrológicas de los ríos Paraná y Uruguay, del Iberá y de los ríos Corrientes y Miriñay, resolver, en el sentido económico de la navegación de mayor calado del Uruguay y de la evitación de las crecientes del Alto Paraná, el problema de la canalización del Iberá.

Ese problema que somos los primeros en indicar y que deducimos del estudio del Iberá, justifica la misión con que nos ha honrado la Sociedad científica argentina.

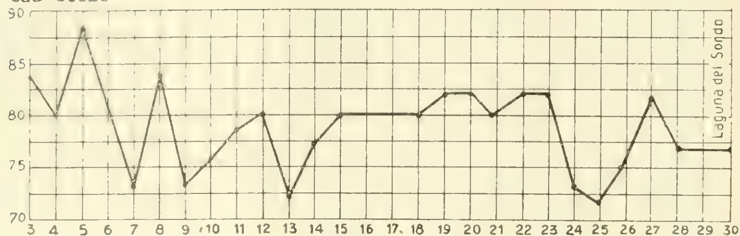
Al terminar este informe expresamos el deseo de no morir sin ver realizada esa obra.

HIPÓLITO B. POUYSSÉGUR.

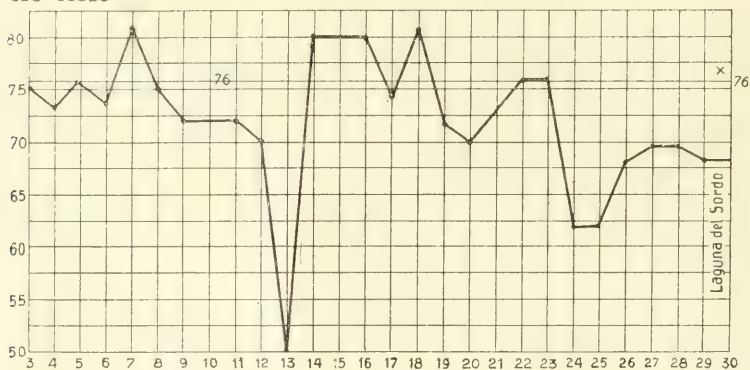
Azul, enero 6 de 1914.

El artículo publicado en las entregas V-VI, tomo LXXVIII y I-IV, tomo LXXIX, de estos *Anales*, bajo el título *Expedición al Iberá*, es un extracto del informe que presentó el señor Hipólito B. Pouysségur á la comisión directiva de la Sociedad científica argentina. (*Nota de la Red.*)

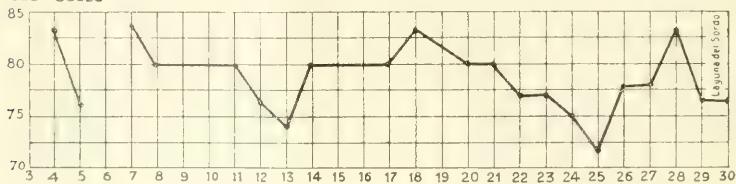
Cuadro higrométrico en junio de 1910



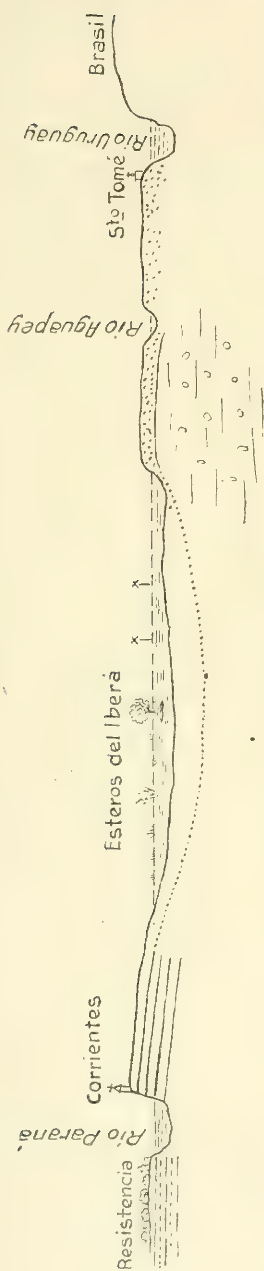

Á las 8 antemeridiano



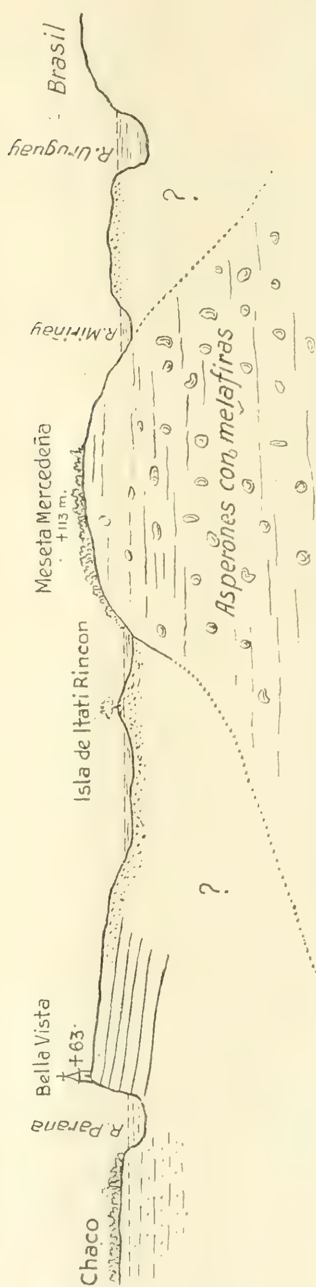

Á las 12 meridiano



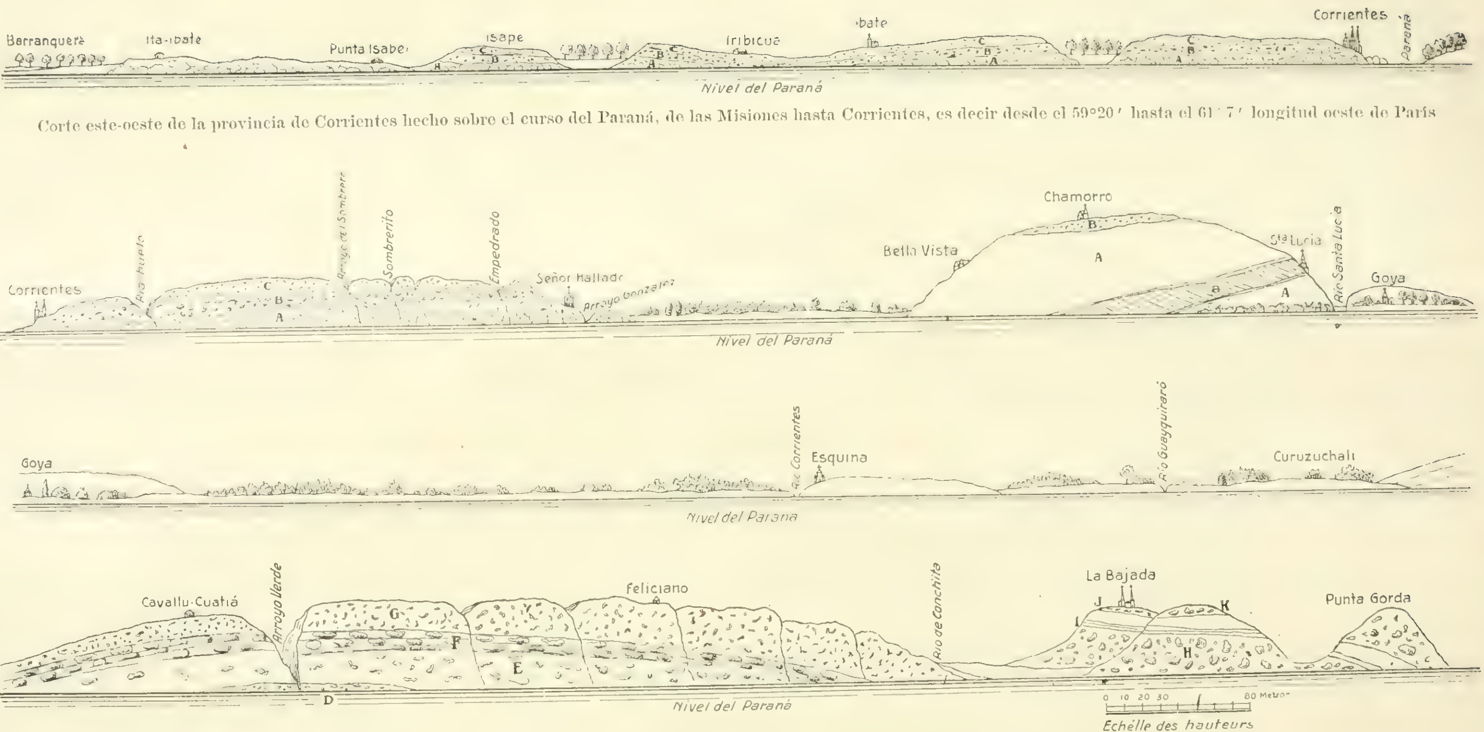

Á las 8 postmeridiano




Corte geológico de la provincia de Corrientes por el paralelo 27°30'




Corte geológico de la provincia de Corrientes por el paralelo 29°




Corte este-oeste de la provincia de Corrientes hecho sobre el curso del Paraná, de las Misiones hasta Corrientes, es decir desde el 59°20′ hasta el 61°7′ longitud oeste de París

Geología del curso del Paraná (orilla izquierda) desde Corrientes, 27°30′, hasta la Bajada; 32° de latitud sur (ciento veinte leguas geográficas de largo en la dirección sur, 17° al oeste. A, arenisca ferruginosa; B, calcáreo con hierro hidratado; C, arcilla yesosa; D, arenisca terciaria marina; E, arenisca con huesos; F, calcáreo tabicado; G, arcilla gris; H, arenisca ostrense; I, calcáreo arenoso; J, arenisca cuarzosa; K, arcilla pampeana.

# LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES

## ESTUDIO QUÍMICO, BACTERIOLÓGICO, GEOLÓGICO É HIGIÉNICO

POR EL DOCTOR ATILIO A. BADO
Jefe del laboratorio químico y de ensayo de materiales de las Obras sanitarias de la Nación

*(Conclusión)*

---

### DÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Giribone, 520 | Rosetti, 130 | Rosetti, 18 |
|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina débil | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | |
| Dureza total | 8.0 | 2.0 | 8.0 |
| — temporaria | 4.0 | 1.5 | 5.0 |
| — permanente | 4.0 | 0.5 | 3.0 |
| Residuo á 105° C | 0.42700 | 0.43100 | 0.41600 |
| Cloro | 0.02130 | 0.01420 | 0.03195 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | 0.01250 | 0.0 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00010 | 0.00105 | 0.00120 |

DÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Cabildo, 293 | Estados, 3520 | Estados, 3556 | Moldes, 673 | Moldes, 785 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Límpido | Turbio | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Nulo | Nulo | Nulo | Nulo | Reg. cantid. |
| Aspecto del residuo | » | » | » | » | Ferruginos. |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.6640 | 0.5930 | 0.3640 | 0.5590 | 0.9118 |
| — á 180° C | 0.6594 | 0.5862 | 0.3529 | 0.5560 | 0.9048 |
| — al rojo débil | 0.6330 | 0.5744 | 0.3435 | 0.5504 | 0.8994 |
| Dureza total | 14.0 | 3.5 | 10.5 | 10.0 | 10.0 |
| — temporaria | 12.0 | 2.5 | 9.5 | 8.5 | 7.0 |
| — permanente | 2.0 | 1.0 | 1.0 | 1.5 | 3.0 |
| Alcalinidad | 0.43520 | 0.35640 | 0.17650 | 0.32930 | 0.70000 |
| Permanganato empleado | 0.00514 | 0.00039 | 0.00039 | 0.00079 | 0.00039 |
| Oxígeno consumido | 0.00130 | 0.00010 | 0.00010 | 0.00020 | 0.00010 |
| Cloro | 0.03905 | 0.01775 | 0.01420 | 0.01420 | 0.01065 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | 0.00412 | v. | 0.0 |
| — nítrico | 0.00750 | 0.03800 | 0.02500 | 0.02100 | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06160 | 0.05040 | 0.04480 | 0.06680 | 0.06740 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.19497 | 0.15970 | 0.07911 | 0.14764 | 0.31360 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.03520 | 0.00600 | 0.03520 | 0.02830 | 0.03600 |
| — de magnesio | 0.01931 | 0.00158 | 0.00504 | 0.01081 | 0.00378 |
| — de sodio | 0.30661 | 0.31504 | 0.14541 | 0.25414 | 0.47194 |
| — de potasio | » | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00200 | v. | 0.00150 | v. | 0.00146 |
| — de hierro | 0.00205 | 0.00070 | 0.00170 | 0.00580 | 0.00237 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00376 | v. | 0.00282 | v. | 0.00274 |
| — de sodio | 0.12165 | 0.10246 | 0.08827 | 0.13580 | 0.13444 |
| Cloruro de sodio | 0.06435 | 0.02935 | 0.02340 | 0.02340 | 0.01755 |
| Nitrato de potasio | 0.01403 | 0.07106 | 0.04675 | 0.03297 | v. |
| Carbonato ferroso | 0.00330 | 0.00113 | 0.00274 | 0.00934 | 0.00381 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | 0.00700 | v. | » |
| Bicarbonato de calcio | 0.10179 | 0.01736 | 0.09347 | 0.08329 | 0.10411 |
| — de magnesio | 0.07037 | 0.00579 | 0.01838 | 0.03945 | 0.01378 |
| Carbonato de sodio | 0.34901 | 0.36824 | 0.11861 | 0.26407 | 0.67405 |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Amenabar, 2869 | Arredondo, 3138 | Arredondo, 3048 | Aviles, 2787-93 | Páez, 426 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Turbio | Opalino | Opalino |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Nulo | Nulo | Escaso | Escaso | Muy escaso |
| Aspecto del residuo | » | » | Arcilloso | Arenoso | Arenoso |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.7834 | 0.5762 | 0.5600 | 0.5490 | 0.5814 |
| — á 180° C | 0.7793 | 0.5589 | 0.5430 | 0.5325 | 0.5800 |
| — al rojo débil | 0.7588 | 0.5306 | 0.5232 | 0.5216 | 0.5608 |
| Dureza total | 26.0 | 14.0 | 20.0 | 20.0 | 4.0 |
| — temporaria | 25.0 | 12.0 | 17.0 | 19.0 | 3.0 |
| — permanente | 1.0 | 4.0 | 3.0 | 1.0 | 1.0 |
| Alcalinidad | 0.44660 | 0.37350 | 0.30210 | 0.31600 | 0.32430 |
| Permanganato empleado | 0.00237 | 0.00355 | 0.00355 | 0.00118 | 0.00158 |
| Oxígeno consumido | 0.00060 | 0.00090 | 0.00090 | 0.00030 | 0.00040 |
| Cloro | 0.04970 | 0.00710 | 0.01065 | 0.01420 | 0.01775 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | v. | 0.00652 | v. |
| — nítrico | 0.02950 | 0.00625 | 0.01870 | 0.02500 | 0.02500 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.08580 | 0.07080 | 0.08600 | 0.06240 | 0.07700 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.19907 | 0.16735 | 0.13535 | 0.14143 | 0.14530 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.08680 | 0.04040 | 0.03600 | 0.07120 | 0.01040 |
| — de magnesio | 0.04194 | 0.01455 | 0.01153 | 0.02399 | 0.00331 |
| — de sodio | 0.25524 | 0.24998 | 0.24217 | 0.16166 | 0.30320 |
| — de potasio | » | » | » | 0.02175 | » |
| — de aluminio | 0.00159 | 0.00044 | 0.00278 | 0.00336 | 0.00090 |
| — de hierro | 0.00245 | 0.00356 | 0.00262 | 0.00084 | 0.00113 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00299 | 0.00082 | 0.00523 | 0.00632 | 0.00169 |
| — de sodio | 0.17158 | 0.14316 | 0.16965 | 0.12165 | 0.15493 |
| Cloruro de sodio | 0.08190 | 0.01170 | 0.01755 | 0.02340 | 0.02925 |
| Nitrato de potasio | 0.05517 | 0.01169 | 0.03497 | 0.04675 | 0.04675 |
| Carbonato ferroso | 0.00394 | 0.00573 | 0.00422 | 0.00151 | 0.00182 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | v. | 0.01108 | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.25104 | 0.11686 | 0.10412 | 0.19274 | 0.03006 |
| — de magnesio | 0.15307 | 0.04721 | 0.04207 | 0.08755 | 0.01207 |
| Carbonato de sodio | 0.20066 | 0.28307 | 0.22289 | 0.14950 | 0.32004 |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Chacarita, 2480 | Chacarita, 2615 | Céspedes, 8009 | Conde, 2466 | Conde, 3659 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Límpido | Opalino | Opalino |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Nulo | Muy escaso | Muy escaso | Nulo | Nulo |
| Aspecto del residuo | » | Arcilloso | Arcilloso | » | » |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.6142 | 0.7362 | 0.6244 | 0.5664 | 0.5220 |
| — á 180° C | 0.6047 | 0.7204 | 0.5960 | 0.5530 | 0.5185 |
| — al rojo débil | 0.5936 | 0.7076 | 0.5776 | 0.5444 | 0.5140 |
| Dureza total | 12.0 | 18.0 | 12.0 | 18.0 | 8.0 |
| — temporaria | 9.0 | 10.0 | 10.5 | 15.0 | 7.5 |
| — permanente | 3.0 | 8.0 | 1.5 | 3.0 | 0.5 |
| Alcalinidad | 0.40110 | 0.48290 | 0.33870 | 0.40150 | 0.29980 |
| Permanganato empleado | 0.00079 | 0.00197 | 0.00434 | 0.00276 | 0.00039 |
| Oxígeno consumido | 0.00020 | 0.00050 | 0.00110 | 0.00070 | 0.00010 |
| Cloro | 0.02130 | 0.04260 | 0.03195 | 0.00710 | 0.01420 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | 0.02334 | v. | 0.01682 |
| — nítrico | 0.01870 | 0.00937 | 0.01250 | v. | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.05210 | 0.06110 | 0.08480 | 0.05780 | 0.07400 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.17971 | 0.21637 | 0.15173 | 0.17989 | 0.13428 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. |
| Oxido de calcio | 0.02700 | 0.04400 | 0.02320 | 0.06110 | 0.03080 |
| — de magnesio | 0.00097 | 0.01571 | 0.00951 | 0.01268 | 0.01023 |
| — de sodio | 0.30815 | 0.33701 | 0.30317 | 0.22784 | 0.23962 |
| — de potasio | » | » | 0.01087 | » | » |
| — de aluminio | 0.00082 | 0.00183 | 0.00215 | 0.00402 | 0.00075 |
| — de hierro | 0.00123 | 0.00201 | 0.00225 | 0.00318 | 0.00089 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00154 | 0.00344 | 0.00404 | 0.00756 | 0.00141 |
| — de sodio | 0.10445 | 0.12094 | 0.16855 | 0.11433 | 0.14910 |
| Cloruro de sodio | 0.03510 | 0.07020 | 0.05265 | 0.01170 | 0.02340 |
| Nitrato de potasio | 0.03497 | 0.01752 | 0.02337 | v. | v. |
| Carbonato ferroso | 0.00198 | 9.00324 | 0.00362 | 0.00512 | 0.00143 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | 0.03969 | v. | 0.02859 |
| Bicarbonato de calcio | 0.07808 | 0.12725 | 0.01983 | 0.17670 | 0.05503 |
| — de magnesio | 0.00353 | 0.05733 | 0.03470 | 0.04527 | 0.03766 |
| Carbonato de sodio | 0.37642 | 0.39351 | 0.32414 | 0.27957 | 0.25892 |
| Cloruro de amonio | » | » | » | » | v. |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Dorrego, 1465 | Estados, 3520 | Estados, 3595 | Estados, 3565 | Freyre, 1142 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Límpido | Turbio | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalino | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Regular | Nulo | Escaso | Nulo | Nulo |
| Aspecto del residuo | Arcilloso | » | Are-ferrug. | » | » |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5496 | 0.5842 | 0.5972 | 0.6134 | 0.4780 |
| — á 180° C | 0.5454 | 0.5802 | 0.5941 | 0.6030 | 0.4681 |
| — al rojo débil | 0.5238 | 0.5668 | 0.5760 | 0.5996 | 0.4410 |
| Dureza total | 6.0 | 10.0 | 8.0 | 6.0 | 18.0 |
| — temporaria | 3.0 | 6.0 | 3.0 | 4.0 | 11.0 |
| — permanente | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 4.0 | 7.0 |
| Alcalinidad | 0.35770 | 0.36710 | 0.36030 | 0.41140 | 0.18800 |
| Permanganato empleado | 0.00118 | 0.00079 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00276 |
| Oxígeno consumido | 0.00030 | 0.00020 | 0.00040 | 0.00040 | 0.00070 |
| Cloro | 0.01420 | 0.01420 | 0.02130 | 0.01420 | 0.01065 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | v. | v. | 0.0 |
| — nítrico | 0.00468 | 0.01870 | 0.01870 | 0.02500 | 0.03740 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06860 | 0.06200 | 0.06000 | 0.05270 | 0.08960 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.16027 | 0.16447 | 0.16015 | 0.18432 | 0.08417 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. |
| Oxido de calcio | 0.01280 | 0.00560 | 0.02000 | 0.13120 | 0.02880 |
| — de magnesio | 0.00216 | 0.00259 | 0.00792 | 0.00105 | 0.01124 |
| — de sodio | 0.28866 | 0.30303 | 0.30511 | 0.19854 | 0.20115 |
| — de potasio | » | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00080 | 0.00599 | 0.00250 | 0.00141 | 0.00319 |
| — de hierro | 0.00140 | 0.00681 | 0.00230 | 0.00197 | 0.00281 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00150 | 0.01127 | 0.00470 | 0.00265 | 0.00600 |
| — de sodio | 0.12787 | 0.11521 | 0.11750 | 0.10468 | 0.17644 |
| Cloruro de sodio | 0.02340 | 0.02340 | 0.03510 | 0.02340 | 0.01755 |
| Nitrato de potasio | 0.00875 | 0.03497 | 0.03497 | 0.03675 | 0.06995 |
| Carbonato ferroso | 0.00225 | 0.01097 | 0.00370 | 0.00317 | 0.00463 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | v. | v. | » |
| Bicarbonato de calcio | 0.03902 | 0.01618 | 0.02378 | 0.37946 | 0.08329 |
| — de magnesio | 0.00788 | 0.00994 | 0.02890 | 0.00383 | 0.04101 |
| Carbonato de sodio | 0.35423 | 0.36885 | 0.35993 | 0.19017 | 0.11854 |
| Cloruro de amonio | » | » | » | » | v. |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | General Paz, 324 | J^na Azurduy, 3841 | Moldes, 785 | Olleros, 3006 | Olaguer, 3160 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Escaso | Nulo | Regular | Muy escaso | Nulo |
| Aspecto del residuo | Arcilloso | » | Ferrugin. | Arcilloso | » |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.6620 | 0.5742 | 0.9118 | 0.6084 | 0.5778 |
| — á 180° C | 0.6587 | 0.5702 | 0.9048 | 0.5940 | 0.5620 |
| — al rojo débil | 0.6417 | 0.5600 | 0.8994 | 0.5770 | 0.5472 |
| Dureza total | 8.0 | 4.0 | 10.0 | 16.0 | 20.0 |
| — temporaria | 5.0 | 3.5 | 7.0 | 8.0 | 17.0 |
| — permanente | 3.0 | 0.5 | 3.0 | 8.0 | 3.0 |
| Alcalinidad | 0.43070 | 0.37730 | 0.70000 | 0.35480 | 0.36630 |
| Permanganato empleado | 0.00197 | 0.00039 | 0.00039 | 0.00395 | 0.00355 |
| Oxígeno consumido | 0.00050 | 0.00010 | 0.00010 | 0.00100 | 0.00090 |
| Cloro | 0.02840 | 0.01420 | 0.01065 | 0.01775 | 0.00710 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | 0.0 | v. | v. |
| — nítrico | 0.01250 | v. | v. | 0.04200 | 0.00625 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06540 | 0.07000 | 0.06740 | 0.05680 | 0.07720 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.19300 | 0.16905 | 0.31360 | 0.15900 | 0.16412 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.01700 | 0.00720 | 0.03600 | 0.03680 | 0.04460 |
| — de magnesio | 0.00727 | 0.00446 | 0.00378 | 0.01614 | 0.01758 |
| — de sodio | 0.34001 | 0.30561 | 0.47194 | 0.26620 | 0.24280 |
| — de potasio | » | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.90144 | 0.00175 | 0.00146 | 0.00154 | 0.00025 |
| — de hierro | 0.00175 | 0.00110 | 0.00237 | 0.00175 | 0.00375 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00271 | 0.00329 | 0.00274 | 0.00290 | 0.00047 |
| — de sodio | 0.13037 | 0.13918 | 0.13444 | 0.11271 | 0.15650 |
| Cloruro de sodio | 0.04680 | 0.02340 | 0.01755 | 0.02925 | 0.01170 |
| Nitrato de potasio | 0.02337 | v. | v. | 0.07855 | 0.01169 |
| Carbonato ferroso | 0.00282 | 0.00177 | 0.00381 | 0.00282 | 0.00604 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | » | v. | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.04916 | 0.02082 | 0.10411 | 0.10643 | 0.12895 |
| — de magnesio | 0.02653 | 0.01627 | 0.01378 | 0.05891 | 0.06415 |
| Carbonato de sodio | 0.40701 | 0.38033 | 0.67405 | 0.26815 | 0.25905 |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Republiquetas, 2775 | Ushuaia, 3114 | Zapata, 343 |
|---|---|---|---|
| Color | Opalino | Límpido | Incoloro |
| Aspecto en frío | Turbio | Opalino | Límpido |
| — en caliente | Lig. opalino | Incoloro | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Muy escaso | Nulo | Escaso |
| Aspecto del residuo | Arcilloso | » | Arcilloso |
| *Datos químicos* | | | |
| Residuo á 105° C | 0.4936 | 0.6464 | 0.6410 |
| — á 180° C | 0.4869 | 0.6350 | 0.6357 |
| — al rojo débil | 0.4768 | 0.6239 | 0.6166 |
| Dureza total | 4.0 | 8.0 | 12.0 |
| — temporaria | 1.0 | 6.0 | 10.0 |
| — permanente | 3.0 | 2.0 | 2.0 |
| Alcalinidad | 0.33430 | 0.41470 | 0.38120 |
| Permanganato empleado | 0.00592 | 0.00079 | 0.00197 |
| Oxígeno consumido | 0.00150 | 0.00020 | 0.00050 |
| Cloro | 0.01420 | 0.01775 | 0.03195 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | 0.0 |
| — nítrico | v. | 0.01870 | 0.02500 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.05280 | 0.06130 | 0.06560 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.14977 | 0.18764 | 0.17078 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.00800 | 0.01900 | 0.02880 |
| — de magnesio | 0.00807 | 0.00793 | 0.01102 |
| — de sodio | 0.25280 | 0.32309 | 0.30556 |
| — de potasio | » | » | » |
| — de hierro | 0.00142 | 0.00170 | 0.00064 |
| — de aluminio | 0.00303 | 0.00193 | 0.00356 |
| *Combinaciones* | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00267 | 0.00319 | 0.00120 |
| — de sodio | 0.10480 | 0.12159 | 0.13222 |
| Cloruro de sodio | 0.02340 | 0.02920 | 0.05265 |
| Nitrato de potasio | v. | 0.03497 | 0.04675 |
| Carbonato ferroso | 0.00488 | 0.00310 | 0.00573 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | » |
| Bicarbonato de calcio | 0.02314 | 0.05475 | 0.08329 |
| — de magnesio | 0.02946 | 0.02893 | 0.04021 |
| Carbonato de sodio | 0.31992 | 0.39237 | 0.32259 |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Amenabar, 129 | Amenabar, 473 | Amenabar, 1361-69 | Aviles, 3042 | Av. Vértiz, 1350 | Baigorria 3153 | Bebedero, 4492 | Blandengues, esquina Zabala | Bucarelli, entre Mendoza y Juramento |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Opalino | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Insípido | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alc. débil | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alc. débil | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 10.0 | 12.0 | 16.0 | 17.0 | 8.0 | 16.0 | 13.0 | 6.0 | 9.0 |
| — temporaria | 7.0 | 9.0 | 15.0 | 12.0 | 7.0 | 15.5 | 9.0 | 5.0 | 7.0 |
| — permanente | 3.0 | 3.0 | 1.0 | 5.0 | 1.0 | 0.5 | 4.0 | 1.0 | 2 0 |
| Residuo á 105° C | 0.46900 | 0.60700 | 0.76600 | 0.49600 | 0.57400 | 0.38600 | 0.48500 | 0.52900 | 0.59100 |
| Cloro | 0.0177 | 0.01420 | 0.01420 | 0.0177 | 0.02130 | 0.02840 | 0.02840 | 0.01775 | 0.01420 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | 9.05000 | 0.02500 | v. | v. | 0.01475 | v. | v. | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00020 | 0.00070 | 0.00160 | 0.00010 | 0.00090 | 0.00015 | 0.00015 | 0.000085 | 0.00090 |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Cuba, entre Guayra y Apipé | Cabildo, 3346 | Conesa, 819 | Conesa, 1171 | Conesa, 899 | Crámer, 930 | Crámer, 858 | Crámer, 858 | Céspedes, 2860 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | » | Opalino | Opalino | Opalino | Opalino | Opalino | Turbio | Opalino |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Insípido | Insípido | Insípido | Insípido | Insípido | Insípido | Insípido | Agradable | Insípido |
| Reacción | Alc. débil | Alc. débil | Alcalina | Alc. débil | Alc. débil | Alcalina | Alc. débil | Alcalina | Alc. débil |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 16.0 | 6.0 | 10.0 | 14.0 | 9.0 | 12.0 | 10.0 | 9.0 | 12.0 |
| — temporaria | 9.0 | 4.0 | 7.0 | 9.0 | 2.0 | 8.0 | 6.0 | 7.0 | 7.0 |
| — permanente | 7.0 | 2.0 | 3.0 | 5.0 | 7.0 | 4.0 | 4.0 | 2.0 | 5.0 |
| Residuo á 105° C | 0.6120 | 0.4830 | 0.4840 | 0.5770 | 0.4810 | 0.4950 | 0.5080 | 0.5140 | 0.46500 |
| Cloro | 0.0390 | 0.0117 | 0.0248 | 0.0213 | 0.0218 | 0.0351 | 0.0218 | 0.0142 | 0.02130 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | » | » | » | » | » | » | v. | » |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00040 | 0.00025 | 0.00015 | 0.00025 | 0.00015 | 0.00020 | 0.00020 | 0.00095 | 0.00015 |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Chacarita, 2641 | Chacarita, entre Arce y Blandengues | Cespedes 2881 | Cespedes, 2843 | Estomba, 2854-68 | Esteco, 2885 | Freyre, 950-52 | General Paz, 1236 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Lig. opalino | Opalino | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Opalino | Opalino | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Insípido | Insípido | Agradable | Insípido | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | |
| Dureza total | 6.0 | 6.0 | 15.0 | 18.0 | 16.0 | 10.0 | 5.0 | 20.0 |
| — temporaria | 3.0 | 5.5 | 11.0 | 12.0 | 11.0 | 6.0 | 4.0 | 14.0 |
| — permanente | 3.0 | 0.5 | 4.0 | 6.0 | 5.0 | 4.0 | 1.0 | 6.0 |
| Residuo á 105° C | 0.56200 | 0.46000 | 0.5180 | 0.5750 | 0.68500 | 0.4930 | 0.6410 | 0.62000 |
| Cloro | 0.02485 | 0.01420 | 0.0219 | 0 0355 | 0.01420 | 0.0213 | 0.0142 | 0.01775 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.02300 | v. | » | » | v. | » | 0.02500 | 0.05000 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00060 | 0.00010 | 0.00025 | 0.00035 | 0.00110 | 0.00010 | 0.00180 | 0.00015 |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Giribone, 283 | Guanacache, 2232 | Martinez, 666 | Obligado, 1472 | Olleros y Migueletes | O'Higgins y Palpa | O'Higgins, 3150 pozo nº 1 | Palpa, 3030 | Palpa, 2974 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Lig. opal. | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Límpido | Opalino | Opalino | Turbio | Turbio | Límpido | Opalino | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Insípido | Insípido | Agradable | Agradable | Agradable | Insípido | Insípido |
| Reaccion | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alc. débil | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 2.0 | 8.0 | 9.5 | 16.0 | 13.0 | 9.0 | 17.0 | 10.0 | 10.0 |
| — temporaria | 1.0 | 3.0 | 8.0 | 12.0 | 10.0 | 6.5 | 17.0 | 7.0 | 5.0 |
| — permanente | 1.0 | 5.0 | 1.5 | 4.0 | 3.0 | 2.5 | 0.0 | 3.0 | 5.0 |
| Residuo á 105° C | 0.6700 | 0.29500 | 0.5480 | 0.5070 | 0.5790 | 0.6010 | 0.75100 | 0.4230 | 0.4750 |
| Cloro | 0.0142 | 0.02130 | 0.0169 | 0.0248 | 0.0284 | 0.02485 | 0.03720 | 0.0177 | 0.0213 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.01250 | v. | 0.05000 | » | 0.03650 | 0.01250 | v. | » | » |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00010 | 0.00070 | 0.00175 | 0.00025 | 0.00215 | 0.00015 | 0.00110 | 0.00015 | 0.00015 |

UNDÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Manuel Pedraza, 1781 | Ushuaia, 3151 | Ushuaia, 3967 | Zapata, entre Chacarita y Maure | Zapiola, 765 | Zapiola, 786 | Zapiola, 831 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Opalino | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina débil | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | |
| Dureza total | 13.0 | 7.0 | 1.5 | 26.0 | 9.0 | 16.0 | 16.0 |
| — temporaria | 10.0 | 5.0 | 0.5 | 22.0 | 6.0 | 12.0 | 13.0 |
| — permanente | 3.0 | 2.0 | 1.0 | 4.0 | 3.0 | 4.0 | 3.0 |
| Cloro | 0.5790 | 0.4220 | 0.54700 | 1.1370 | 0.43500 | 0.54900 | 0.5250 |
| Residuo á 105° C. | 0.0284 | 0.0281 | 0.02130 | 0.0142 | 0.0177 | 0.0177 | 0.0213 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.03650 | » | 0.02100 | 0.01250 | » | 0.02500 | 0.05000 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00215 | 0.00035 | 0.00010 | 0.00075 | 0.00020 | 0.00015 | 0.00010 |

DUODÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Guevara, entre Leones y Chacarita | Guevara, 311 | Sapaleri, esquina Bella Vista | Grecia, 75 pozo nº 1 | Grecia, 75 pozo nº 2 | Congreso, 2265 | Congreso, 2963 | Donado, 943 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agrabable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alc. débil | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | |
| Dureza total | 8.0 | 8.0 | 20.0 | 16.0 | 16.0 | 9.5 | 11.5 | 7.5 |
| — temporaria | 3.0 | 4.0 | 14.0 | 14.0 | 11.0 | 8.5 | 11.0 | 6.0 |
| — permanente | 5.0 | 4.0 | 6.0 | 2.0 | 5.0 | 1.0 | 0.5 | 1.5 |
| Amoníaco | 0.0 | v. | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Residuo á 105° C | 0.40800 | 0.37500 | 0.53600 | 0.72900 | 0.65100 | 0.60900 | 0.50800 | 0.57400 |
| Cloro | 0.02190 | 0.04615 | 0.02130 | 0.04260 | 0.02840 | 0.02130 | 0.01065 | 0.01065 |
| Anhídrido nítrico | 0.02500 | v. | » | v. | 0.02500 | 0.01900 | v. | » |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00010 | 0.00120 | 0.00025 | 0.00075 | 0.00075 | 0.00180 | 0.00030 | 0.00030 |

DUODÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Amenabar, 3249 | Amenabar, 2955-69 | Amenabar, 3265 | Freyre, 3554 | Cramer, 3662 | Cabildo, 32[illegible]2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Inodoro |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | |
| Dureza total | 9.0 | 8.0 | 8.5 | 8.0 | 3.5 | 14.0 |
| — temporaria | 6.0 | 6.0 | 7.5 | 6.0 | 2.5 | 9.0 |
| — permanente | 3.0 | 2.0 | 1.0 | 2.0 | 1.0 | 5.0 |
| Residuo á 105° C | 0.66000 | 0.60500 | 0.61100 | 0.59700 | 0.68300 | 0.60400 |
| Cloro | 0.03905 | 0.02485 | 0.03550 | 0.01120 | 0.01120 | 0.05325 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.01475 | 0.00500 | 0.00750 | 0.0 | v. | 0.02100 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00080 | 0.00100 | 0.00070 | 0.00030 | 0.00080 | 0.00060 |

DUODÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Manzanares, Superí y Conde | J. Azurduy, 3841 | Republiquetas, 2695 | Amenabar, 2869 |
|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Límpido | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Nulo | Nulo | Nulo | Nulo |
| Aspecto del residuo | » | » | » | » |
| *Datos químicos* | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5180 | 0.5742 | 0.5920 | 0.7040 |
| — á 180° C | 0.5135 | 0.5702 | 0.5800 | 0.6999 |
| — al rojo débil | 0.5002 | 0.5600 | 0.5700 | 0.6905 |
| Dureza total | 9.0 | 4.0 | 2.0 | 34.0 |
| — temporaria | 8.5 | 3.5 | 1.5 | 33.5 |
| — permanente | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 1.0 |
| Alcalinidad | 0.40920 | 0.37730 | 0.39200 | 0.40490 |
| Permanganato empleado | 0.00039 | 0.00039 | 0.00039 | 0.00276 |
| Oxígeno consumido | 0.00010 | 0.00010 | 0.00010 | 0.00070 |
| Cloro | 0.01420 | 0.01420 | 0.01420 | 0.04260 |
| Anhídrido sulfúrico | 0.01373 | v. | v. | 0.01304 |
| — nítrico | 0.0 | v. | v. | 0.01250 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06600 | 0.07000 | 0.06600 | 0.08600 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.18335 | 0.16905 | 0.17550 | 0.18140 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxido de calcio | 0.03080 | 0.00720 | 0.00440 | 0.08200 |
| — de magnesio | 0.01297 | 0.00446 | 0.00072 | 0.03675 |
| — de sodio | 0.29409 | 0.30561 | 0.31932 | 0.25300 |
| — de potasio | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00080 | 0.00175 | 0.00104 | 0.00110 |
| — de hierro | 0.00075 | 0.00110 | 0.00200 | 0.00110 |
| *Combinaciones* | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00150 | 0.00329 | 0.00196 | 0.00207 |
| — de sodio | 0.13275 | 0.13918 | 0.13230 | 0.17236 |
| Cloruro de sodio | 0.02340 | 0.02340 | 0.02340 | 0.07020 |
| Nitrato de potasio | » | v. | v. | 0.02337 |
| Carbonato ferroso | 0.00121 | 0.00177 | 0.00322 | 0.00177 |
| Sulfato de calcio | 0.02334 | v. | v. | 0.02217 |
| Bicarbonato de calcio | 0.06129 | 0.02082 | 0.01272 | 0.21066 |
| — de magnesio | 0.04733 | 0.01627 | 0.00262 | 0.13413 |
| Carbonato de sodio | 0.36623 | 0.38033 | 0.40975 | 0.20017 |

DUODÉCIMA ZONA

| Caracteres físicos | Forest, 451 | Amenábar y J. Azurduy | Republiquetas, 2626 | Isla de Cuba, 4388 |
|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Opalino | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Límpido | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Regular | Muy escaso | Nulo | Nulo |
| Aspecto del residuo | Arc. ferrug. | Arcilloso | » | » |
| | *Datos químicos* | | | |
| Residuo á 105° C | 0.6656 | 0.5816 | 0.9816 | 1.6560 |
| — á 180 C | 0.6604 | 0.5787 | 0.9797 | 1.6414 |
| — al rojo débil | 0.6560 | 0.5538 | 0.9724 | 1.6236 |
| Dureza total | 2.0 | 5.0 | 5.0 | 12.5 |
| — temporaria | 0.0 | 2.0 | 1.0 | 12.0 |
| — permanente | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 0.5 |
| Alcalinidad | 0.38250 | 0.37610 | 0.59080 | 0.39440 |
| Permanganato empleado | 0.00079 | 0.00276 | 0.00633 | 0.00316 |
| Oxígeno consumido | 0.00020 | 0.00070 | 0.00160 | 0.00080 |
| Cloro | 0.02485 | 0.01775 | 0.05680 | 0.02485 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | 0.01648 | v. |
| — nítrico | 0.05000 | v. | 0.05000 | 0.02950 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. |
| — silícico | 0.05760 | 0.07280 | 0.06420 | 0.06360 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.17138 | 0.16847 | 0.26450 | 0.17668 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.01000 | 0.01160 | 0.00720 | 0.05800 |
| — de magnesio | 0.00648 | 0.00605 | 0.00764 | 0.00749 |
| — de sodio | 0.34167 | 0.30367 | 0.52060 | 0.28396 |
| — de potasio | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00195 | 0.00110 | 0.00121 | v. |
| — de hierro | 0.00205 | 0.00135 | 0.00144 | 0.00390 |
| | *Combinaciones* | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00367 | 0.00207 | 0.00227 | v. |
| — de sodio | 0.11360 | 0.14603 | 0.12836 | 0.12930 |
| Cloruro de sodio | 0.04095 | 0.02925 | 0.09360 | 0.04095 |
| Nitrato de potasio | 0.09351 | v. | 0.09351 | 0.05517 |
| — de sodio | » | » | » | v. |
| Carbonato ferroso | 0.00330 | 0.00217 | 0.00231 | 0.00628 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | 0.01743 | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.02892 | 0.03354 | » | 0.16774 |
| Sulfato de magnesio | » | » | 0.00930 | » |
| Bicarbonato de magnesio | 0.02364 | 0.02208 | 0.01591 | 0.02733 |
| Carbonato de sodio | 0.37390 | 0.36576 | 0.62371 | 0.29041 |

DÉCIMATERCERA ZONA

| Caracteres físicos | Congreso, 2265 | Congreso, 2963 | Congreso, 3049 | Monroe, entre Burela y Ceretti | Manuel Pedraza, 2547 | Bolivia, entre LaCines y F. C. A. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Turbio |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | |
| Dureza total | 9.5 | 11.5 | 12.0 | 11.0 | 1.0 | 10.0 |
| — temporaria | 8.5 | 11.0 | 11.5 | 10.5 | 3.5 | 8.5 |
| — permanente | 1.0 | 0.5 | 5.0 | 0.5 | 0.5 | 1.5 |
| Residuo á 105° C | 0.60900 | 0.50800 | 0.56400 | 0.57100 | 0.59000 | 0.57000 |
| Cloro | 0.02130 | 0.01605 | 0.01775 | 0.01775 | 0.01775 | 0.01420 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.01900 | v. | v. | 0.01000 | v. | 0.00500 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00180 | 0.00030 | 0.00050 | 0.00010 | 0.00010 | 0.00050 |

DÉCIMACUARTA ZONA

| Caracteres físicos | Avellaneda 4073 | Avellaneda, 3867 | Avellaneda, 4140 | Bahía Blanca, 578 y Chivilcoy, 569 | Bahía Blanca, 478 | Bogota, 3856 | Bacacay, 3815 | Bacacay, 3902 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Lig. opalino | Turbio | Lig. opalino | Lig. opalino | Turbio | Lig. opalino | Lig. opalino |
| Color | Inodoro | Incoloro | Inodoro | Inodoro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Insípido | Agradable | Agradable | Agradable | Insípido | Insípido | Insípido |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | |
| Dureza total | 16.0 | 22.0 | 30.0 | 21.0 | 22.0 | 20.0 | 21.0 | 17.0 |
| — temporaria | 12.0 | 18.0 | 22.0 | 16.0 | 17.0 | 15.0 | 14.0 | 13.0 |
| — permanente | 4.0 | 4.0 | 8.0 | 5.0 | 5.0 | 5.0 | 7.0 | 4.0 |
| Residuo á 105° C | 0.4180 | 0.5120 | 0.38800 | 0.5060 | 0.5720 | 0.6110 | 0.53000 | 0.5130 |
| Cloro | 0.0142 | 0.0177 | 0.01065 | 0.0142 | 0.0281 | 0.0177 | 0.01420 | 0.0213 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | » | 0.00168 | » | » | » | » | » |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00010 | 0.00030 | 0.00010 | 0.00020 | 0.00170 | 0.00080 | 0.00030 | 0.00060 |

DÉCIMACUARTA ZONA

| Caracteres físicos | Chivilcoy, 455 | Chivilcoy, 135 | Esperanza, 360 | Esperanza, 220 | Ensenada, 428 | Mercedes, 161 | Mercedes, 280 | Morón, 3832 | Rivadavia, 8872-74 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Opalino | Opalino | Opalino | Turbio | Opalino | Opalino | Opalino | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 17.0 | 20.0 | 21.0 | 28.0 | 30.0 | 18.0 | 22.0 | 15.0 | 22.0 |
| — temporaria | 14.0 | 15.0 | 17.0 | 12.0 | 23.0 | 15.0 | 18.0 | 11.0 | 17.0 |
| — permanente | 3.0 | 5.0 | 4.0 | 16.0 | 7.0 | 3.0 | 4.0 | 4.0 | 5.0 |
| Residuo á 105° C | 0.6180 | 0.5330 | 0.5850 | 0.6830 | 0.31800 | 0.5120 | 0.6180 | 0.4770 | 0.5930 |
| Cloro | 0.0197 | 0.0106 | 0.0071 | 0.0319 | 0.01420 | 0.0142 | 0.0142 | 0.0213 | 0.0213 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | » | » | » | 0.00500 | » | » | » | 0.02500 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00050 | 0.00020 | 0.00070 | 0.00130 | 0.00040 | 0.00020 | 0.00015 | 0.00080 | 0.00025 |


Liniers
Villa Chicago
Villa Riachuelo
Velez
Sarsfie
Cuenca
Flores
Carabobo
Once
Jujuy
Barracas
Boca



Villa
Devoto
Villa del
Parque
Urquiza
Santa Rita
Villa
Modelo
Saavedra
Villa
Mazzini
Villa
Ortuzar
Belgrano
Villa
Crespo
Villa
Malcom
Villa Alvear
Chacarita

DÉCIMACUARTA ZONA

| Caracteres físicos | Rivadavia, 8767 | San Eduardo, 4501 | San Eduardo, 3821 | Segurola, 219 | Segurola, 265 | Yerbal, 4754 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Turbio | Opalino | Opalino | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reaccion | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | |
| Dureza total | 37.0 | 14.0 | 18.0 | 23.0 | 21.0 | 24.0 |
| — temporaria | 29.0 | 11.0 | 14.0 | 18.0 | 16.0 | 19.0 |
| — permanente | 8.0 | 3.0 | 1.0 | 5.0 | 5.0 | 5.0 |
| Residuo á 105° C | 0.35700 | 0.17100 | 0.6130 | 0.5410 | 0.5630 | 0.5930 |
| Cloro | 0.01065 | 0.0177 | 0.0568 | 0.0071 | 0.0177 | 0.0213 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.00250 | » | » | » | « | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00090 | 0.00020 | 0.00020 | 0.00010 | 0.00020 | 0.00030 |

DÉCIMACUARTA ZONA

| Caracteres físicos | Candelaria, 191 | Laguna, 727 | Prov. Unidas, 3527 |
|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Nulo | Escaso | Muy escaso |
| Aspecto del residuo | » | Arc. aren. | Arc. aren. |
| *Datos químicos* | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5053 | 0.4344 | 0.4590 |
| — á 180° C | 0.4934 | 0.4302 | 0.4475 |
| — al rojo débil | 0.4848 | 0.4200 | 0.4434 |
| Dureza total | 26.0 | 26.0 | 24.0 |
| — temporaria | 20.0 | 10.0 | 18.0 |
| — permanente | 6.0 | 16.0 | 6.0 |
| Alcalinidad | 0.30470 | 0.54710 | 0.40730 |
| Permanganato empleado | 0.00395 | 0.00039 | 0.00750 |
| Oxígeno consumido | 0.00100 | 0.00010 | 0.00190 |
| Cloro | 0.00355 | 0.00710 | 0.00710 |
| Anhídrido sulfúrico | 0.0 | v. | 0.00178 |
| — nítrico | 0.01870 | v. | 0.00625 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06640 | 0.04980 | 0.00560 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.13852 | 0.24512 | 0.18249 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.05440 | 0.11290 | 0.09580 |
| — de magnesio | 0.01974 | 0.03567 | 0.03683 |
| — de sodio | 0.18889 | 0.07934 | 0.11007 |
| — de potasio | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00157 | 0.00079 | 0.00152 |
| — de hierro | 0.00243 | 0.00103 | 0.00168 |
| *Combinaciones* | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00295 | 0.00148 | 0.00286 |
| — de sodio | 0.13218 | 0.09985 | 0.00866 |
| Cloruro de sodio | 0.00585 | 0.01170 | 0.01170 |
| Nitrato de potasio | 0.03497 | v. | 0.01169 |
| Carbonato ferroso | 0.00391 | 0.00166 | 0.00270 |
| Sulfato de calcio | » | v. | 0.00302 |
| Bicarbonato de calcio | 0.15733 | 0.44698 | 0.27336 |
| — de magnesio | 0.07203 | 0.13018 | 0.13438 |
| Carbonato de sodio | 0.17196 | 0.03899 | 0.16073 |

DÉCIMAQUINTA ZONA

| Caracteres físicos | Acauso, entre Pieres y Oliden | Pieres y Ercilla |
|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Reg. cantidad | Nulo |
| Aspecto del residuo | Arcilloso | » |
| *Datos químicos* | | |
| Residuo á 105° C | 0.4836 | 0.4794 |
| — á 180° C | 0.4791 | 0.4761 |
| — al rojo débil | 0.4687 | 0.4732 |
| Dureza total | 6.5 | 13.0 |
| — temporaria | 4.5 | 12.0 |
| — permanente | 2.0 | 1.0 |
| Alcalinidad | 0.25430 | 0.28250 |
| Permanganato empleado | 0.00039 | 0.00039 |
| Oxígeno consumido | 0.00010 | 0.00010 |
| Cloro | 0.00710 | 0.00710 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. |
| — nítrico | 0.02300 | 0.01000 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.07720 | 0.06200 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.11396 | 0.13661 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.02400 | 0.05000 |
| — de magnesio | 0.00857 | 0.01628 |
| — de sodio | 0.22583 | 0.17447 |
| — de potasio | » | » |
| — de aluminio | 0.00065 | 0.00069 |
| — de hierro | 0.00040 | 0.00075 |
| *Combinaciones* | | |
| Silicato de aluminio | 0.00123 | 0.00129 |
| — de sodio | 0.15579 | 0.12482 |
| Cloruro de sodio | 0.01170 | 0.01170 |
| Nitrato de potasio | 0.04301 | 0.01870 |
| Carbonato ferroso | 0.00064 | 0.00131 |
| Sulfato de calcio | v. | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.06940 | 0.14481 |
| — de magnesio | 0.03127 | 0.05941 |
| Carbonato de sodio | 0.20590 | 0.19512 |

DÉCIMAQUINTA ZONA

| Caracteres físicos | Acauso, esquina Basualdo | Basualdo, 30 | Caaguazú, entre Pola y Miralla | Caaguazú, entre Pola y Fonrouge | Bariloche, esquina Rivadavia | Ercilla, 6002 | Palma, y Tonelero | San Julián, entre V. Hugo y Molieri |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Opalino | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | |
| Dureza total | 30.0 | 5.0 | 3.2 | 14.0 | 13.0 | 29.0 | 20.0 | 19.0 |
| — temporaria | 19.0 | 4.5 | 2.8 | 13.5 | 8.0 | 26.5 | 16.0 | 16.5 |
| — permanente | 11.0 | 0.5 | 4.0 | 0.5 | 5.0 | 2.5 | 4.0 | 2.5 |
| Residuo á 105° C | 0.42800 | 0.5120 | 0.4870 | 0.4740 | 0.60000 | 0.8770 | 0.32300 | 0.75200 |
| Cloro | 0.01065 | 0.0142 | 0.0142 | 0.0071 | 0.02840 | 0.0071 | 0.01775 | 0.01065 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | 0.02500 | 0.02500 | 0.00625 | 0.05000 | 0.02500 | v. | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00055 | 0.00080 | 0.00030 | 0.00030 | 0.00060 | 0.00170 | 0.00030 | 0.00079 |

DÉCIMAQUINTA ZONA

| Caracteres físicos | San Fernando, entre Unión é Ibarola | V. Boch, entre Oliden y Murguiondo | Ibarola pozo nº 13 | Amadeo Jacques, entre Cuzco y General Paz | Fonrouge, entre Cosio y Caaguazu | Talleres Liniers. Ferrocarril Oeste |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Opalino | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | |
| Dureza total | 17.0 | 23.0 | 4.0 | 7.0 | 8.0 | 9.0 |
| — temporaria | 16.0 | 21.0 | 2.0 | 5.5 | 6.5 | 8.0 |
| — permanente | 1.0 | 2.0 | 2.0 | 1.5 | 1.5 | 1.0 |
| Residuo á 105° C | 0.52100 | 0.54600 | 0.6010 | 0.52000 | 0.40200 | 0.51700 |
| Cloro | 0.01775 | 0.00887 | 0.0142 | 0.01420 | 0.01065 | 0.01775 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.01250 | 0.03740 | v. | 0.0 | 0.0 | 0.00750 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00100 | 0.00120 | 0.00090 | 0.00070 | 0.00010 | 0.00010 |

DÉCIMAQUINTA ZONA

| Caracteres físicos | Albariño. 250 | Rivadavia. 10024-28 | Rivadavia. 10663 |
|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Opalino | Límpido | Inodoro |
| — en caliente | Turbio | Opalino | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | |
| Dureza total | 10.0 | 9.0 | 16.0 |
| — temporaria | 7.5 | 7.5 | 14.0 |
| — permanente | 2.5 | 1.5 | 2.0 |
| Residuo á 105° C | 0.43100 | 0.47900 | 0.52100 |
| Cloro | 0.01065 | 0.01242 | 0.01420 |
| Amoníaco | v. | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | v. | 0.01475 | 0.05000 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00050 | 0.00040 | 0.00010 |

DÉCIMASEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Asunción, 3209 | Avenida San Martín, 3792 | Avenida Chicago y Sin Nombre | Lacar, 4500 | Lavallol, entre Morón y Asunción | Navarro, 2599 | Nueva York, 3717 | Morán, 3545 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Turbio | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Opalino | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Amarillento | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | |
| Dureza total | 22.0 | 22.0 | 8.0 | 14.0 | 22.0 | 24.0 | 8.0 | 10.0 |
| — temporaria | 16.0 | 19.0 | 5.0 | 9.0 | 17.0 | 19.0 | 3.0 | 8.0 |
| — permanente | 6.0 | 3.0 | 3.0 | 5.0 | 5.0 | 5.0 | 5.0 | 2.0 |
| Residuo á 105° C | 0.20600 | 0.18500 | 0.62100 | 0.52500 | 0.51800 | 0.63600 | 0.49100 | 0.56000 |
| Cloro | 0.01065 | 0.00355 | 0.01775 | 0.01065 | 0.0177 | 0.03195 | 0.01775 | 0.01420 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.0 | 0.00168 | v. | v. | » | 0.01870 | 0.0 | 0.00468 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00020 | 0.00030 | 0.00060 | 0.00030 | 0.00020 | 0.00140 | 0.00010 | 0.00010 |

DÉCIMASEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Campana, entre Lozano y Nazarre | Cuenca, 3262 | Helguera, 3545-47 | P. Lozano, entre Cuenca y Campana | Tinogasta, entre Cuenca y Helguera | Tinogasta, esquina Campana |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | |
| Dureza total | 10.0 | 8.0 | 9.0 | 11.0 | 16.0 | 12.0 |
| — temporaria | 7.0 | 7.0 | 7.0 | 10.0 | 12.0 | 7.0 |
| — permanente | 3.0 | 1.0 | 2.0 | 4.0 | 4.0 | 5.0 |
| Residuo á 105° C | 0.1610 | 0.36500 | 0.47600 | 0.5470 | 0.4800 | 0.4790 |
| Cloro | 0.0172 | 0.00710 | 0.0177 | 0.0071 | 0.0071 | 0.0142 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | » | 0.00250 | v. | » | » | » |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00030 | 0.00030 | 0.00045 | 0.00010 | 0.00005 | 0.00015 |

DÉCIMASEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Lavallol, 4051 | Morán, 3622 | Lavallol, esquina Circunvalación | Simbrón, 3238 | Simbrón, 3042 | San Roque, 3523 | Tinogasta, 3231 | Tinogasta, 3243 | Orán, 3225 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | | |
| Dureza total | 8.0 | 8.0 | 24.0 | 15.0 | 20.0 | 8.0 | 19.0 | 16.0 | 10.0 |
| — temporaria | 6.0 | 7.5 | 19.5 | 14.5 | 16.0 | 6.5 | 12.0 | 15.0 | 8.0 |
| — permanente | 2.0 | 0.5 | 4.5 | 0.5 | 4.0 | 1.5 | 7.0 | 1.0 | 2.0 |
| Residuo á 105° C | 0.43600 | 0.45800 | 0.47100 | 0.50800 | 0.40200 | 0.49200 | 0.44600 | 0.45300 | 0.46400 |
| Cloro | 0.01420 | 0.01065 | 0.01420 | 0.01065 | 0.02840 | 0.01065 | 0.01065 | 0.00710 | 0.01065 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido nítrico | 0.00500 | 0.00500 | 0.00750 | 0.01000 | v. | 0.0 | 0.00500 | v. | v. |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00020 | 0.00010 | 0.00010 | 0.00030 | 0.00090 | 0.00100 | 0.00040 | 0.00020 | 0.00010 |

DÉCIMASEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Morán, 4282 | Pareja, esquina Gualeguaychú | Pareja, entre San Nicolás y Esperanza | Saráchaga, 4236 | Vía T. Rural, entre San Nicolás y Orán | Asunción, 4669 | Campana, 3938 | Cuenca, 3741-43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Opalino | Límpido | Límpido | Opalino | Opalino | Límpido |
| — en caliente | Opalino | Turbio | Turbio | Opalino | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Lig. opal. | Incoloro | Incoloro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| *Datos químicos* | | | | | | | | |
| Dureza total | 14.0 | 8.0 | 17.0 | 18.0 | 18.0 | 10.0 | 14.0 | 12.0 |
| — temporaria | 10.0 | 5.0 | 13.0 | 12.0 | 16.0 | 5.0 | 13.0 | 12.0 |
| — permanente | 4.0 | 3.0 | 4.0 | 6.0 | 2.0 | 5.0 | 1.0 | 1.0 |
| Residuo á 105° C | 0.37900 | 0.45400 | 0.5310 | 0.45360 | 0.16200 | 0.41000 | 0.53200 | 0.53300 |
| Cloro | 0.02840 | 0.02840 | 0.0248 | 0.01420 | 0.01065 | 0.01065 | 0.01420 | 0.01065 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrico nítrico | 0.0 | » | v. | 0.00750 | 0.00250 | v. | 0.00500 | 0.00500 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Oxígeno cons. para oxidar la materia orgánica | 0.00110 | 0.00015 | 0.00040 | 0.00020 | 0.00020 | 0.00050 | 0.00010 | 0.00170 |

DÉCIMASEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Av. S. Martín, 3756 | Asunción, 4443 | Morán, 4567 | Asunción, 4814 | Av. 3 Cruces, 3735 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Regular | Nulo | Escaso | Nulo | Muy escaso |
| Aspecto del residuo | Arcilloso | » | Arenoso | » | Arenoso |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.5800 | 0.4870 | 0.5138 | 0.5314 | 0.4400 |
| — á 180° C | 0.5284 | 0.4832 | 0.5116 | 0.5269 | 0.4390 |
| — al rojo débil | 0.5158 | 0.4732 | 0.4836 | 0.5124 | 0.4307 |
| Dureza total | 9.0 | 18.0 | 18.0 | 16.0 | 24.0 |
| — temporaria | 8.0 | 14.0 | 14.0 | 15.5 | 16.5 |
| — permanente | 1.0 | 4.0 | 4.0 | 0.5 | 7.5 |
| Alcalinidad | 0.35800 | 0.37080 | 0.33520 | 0.33500 | 0.28670 |
| Permanganato empleado | 0.00197 | 0.00079 | 0.00118 | 0.00316 | 0.00118 |
| Oxígeno consumido | 0.00050 | 0.00020 | 0.00030 | 0.00080 | 0.00030 |
| Cloro | 0.01420 | 0.01065 | 0.00710 | 0.01065 | 0.00710 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | v. | v. | 0.00549 |
| — nítrico | 0.0 | v. | v. | 0.01000 | 0.00250 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido silícico | 0.06160 | 0.04110 | 0.07060 | 0.06720 | 0.06000 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.01643 | 0.16615 | 0.15019 | 0.15010 | 0.12845 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Óxido de calcio | 0.03040 | 0.06200 | 0.06720 | 0.06240 | 0.06040 |
| — de magnesio | 0.00807 | 0.02120 | 0.02335 | 0.01700 | 0.02277 |
| — de sodio | 0.25351 | 0.18181 | 0.18540 | 0.20864 | 0.15067 |
| — de potasio | » | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00083 | 0.00074 | 0.00084 | 0.00070 | 0.00120 |
| — de hierro | 0.00119 | 0.00153 | 0.00152 | 0.00270 | 0.00200 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00161 | 0.00139 | 0.00158 | 0.00181 | 0.00225 |
| — de sodio | 0.12314 | 0.08223 | 0.15625 | 0.13558 | 0.11982 |
| Cloruro de sodio | 0.02340 | 0.01755 | 0.01170 | 0.01755 | 0.01170 |
| Nitrato de potasio | 0.0 | v. | v. | 0.01870 | 0.00467 |
| Carbonato ferroso | 0.00192 | 0.00246 | 0.00245 | 0.00419 | 0.00322 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | 0.0 | v. | 0.00933 |
| Bicarbonato de calcio | 0.08792 | 0.17932 | 0.19436 | 0.18048 | 0.16358 |
| — de magnesio | 0.02945 | 0.07844 | 0.08532 | 0.04869 | 0.08310 |
| Carbonato de sodio | 0.30640 | 0.22347 | 0.17060 | 0.20795 | 0.13920 |

DÉCIMASEXTA ZONA

| Caracteres físicos | Concordia, 3532 | Campana, 3938 | Cuenca, antes del 2685 | Cuenca, 2793 | Simbrón, 3285 |
|---|---|---|---|---|---|
| Color | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro | Incoloro |
| Aspecto en frío | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido | Límpido |
| — en caliente | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio | Turbio |
| Olor | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro | Inodoro |
| Sabor | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable | Agradable |
| Reacción | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina | Alcalina |
| Residuo por reposo | Escaso | Escaso | Escaso | Escaso | Escaso |
| Aspecto del residuo | Arcilloso | Arenoso | Arcilloso | Arcilloso | Arcilloso |
| *Datos químicos* | | | | | |
| Residuo á 105° C | 0.4244 | 0.4852 | 0.7142 | 0.4551 | 0.4528 |
| — á 180 C | 0.4202 | 0.4824 | 0.7102 | 0.4512 | 0.4497 |
| — al rojo débil | 0.4138 | 0.4802 | 0.6960 | 0.4428 | 0.4432 |
| Dureza total | 24.0 | 11.0 | 12.0 | 15.0 | 24.0 |
| — temporaria | 16.0 | 10.0 | 9.0 | 14.0 | 17.0 |
| — permanente | 8.0 | 1.0 | 3.0 | 1.0 | 7.0 |
| Alcalinidad | 0.26620 | 0.30570 | 0.39280 | 0.30400 | 0.36260 |
| Permanganato empleado | 0.00158 | 0.00158 | 0.00197 | 0.00079 | 0.00039 |
| Oxígeno consumido | 0.00040 | 0.00040 | 0.00050 | 0.00020 | 0.00010 |
| Cloro | 0.01775 | 0.01420 | 0.03550 | 0.01420 | 0.01420 |
| Anhídrido sulfúrico | v. | v. | 0.00619 | v. | v. |
| — nítrico | v. | 0.03750 | 0.03740 | v. | 0.0 |
| — nitroso | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| — silícico | 0.06280 | 0.06600 | 0.07600 | 0.05640 | 0.03170 |
| Ácido sulfhídrico | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Anhídrido carbónico | 0.11920 | 0.13691 | 0.17597 | 0.13614 | 0.16246 |
| Amoníaco | 0.0 | 0.0 | 0.0 | v. | 0.0 |
| Oxido de calcio | 0.09080 | 0.04880 | 0.02800 | 0.05720 | 0.10300 |
| — de magnesio | 0.02681 | 0.02594 | 0.00937 | 0.01744 | 0.03351 |
| — de sodio | 0.04243 | 0.18324 | 0.34673 | 0.16656 | 0.10545 |
| — de potasio | » | » | » | » | » |
| — de aluminio | 0.00180 | 0.00075 | 0.00083 | 0.00230 | 0.00093 |
| — de hierro | 0.00261 | 0.00224 | 0.00221 | 0.00410 | 0.00183 |
| *Combinaciones* | | | | | |
| Silicato de aluminio | 0.00338 | 0.00141 | 0.00156 | 0.00433 | 0.00175 |
| — de sodio | 0.12446 | 0.13283 | 0.15302 | 0.11053 | 0.06277 |
| Cloruro de sodio | 0.02925 | 0.02340 | 0.05850 | 0.02340 | 0.02340 |
| Nitrato de potasio | v. | 0.01403 | 0.06995 | v. | » |
| Carbonato ferroso | 0.00420 | 0.00360 | 0.00356 | 0.00660 | 0.00295 |
| Sulfato de calcio | v. | v. | 0.01050 | v. | v. |
| Bicarbonato de calcio | 0.26261 | 0.14113 | 0.06850 | 0.16544 | 0.29790 |
| — de magnesio | 0.09785 | 0.09468 | 0.03419 | 0.06365 | 0.12230 |
| Carbonato de sodio | 0.04041 | 0.16552 | 0.35115 | 0.16751 | 0.10455 |
| Cloruro de amonio | » | » | » | v. | » |

Laboratorio químico y de ensayos de las Obras sanitarias de la Nación, diciembre de 1914.

# EL PASO DE MERCURIO POR EL SOL

## EL 7 DE NOVIEMBRE DE 1914

DESDE LAS $10^h6^m$ DE LA MAÑANA Á LAS $2^h18^m$ DE LA TARDE. DURACIÓN DEL PASAJE $4^h12^m$, EN TIEMPO CIVIL MEDIO DE PARÍS (1)

Por M. PERROTET DES PINS
Fundador director del Observatorio meteorológico de Mérindol (Vaucluse)

(COLABORACIÓN DIRECTA)

---

Es la quinta vez que dirijo la atención sobre la actitud meteorológica del paso del planeta Mercurio ante el Sol.

El hombre que piensa, jamás está harto de sus investigaciones; el deseo de saber, la felicidad de conocer, constituyen la trama de su vida; y su pensamiento siempre vigilante en misión por los desiertos de lo desconocido, sólo se satisface cuando es recompensado por el bienestar de un feliz hallazgo científico.

El vistazo celeste, en todo momento, hállase en presencia de nuevas bellezas siderales.

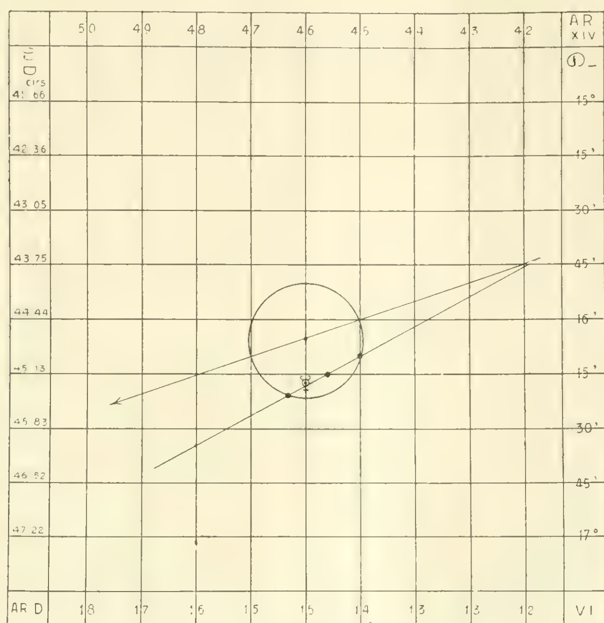
El balanceo de Mercurio y de Venus á la derecha y á la izquierda del Sol; sus elongaciones en cuadratura de la mañana y de la tarde; sus pasos por el disco deslumbrador del astro del día, son efectos de los más atrayentes para despertar la curiosidad y el deseo de conocer la naturaleza, las funciones de estos fenómenos celestes que pasan ante nosotros como puntos interrogantes á nuestro entendimiento.

Gracias á los hércules del pensamiento, tales como los Copérnicos, los Galileos, los Képler, los Newton, los Laplaces, etc., cuyo espíritu genial nos ha hecho conocer la estructura del universo, las leyes que rigen los mundos suspendidos en el espacio, sus movimientos y sus

(1) Versión española de Víctor Delfino. M. S. A.-S. M. P.

vitalidades, gozamos actualmente de una suma de conocimientos muy extensos sobre la vida y los seres, pues la astronomía es no sólo la ciencia del tiempo y del espacio, sino también la ciencia de la vida.

Á estos hombres de genio, á estos divinos apóstoles de la razón, á estos profetas del progreso, debemos el conocimiento del lugar que




Paso de ☿ delante el ☉ el 7 de noviembre de 1914 á mediodía, 12 m.

1. Entrada á $10^h6^m$ de la mañana
2. Conjunción á $11^h20^m$ de la mañana } tiempo medio de París.
3. Medio á $12^h12^m$ de la tarde
4. Salida á $2^h18^m$ de la tarde

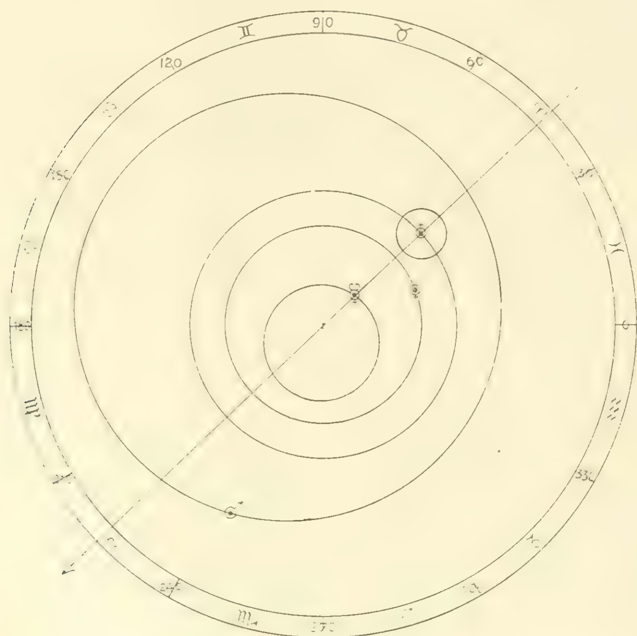
Duración del paso : $4^h12^m$.

Arriba : ascención recta sexagesinal ; abajo : ascensión recta decimal ; á la derecha : declinación sexagesinal ; á la izquierda : declinación decimal.

ocupamos sobre la Tierra y el que ésta ocupa cada día en el cielo, pues la vida está esparcida en todas partes y en todo.

El planeta Mercurio, que constituye aquí el objeto de nuestra plática, circula en la primera zona del dominio de la república solar, y es considerado como cabeza de este departamento. Mercurio es el mundo cuyo movimiento de traslación alrededor del foco central es el más rápido.

Gira alrededor del Sol á la escasa distancia media de 14 millones de leguas; y el año de este mundo circumsolar es de 88 días de los nuestros, tiempo que emplea para recorrer el perímetro de una órbita de 89 millones de leguas de circuito, con la velocidad de 47 kilómetros por segundo, ó 2800 kilómetros por minuto, ó 168.000 kilómetros por hora. ¡La velocidad de esta marcha es, pues, 2800 veces más




Paso de ☿ delante el ☉ el 7 de noviembre de 1912 sobre una proyección orbicular heliocéntrica.
Escala : $^1/_2$ milímetro por millón de leguas.
Posiciones de los planetas : ☿, Mercurio ; la ♁, Tierra ; ♀, Venus y ♂, Marte, el 7 de noviembre de 1912 á mediodía.
Tiempo medio de París.

rápida que la de un ferrocarril que rueda sobre los rieles, bajo la impulsión ardiente del fuego, con la velocidad de 60 kilómetros por hora!

Para el vulgo, estos dominios de la velocidad son verdaderamente fantásticos, al paso que para el sabio que piensa, constituyen un testimonio vivo de la grandeza de la naturaleza y de la penetración perspicaz del espíritu humano.

La órbita de Mercurio es muy excéntrica al Sol; su distancia perihélica es de 11 millones de leguas, mientras que en su afelio es de 17 millones.

Siendo los años de Mercurio de 88 días, sus estaciones de 22 días, durando su rotación 24 horas y 21 minutos sobre su eje inclinado de 55 cirs, 55 centicirs (20°), ello nos da una idea de que su biología es mucho más rápida que en nuestro mundo terrestre. Un joven de 24 años aquí, sería un centenario en Mercurio.

El poder de la naturaleza actúa sobre todas las formas biológicas de nuestro mundo terrestre, y puede, por consiguiente, presentarse bajo todos los aspectos en todas las tierras del cielo.

Mercurio, como planeta interior con relación á la Tierra y al Sol, nunca es visible en medio de la noche. Se ve tan sólo por la tarde en las claridades rutilantes del crepúsculo, ó por la mañana en los resplandores palpitantes de la aurora, y puede ser visible para nosotros, en sus mayores elongaciones de la mañana y de la tarde, dos horas antes de levantarse y dos horas después de ponerse el Sol; y su visibilidad vesperal y matinal dura 18 días, ó sea, 9 días antes y 9 días después de sus cuadraturas. Si el planeta Mercurio se mantuviera en el plano de la eclíptica en cada conjunción inferior, lo veríamos pasar sobre el disco solar, pero está inclinada de 19 cirs (ó sean 7°), lo que hace que ordinariamente el planeta pase ora abajo, ora arriba del Sol, y, por consiguiente, el pasaje sea invisible. Sin embargo, el movimiento de Mercurio, combinado con el de la Tierra, hace que algunas veces tengamos el placer de ver el pasaje del rápido planeta como un punto negro sobre el disco deslumbrante del Sol.

Estos pases se producen en los períodos regulares de 3, 13, 7, 10, 3, 10 años, etc., etc., formando un ciclo de 46 años, para empezar de nuevo en el mismo orden cronológico.

He aquí las tablas de cuatro ciclos, partiendo desde el 9 de noviembre de 1802 al 8 de mayo de 1983.

Cada ciclo está compuesto de seis pasajes, repartido en cuatro series; la primera de las cuales cuenta tres pasajes en noviembre, la segunda uno solo en mayo, la tercera uno solo también en noviembre, y la cuarta un solo pasaje en mayo.

*Ciclo de 1799 á 1845*

| | | | | Años | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1ª serie | 1...... | 1802 | 9 noviembre | 3 | 46 años |
| | 2...... | 1815 | 12 noviembre | 13 | |
| | 3...... | 1822 | 5 noviembre | 7 | |
| 2ª serie | 4...... | 1832 | 5 mayo | 10 | |
| 3ª serie | 5...... | 1835 | 7 noviembre | 3 | |
| 4ª serie | 6...... | 1845 | 8 mayo | 10 | |

*Ciclo de 1845 á 1891*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1ª serie | 1...... | 1848 | 9 noviembre | 3 | 46 años |
| | 2...... | 1861 | 12 noviembre | 13 | |
| | 3...... | 1868 | 5 noviembre | 7 | |
| 2ª serie | 4...... | 1878 | 6 mayo | 10 | |
| 3ª serie | 5...... | 1881 | 7 noviembre | 3 | |
| 4ª serie | 6...... | 1891 | 10 mayo | 10 | |

*Ciclo de 1891 á 1937*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1ª serie | 1...... | 1894 | 10 noviembre | 3 | 46 años |
| | 2...... | 1907 | 14 noviembre | 13 | |
| | 3...... | 1914 | 7 noviembre | 7 | |
| 2ª serie | 4...... | 1924 | 7 mayo | 10 | |
| 3ª serie | 5...... | 1927 | 8 noviembre | 3 | |
| 4ª serie | 6...... | 1937 | 10 mayo | 10 | |

*Ciclo de 1937 á 1983*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1ª serie | 1...... | 1940 | 9 noviembre | 3 | 46 años |
| | 2...... | 1953 | 10 noviembre | 13 | |
| | 3...... | 1960 | 6 noviembre | 7 | |
| 2ª serie | 4...... | 1970 | 9 mayo | 10 | |
| 3ª serie | 5...... | 1973 | 9 noviembre | 3 | |
| 4ª serie | 6...... | 1983 | 8 mayo | 10 | |

Se ve en las tablas del ciclo de 46 años que los pasajes se efectúan cuatro veces en noviembre, dos veces en mayo; y que el paso del 7 de noviembre de 1914 es la reproducción de los del 5 de noviembre de 1822 y del 5 de noviembre de 1868, y que se renovará el 5 de noviembre de 1960.

Después de las consideraciones astronómicas y meteorológicas que

hemos expresado sucintamente en los pasajes de Mercurio, queda por tratar la cuestión meteorológica, muy importante, como lo es, por lo demás, con respecto á todos los fenómenos astronómicos, cualesquiera que sean.

Aunque nuestros conocimientos meteorológicos no tienen todavía la precisión de los astronómicos, podemos decir francamente que esta rama de la física general ha realizado un inmenso progreso del punto de vista de la previsión del tiempo.

Séanos permitido decir que nuestros descubrimientos de leyes meteorológicas, bien demostradas después de cincuenta años de observaciones bien clasificadas y coordinadas día por día, suministran datos periódicos de curvas barométricas cóncavas, con cielo nebuloso, cubierto, tendiendo á la lluvia, de una exactitud muy aproximada, cuando no rigurosamente exacta.

El paso de Mercurio por el Sol se efectúa cuando este planeta, la Tierra y el Sol están en una misma línea recta, y aunque Mercurio esté ante el Sol, á causa de su exigüidad, no debilita sensiblemente la luz solar, circunstancia que no impide que su influencia específica actúe de una manera bastante sensible y que su compresión sobre nuestra terratmósfera provoque la aparición de nubes que dificultan á menudo la observación de su paso, sobre todo cuando este último corresponde á los puntos radiantes de influjo, lunares, solares y planetarios.

Dicho esto, de nuestras observaciones y de nuestros estudios resulta que el período entre el 4 y el 10 de noviembre de 1914 será nebuloso y aun lluvioso en una gran extensión continental, y que el 7 de noviembre — día del paso de Mercurio — el estado del cielo nebuloso será desfavorable á la observación del fenómeno en diversos puntos del globo.

Si el fenómeno del paso tuviera lugar en buenas condiciones atmosféricas, con cielo claro, sería una excelente ocasión para ver, con poderosos instrumentos, la planatmósfera de Mercurio proyectarse con un color claro obscuro á la entrada y á la salida sobre el disco solar y aun en medio del Sol.

Esperemos que las misiones científicas sean escalonadas en las diversas cuencas geográficas para obtener algunos resultados favorables en los claros.

Mérindol, 1º de noviembre de 1913.
10 brumario 122.

## OBSERVACIÓN METEOROLÓGICA DEL PASO DE MERCURIO POR EL SOL EL 7 DE NOVIEMBRE DE 1914 EN MÉRINDOL

En el *Bulletin de la Société astronomique de France* de junio de 1914, página 272, se lee : « M. Perrotet des Pins, de Mérindol (Vaucluse), piensa que el período del 4 al 10 de noviembre próximo será nebuloso y desfavorable para la observación del paso de Mercurio por el Sol el 7 de noviembre, en diversos puntos del globo. »

*Observaciones.* — El día 4 el cielo cubierto por la mañana y á mediodía, lluvia por la tarde, viento del este débil. Barómetro : 755.

El día 5 el cielo con cirrus por la mañana, nebuloso á mediodía, cubierto por la tarde, á la noche lluvia. Barómetro : 755.

El 6 el cielo estuvo cubierto durante todo el día. Barómetro : 755.

El 7 el cielo brumoso y nebuloso. Sol invisible hasta las 9 y 30 de la mañana. Á las 10 cirrus circumsolares, brumas y nubes en todo el derredor del horizonte. Á mediodía el mismo estado del cielo. Termómetro : 15°. Barómetro : 760. Á las dos de la tarde el mismo estado del cielo.

El día 8 brumas por la mañana; alpestre á mediodía y á la tarde. Barómetro : 764.

El día 9 brumas por la mañana; magnífico mediodía y tarde. Barómetro : 766.

El día 10 brumas por la mañana; magnífico mediodía y tarde. Barómetro : 768.

Régimen de viento, del este del 30 de octubre al 6 de noviembre.

Resulta de la observación que los días 4, 5, 6 y aun á partir del 7, el cielo ha estado cubierto ó nebuloso y desfavorable á las observaciones celestes, tal como se había anunciado.

Mérindol, 11 de noviembre de 1914.
20 brumario 123.

# NIVEL REVERSIBLE ZEISS

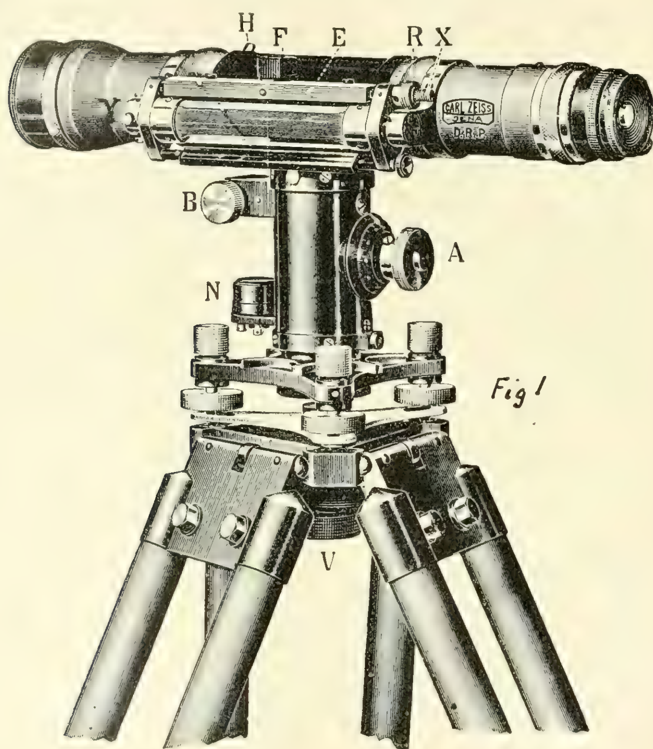
El uso de este tipo de nivel se ha generalizado mucho en el país, y como sus cualidades hacen esperar que se extenderá aún más, he creído hacer obra útil publicando estos apuntes, respondiendo con ello á objeciones que á más de un profesional he oído hacer, de que el nivel, á pesar de su sencillez, es de difícil rectificación.

El nivel Zeiss consta (fig. 1) de un anteojo de enfocamiento interno, que puede girar alrededor de su eje de figura, y que es reversible, es decir, que colocado el ocular en el extremo del objetivo, por medio del cubreobjetivo, permite hacer lecturas también en esa posición; de un nivel reversible, es decir, cuya superficie de trabajo, en vez de ser tórica, como en los niveles comunes, ó esférica, como en los esféricos, es de revolución, engendrada por el movimiento de un arco de círculo muy achatado que gira alrededor de una de sus cuerdas, la que viene á constituir así el eje del nivel; de un juego de prismas EF que, colocado sobre el nivel reversible, permite ver los dos extremos de la burbuja sin que el observador esté obligado á retirarse del ocular. El conjunto de estos órganos está colocado sobre un soporte triangular provisto de tres tornillos niveladores, cuyo soporte se coloca sobre la cabeza del trípode; un tornillo de presión y uno micrométrico B permiten fijar el anteojo en cualquier azimut; otro tornillo micrométrico A, denominado tornillo de elevación, permite dar al anteojo movimientos de cierta amplitud en altura; por último, un nivel esférico X permite colocar aproximadamente vertical el eje principal del instrumento, en tanto que los tornillos Y permiten cambiar la inclinación del eje del nivel respecto del eje del anteojo, y la tuerca R y el tornillo X permiten cambiar la posición de los prismas respecto del eje del nivel. En cuanto al retículo ha sido centrado una vez por todas

por el fabricante, y para el operador eje del anteojo es sinónimo de eje óptico.

En esquema, el nivel Zeiss puede representarse por cualquiera de las figuras 2 á 5, en las que AO indica el eje del anteojo, NV el eje del nivel, HR la horizontal tangente á la curva del nivel en el punto medio de la burbuja cuando ésta aparece centrada en el prisma.

El nivel Zeiss puede trabajar en cuatro posiciones diferentes, caracterizadas así:




1ª Ocular en posición normal, es decir, en el extremo del anteojo que está provisto de una escala para el enfocamiento del ocular sobre el retículo; nivel á la izquierda del anteojo;

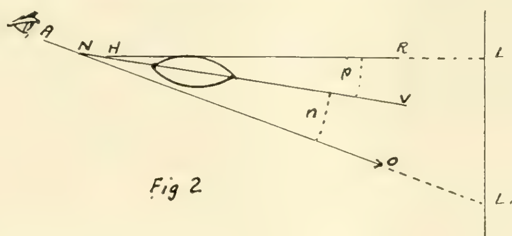
2ª Ocular en posición normal, nivel á la derecha;

3ª Ocular en posición de verificación, es decir, colocado en el extremo opuesto del anteojo por medio del cubreobjetivo; nivel á la derecha;

4ª Ocular en posición de verificación; nivel á la izquierda.

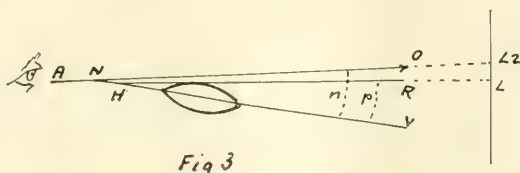
Si el instrumento estuviera perfectamente rectificado, el eje del nivel NV sería paralelo al eje del anteojo AO, y ambos lo serían á la tangente HR; y en ese caso la visual AO resultaría horizontal en las cuatro posiciones, y la lectura de mira que se hiciera en cualquiera de ellas sería correcta.

Como en todo instrumento, aun en el mejor construído, se produce desajuste entre sus diferentes partes, voy á estudiar la influencia que




sobre las lecturas de mira tiene la falta de ajuste del instrumento, y deduciré después la manera de hacer la rectificación.

Supondré que en la posición 1 (fig. 2) el eje del nivel está inclinado hacia arriba por el lado del objetivo, y que la tangente HR está inclinada en la misma forma con respecto al eje del nivel. Indicaré con $n$ el ángulo de NV con AO, y con $p$ el ángulo de HR con NV; y si convengo en considerar $n$ negativo cuando N se aleja de AO más que V,




y $p$ como negativo cuando HR toca á la curva del nivel á la derecha de su centro, las fórmulas que voy á establecer serán enteramente generales.

Si en figura 2 indico con D la distancia del nivel á la mira, con $L_1$ la lectura efectiva hecha sobre ésta, y con L la que se obtendría si el instrumento estuviera rectificado, tendré $L_1 - D \text{ tang} = L (n + p)$, y como en todos los casos $n$ y $p$ son bastante pequeños para poder reemplazar la tangente por el arco,

$$L_1 = L - D \text{ sen } 1'' (n + p).$$

En la posición 2 (fig. 3), el eje del anteojo AO pasa arriba del eje del nivel, y como la tangente HR siempre está arriba de NV, el ángulo entre la visual efectiva AO y la teórica HR será $p - n$, de modo que, siendo $L_2$ la lectura de mira hecha en esta posición del nivel

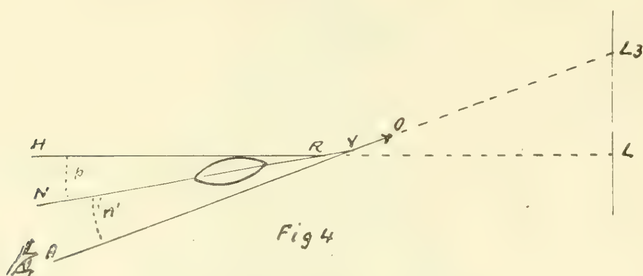
$$L_2 = L + D \operatorname{sen} 1''(n - p).$$

Como en las posiciones 3 y 4, al invertir ocular y objetivo, se hace uso de un retículo distinto del que se usa en las posiciones 1 y 2, el valor del ángulo $n$ será, en general, distinto, y le indicaré con $n'$.

En la posición 3 las cosas se disponen como en figura 4, y si $L_3$ es la lectura de mira, tendré

$$L_3 = L + D \operatorname{sen} 1''(n' - p).$$

Por fin, en la posición 4 (fig. 5), tendré




$$L_4 = L - D \operatorname{sen} 1''(n' - p).$$

Resumiendo.

$$L_1 = L - D \operatorname{sen} 1''(n + p) \quad (1)$$

$$L_2 = L + D \operatorname{sen} 1''(n - p) \quad (2)$$

$$L_3 = L + D \operatorname{sen} 1''(n' + p) \quad (3)$$

$$L_4 = L - D \operatorname{sen} 1''(n' - p) \quad (4)$$

Haciendo el promedio de (1) y (2) tendré

$$\frac{1}{2}(L_1 + L_2) = L + D \operatorname{sen} 1'' \frac{1}{2}(n - p - n - p) = L - D \operatorname{sen} 1''. p \quad (5)$$

Haciendo el promedio de (3) y (4)

$$\frac{1}{2}(L_3 + L_4) = L + D \operatorname{sen} 1'' \frac{1}{2}(n' + p - n' + p) = L + D \operatorname{sen} 1''. p \quad (6)$$

Restando (1) de (2)

$$L_2 - L_1 = D \text{ sen } 1''.\, 2n \qquad (7)$$

Restando (4) de (3)

$$L_3 - L_4 = D \text{ sen } 1''.\, 2n' \qquad (8)$$

Como se ve por (7) y (8), la diferencia entre las dos lecturas hechas en posición 1 y 2 ó en 3 y 4, es completamente independiente del ángulo $p$ y sólo depende del ángulo $n$ ó $n'$; en tanto que los promedios de $L_1$ y $L_2$ y de $L_3$ y $L_4$ son completamente independientes del error del nivel, y sólo dependen del ángulo $p$, error de los prismas, como se ve por (5) y (6); además, el promedio de estos dos promedios, es decir,

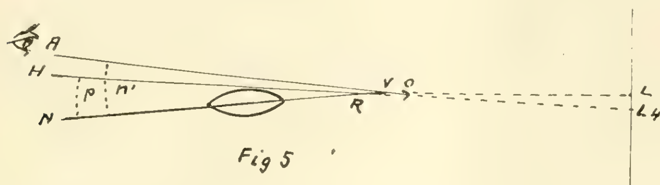


Fig 5

el promedio de las lecturas hechas en las cuatro posiciones del instrumento,

$$\frac{1}{4}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = L - D \text{ sen } 1''.\, (p - p) = L,$$

está completamente libre de toda influencia de los errores instrumentales.

De lo que las fórmulas (5) á (8) ponen de manifiesto y del hecho de que, en el instrumento, el prisma E está ligado al nivel, y se mueve con éste cuando se actúa sobre los tornillos Y, surge el siguiente procedimiento para verificar si los ángulos $p$ y $n$ tienen valor apreciable, y para anularlos.

## VERIFICACIÓN Y RECTIFICACIÓN DEL EJE DEL NIVEL

Ármese el nivel sobre su trípode, en posición 1, nivélesele aproximadamente con el nivel esférico, diríjase la visual sobre una mira bien vertical y firme, colocada á unos 50 metros de distancia, enfóquese el anteojo sobre la mira, céntrese la burbuja mediante el prisma y el tornillo de elevación, y hágase la lectura de mira $L_1$.

Póngase el nivel en posición 2, y después de centrar la burbuja, hágase la lectura $L_2$.

La diferencia entre $L_1$ y $L_2$ es, como se ha visto, independiente de la posición del prisma y sólo depende del error del nivel; hágase, pues, el promedio $\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$, apúntese el anteojo de modo que dé como lectura este promedio, y céntrese la burbuja por medio de los tornillos de rectificación Y. Esta operación se hará forzosamente con las lecturas $L_1$ y $L_2$, y no con las $L_3$ y $L_4$ porque éstas son hechas con un retículo grabado sobre el objetivo, el que sólo debe usarse para verificación del instrumento y de ningún modo para operar.

### VERIFICACIÓN Y RECTIFICACIÓN DE LOS PRISMAS

Anulado el valor de *n*, falta rectificar el prisma, de cuya posición respecto del nivel depende el ángulo *p*.

Para ello, hágase las cuatro lecturas $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$, cálculese su promedio L, y en cualquiera de las posiciones 1 ó 2 apúntese el anteojo sobre la mira de modo á obtener la lectura L; hecho esto, si la burbuja no está centrada, céntresela por medio de los tornillos RX, que modifican el valor del ángulo *p*, y con ello el instrumento queda rectificado.

### PARALELISMO LATERAL DEL NIVEL CON EL ANTEOJO

Si se cree que pueda haber falta de paralelismo entre las proyecciones horizontales del eje del nivel y el del anteojo, una vez hechas las lecturas $L_1$ y $L_2$ y calculando su promedio, hágase girar el anteojo alrededor de su eje de figura hasta que el nivel se coloque en la parte alta, y en esa posición apúntese sobre la mira de modo á obtener la lectura $\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ en el hilo que habitualmente es vertical y que en esta posición del anteojo se ha dispuesto horizontalmente; si la burbuja no queda en el medio del tubo del nivel, corríjase por medio de los tornillos Y.

Si quiere hacerse esta rectificación con más prolijidad, colóquese el instrumento en forma que cuando el anteojo apunte sobre la mira, su eje se halle en un plano con el eje principal y con uno de los tres tor-

nillos de nivelación. En esa posición y centrada la burbuja, hágase una lectura de mira L, y después muévase uno de los tornillos laterales de nivelación, dándole una vuelta entera; con esto la lectura de mira habrá cambiado completamente; actuando en sentido contrario sobre el tornillo de nivelación opuesto, restablézcase la lectura L. Si la burbuja queda centrada en el prisma, el eje del nivel es paralelo al del anteojo en su proyección horizontal; en caso contrario, se rectifica por medio de los tornillos Y.

JOSÉ S. CORTI.

SOBRE UNA LEY DE LA EMISIÓN

DE

# LOS RAYOS RÖNTGEN HOMOGÉNEOS

COMUNICACIONES DEL DEPARTAMENTO
DE FÍSICA DEL INSTITUTO NACIONAL DEL PROFESORADO SECUNDARIO

POR J. LAUB

---

1. En un interesante trabajo publicado recién en los *Tratados de la Sociedad alemana de física,* el señor W. Kossel (1) demostró que los coeficientes de absorción *(específicos)* $\lambda/d$ de los elementos Fe, Ni, Cu, Zn, para los rayos «propios» de ellos, que pertenecen á la clase K, podemos expresar por la fórmula :

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{4{,}96 \cdot 10^4}{N^2}. \qquad (1)$$

$\lambda$ es el coeficiente de absorción, $d$ la densidad del correspondiente elemento, N indica la posición del elemento absorbente en el sistema periódico de Mendelejeff. Ya el señor Kossel menciona, que la ecuación no vale más para los elementos Al y Ag.

He considerado de especial importancia investigar, si no será posible encontrar una ley á la cual obedecen *todos* los elementos químicos y *todos* los rayos (también de la clase L). Tomando en cuenta mis propias observaciones (2) y la literatura, que tengo á mi disposición, he

(1) W. KOSSEL, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft,* 1914, pág. 898. (Octubre).

(2) J. LAUB, *Phys. Zeitschrift,* 14, 992, 1913, y 14, 1209 (además un trabajo salido recién en los *Annalen der Physik).*

salido en mis cálculos del coeficiente específico de la absorción de los rayos en *aluminio*.

2. Como se ve de la tabla 1 los coeficientes específicos de absorción $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ para los rayos de la clase K, descubiertos por Barkla, satisfacen aproximadamente á la ecuación:

$$\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} = \frac{K}{N^{6,5}} \qquad (2)$$

donde el número N indica la posición de elemento (que *emite* los rayos propios) en el sistema periódico, K es una constante igual á 1663,5 . $10^8$ (1).

La mayor discordancia con el valor medio 1663,5 . $10^8$ es igual á 15,8 %.

*Tabla I*

| Elemento | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ | N | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} . N^{6,5} . 10^{-8}$ |
|---|---|---|---|
| Fe | 88,5 | 26 | 1398 |
| Cu | 47,5 | 29 | 1528 |
| Zn | 39,4 | 30 | 1568 |
| As | 22,5 | 33 | 1669 |
| Se | 18,9 | 34 | 1703 |
| Br | 16,4 | 35 | 1788 |
| Rb | 13,7 | 36 | 1795 |
| Sr | 11,1 | 37 | 1732 |
| Mo | 4,9 | 42 | 1742 |
| Rh | 3,1 | 45 | 1736 |
| Ag | 2,5 | 47 | 1847 |
| Sn | 1,57 | 50 | 1736 |
| Sb | 1,21 | 51 | 1503 |
| J | 0,92 | 53 | 1485 |
| Ba | 0,8 | 55 | 1643 |
| Ce | 0,6 | 57 | 1744 |

3. Las diferencias entre los valores de la columna 4, tabla 1, parecen mayores que el error de la observación; además se ve que la tabla 1 contiene discordancias *sistemáticas* en los valores de la constante. Parece que es imposible representar los coeficientes específicos de los rayos propios de *todos* los elementos por *una sola* fórmula en función del número fundamental N. He probado entonces dividir los

(1) Valor medio de los números de la columna 4, tab. 1.

elementos químicos en diferentes grupos; los valores $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ satisfacen muy bien á las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &1^{er} \text{ grupo: Fe — Se } \left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} = \frac{K_1}{N^6} \\ &2^{o} \text{ grupo: Br — Sn } \left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} = \frac{K_2}{N^{6.5}} \\ &3^{er} \text{ grupo: Sb — Ce } \left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} = \frac{K_3}{N^7} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

*Tabla II*

| Elemento | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ | N | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} . N^6 . 10^{-7}$ |
|---|---|---|---|
| Fe................ | 88,5 | 26 | 2734 |
| Ni................ | 59,1 | 28 | 2827 |
| Cu................ | 47,7 | 29 | 2849 |
| Zn................ | 39,4 | 30 | 2782 |
| As................ | 22,5 | 33 | 2907 |
| Se................ | 18,9 | 35 | 2922 |

*Tabla III*

| Elemento | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ | N | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} . N^{6,5} . 10^{-8}$ |
|---|---|---|---|
| Br................ | 16,4 | 35 | 1788 |
| Rb................ | 13,7 | 36 | 1795 |
| Sr................ | 11,1 | 37 | 1732 |
| Mo................ | 4,9 | 42 | 1742 |
| Rh................ | 3,1 | 45 | 1736 |
| Ag................ | 2,5 | 47 | 1847 |
| Sn................ | 1,57 | 50 | 1736 |

*Tabla IV*

| Elemento | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ | N | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} . N^7 . 10^{-9}$ |
|---|---|---|---|
| Sb................ | 1,21 | 51 | 1086 |
| J................. | 0,92 | 53 | 1181 |
| Ba................ | 0,8 | 55 | 1218 |
| Ce................ | 0,6 | 57 | 1174 |

Para las constantes $K_1$, $K_2$, $K_3$ resultan de las tablas 2-4 los valores :

$$K_1 = 2836{,}8 \,.\, 10^7 \text{ (1)}$$
$$K_2 = 1768 \,.\, 10^8$$
$$K_3 = 1164.7 \,.\, 10^9 :$$

las mayores diferencias en la columna 4 de las tablas 2-4, son respectivamente 3,6 %, 4,5 %, 6,8 %. (Los resultados experimentales empleados en mi cálculo tampoco tienen una mayor precisión.)

4. En el año 1913 he encontrado (2) una serie de nuevos rayos propios, emitidos por los elementos Fe, Cu, Zn, Pt, Pb ; los coeficientes específicos de absorción tienen respectivamente los valores 43,9, 23,8, 18,5, 5,6, 21,5, 7,2, 16,2 [$cm^2 gr^{-1}$]. En relación con los rayos descubiertos por Barkla, las nuevas rayas propias de los elementos Fe, Cu, Zn obedecen á la ley (precisión de 2,5 %).

$$\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} = \frac{nK}{N^6} \qquad (4)$$

donde $n$ puede tener los valores 1, 2, ... 7 (3).

*Tabla V*

| Elemento | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ | N | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} . N^6 . 10^{-7}$ |
|---|---|---|---|
| Fe ................ | 43.9 | 26 | 1386 |
| Cu ................ | 23.8 | 29 | 1415 |
| Zn ................ | 18.5 | 30 | 1349 |
| Zn ................ | 5,6 | 30 | 405,2 |

5. Refiriéndonos á la clase L, vemos de la tabla 6, que los coeficientes específicos de los rayos pertenecientes á aquella clase pueden ser expresados por la ecuación

$$\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} = \frac{nL}{N^7} \qquad (5)$$

(1) Valores medios de los números de la columna 4, tablas 2-4.

(2) J. Laub, *loc. cit.*

(3) Hay una clase principal que consiste en diferentes clases $K_n$. Las constantes de las diferentes clases se distinguen por el factor $n = 1, 2, \ldots 7$.

donde la constante L (1) tiene el valor $3606,8 . 10^{11}$, la mayor oscilación es de 12 °/₀. (Hay que tener en cuenta que los valores $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ para los rayos de la clase L no están todavía fijados con una gran precisión).

*Tabla VI*

| Elemento | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al}$ | N | $\left(\frac{\lambda}{d}\right)_{Al} . N^7 . 10^{-11}$ |
|---|---|---|---|
| Ag | 700 | 47 | 3547 |
| Sb | 435 | 51 | 3906 |
| J | 306 | 53 | 3595 |
| Ba | 224 | 55 | 3411 |
| Pt | 21,5 | 76 | 3148 |
| Pt | 7,2 | 76 | 1051 |
| Pb | 16,2 | 82 | 4034 ? |

6. De las tablas podemos ver, que *cuanto más blandos son los rayos propios* (mayor longitud de la onda) *de un grupo,* tanto *mayor valor tienen las constantes de las ecuaciones 2-5.* La relación entre las constantes de dos clases *principales,* del mismo grupo de elementos, es del orden $10^2$. Si lo mismo vale para *todos los* elementos y *todas las clases,* tiene que resolver la experiencia.

7. Los rayos propios de los elementos C y S, descubiertos por mí en el año 1913, pertenecen con seguridad á una clase de rayos mucho más duros que los de las clases K y L. Pero no puedo todavía decir, si pertenecen *á la misma clase* y cual es la ley que vale para ellos. Para resolver esto tenemos que buscar los rayos propios de los elementos S-C (2).

8. El maravilloso descubrimiento de los señores Friedrich, Knipping y Laue ha dado el fundamento para la espectroscopia de la luz Röntgen. El método de medir la absorción de los rayos propios en el aluminio conservará, sin embargo, su valor, si se obtendrá una fórmula exacta que liga el coeficiente específico con la longitud de la onda de los rayos X. Ambos métodos combinados permiten determinar la constante de las rejas para los rayos X.

La Falda, 18 de febrero de 1915.

(1) Valor medio de los números de la columna 4, tabla 6.

(2) Las experiencias en este sentido se efectuarán en breve en el Departamento de física.

# INFORMACIÓN

## IIº CONGRESO INTERNACIONAL DE EUGENIA

Una nueva manifestación colectiva de la intelijencia humana va a realizarse del 23 al 29 de setiembre del corriente año (1915) en la grande urbe norteamericana de Nueva York: nos referimos al segundo congreso internacional de eugenia.

Consecuente con la práctica establecida por nuestros *Anales* de llevar a conocimiento de los estudiosos de la Arjentina el movimiento científico universal, damos a continuación los datos necesarios para que los señores interesados puedan proceder de acuerdo con sus deseos.

Haremos observar que el Comité ejecutivo neoyorkino se ha dirijido a nuestro consocio el señor Víctor Delfino invitándolo a iniciar los trabajos requeridos para constituir un comité local que organice la concurrencia oficial o particular de la Arjentina a aquel certamen social, destinado a favorecer la rejeneración anátomofisiolójica de la humanidad.

He aquí la nota a que nos hemos referido:

American Museum of Natural History.

New York, 17 de julio de 1914.

*Señor Víctor Delfino.*

Buenos Aires, República Argentina.

Mi querido señor Delfino:

Tengo el honor de dirigir á usted este informe de la organización del Segundo congreso internacional de eugenia, que se realizará en el Museo

americano de historia natural de Nueva York en septiembre de 1915, bajo la presidencia honoraria de Alejandro Graham Bell y la presidencia efectiva de Henry Fairfield Osborn. Como usted sabe, el primer congreso se realizó en Londres, bajo la presidencia del mayor Leonardo Darwin. Sus comités estaban integrados por notables representantes de los círculos científicos, filantrópicos y gubernamentales, y los trabajos presentados fueron contribuciones importantes sobre las materias de la eugenia, la cual tiene tan gran importancia, con relación al bienestar social y nacional en sus aspectos científicos.

Á nombre del Comité ejecutivo invito á usted á tomar á su cargo la organización de un Comité consultivo en su país, como en el caso de semejante comité para el primer congreso. Su tarea será la de difundir el interés por el congreso é informar al Comité ejecutivo de tales trabajos, poniendo de manifiesto las afinidades que tal asunto puede ofrecer para sus compañeros y colegas. Necesito agregar que el Comité ejecutivo, actuando como un comité en base al programa, suministrará los títulos de los trabajos ofrecidos por los investigadores fuera del país y seleccionará para su presentación aquellos que juzgue del mayor valor.

El propósito del comité es el de subrayar las bases biológicas de la eugenia. Con ese fin se agruparán los trabajos y las discusiones de acuerdo con su carácter biológico y su significación. Las secciones están dispuestas al presente como sigue :

Sección 1ª. Herencia. (Bases físicas, experimentales, descripción.)

Sección 2ª. Factores de deterioro.

Sección 3ª. Selección, fecundidad.

Sección 4ª. La eugénica en relación con el bienestar nacional y social.

Sección 5ª. Genealogía é historia.

Sección 6ª. Métodos de recolección y análisis de los datos.

Sección 7ª. Eugénica y educación. (La eugénica en la educación.)

Estoy sinceramente convencido de que su ayuda en la organización de este segundo congreso nos será dada en el sentido solicitado. Pensamos publicar una invitación circular completa cuando la organización de los comités consultivos esté completa ; naturalmente deseamos recibir los antecedentes de las personas, etc., tan pronto como sea posible, con lo cual este documento podrá ser distribuído en el próximo otoño.

Tengo el honor de ser muy cordialmente suyo.

*Henry E. Crampton,*

Canciller. Profesor de zoología en el Barnard College
de la Universidad de Columbia, New York.
Conservador del Museo americano de historia natural.

### *Aviso preliminar sobre vicepresidentes*

Por medio del Comité ejecutivo, el Comité central extenderá invitaciones á los hombres y mujeres preeminentes por sus obras científicas y educacionales, conjuntamente en este país y en Europa, aceptando los cargos sobre sus desempeños de vicepresidentes, y manifestando con ello su interés en el sostenimiento de un movimiento que hasta ahora ha sido poco comprendido por el pueblo.

*Objeto.* — El objeto del Segundo congreso eugénico internacional será llamar la atención del mundo sobre aquellos caracteres del movimiento eugénico que han sido apoyados así, hasta soportar el testimonio de la crítica científica. El congreso dará así motivo á una oportunidad para la presentación, crítica y discusión de los nuevos estudios de interés eugénico y pondrá de relieve el hecho de que la eugenia, cualesquiera que sean sus connotaciones y ramificaciones, es esencialmente biológica en sus fundamentos y científica en su espíritu. El actual movimiento eugenésico nació del gran impulso que se suministró al saber humano por la obra de Darwin sobre *El origen de las especies,* y tuvo sus puntos de partida específicos en dos artículos de Francis Galton, publicados en el *Mac-Millan Magazine* en junio y agosto de 1865. La palabra eugenia fué empleada por primera vez por Galton en su libro titulado *Investigaciones sobre la facultad humana (Inquiries into human faculty),* aparecido en 1883. Refiriéndose á un posible conocimiento de la mejora de la raza por medio de la atención consciente al problema de la verdadera selección en el matrimonio, al decaimiento de éste, cuyos resultados probablemente serán calamitosos para el individuo y la sociedad, y el estímulo á los matrimonios prematuros entre aquellos en mejores condiciones para ser padres, Galton escribía : « Nosotros necesitamos grandemente decir una breve palabra para expresar la ciencia de perfeccionar la estirpe, no limitando en modo alguno las condiciones del matrimonio jurídico, sino que, especialmente en el caso del hombre, tomar en cuenta todas las influencias que, aunque en un grado remoto, tienden á dar las más convenientes razas ó clases de sangre ; una mejor suerte de predominar prontamente sobre las menos convenientes, á las cuales de otro modo hubieran llegado. La palabra *eugenia* (del griego *eugenes* significando buena estirpe ó bien engendrado) puede expresar suficientemente la idea : es á lo menos una palabra muy pura y más generalizada que viricultura, por lo cual aventúrome á usarla. »

Desde que fueron escritas estas palabras, el movimiento eugenésico se ha extendido rápidamente en los principales países civilizados del mundo y se ha organizado un Comité internacional permanente para la centralización que se hará de los trabajos. Es probable que los congresos internacionales se realicen en períodos regulares, mostrando lo que se ha hecho por los bió-

logos, psicólogos, antropólogos y educadores acerca de la « estructura definitiva de aquellos factores, bajo el control social, que pueden perfeccionar ó deteriorar las calidades racionales, física ó mentalmente », como Galton denominó al material para estudio, como una base para la futura ciencia eugénica.

Este congreso reitera y vuelve á subrayar el plan de la obra, bosquejado por el fundador del movimiento, el cual fué :

1° La difusión del conocimiento de las leyes de la herencia, tanto como son conocidas y promover su estudio ulterior;

2° Investigaciones acerca de la proporción de los nacimientos en las varias clases de la sociedad en los tiempos antiguos y modernos;

3° Recoger los antecedentes dignos de confianza, que demuestran cómo más frecuentemente se han originado las más grandes y prósperas familias;

4° Estudiar las influencias que afectan al matrimonio ;

5° Demostrar la importancia de la eugenia para el futuro bienestar de los pueblos y naciones.

*Miembros.* — Los miembros del congreso, incluso el privilegio de asistir á las sesiones y el volumen de sus actas, cuando sean publicadas, deberán presentar una solicitud al canciller, acompañada de los derechos de socio, que son de cinco dólares. Las sociedades científicas y otras instituciones, universidades, cuyos intereses son afines con los del congreso, recibirán invitaciones de enviar delegados al congreso y para que los comités consultivos extranjeros que se están organizando tomen participación en la obra del exterior.

*Organización.* — La organización del congreso ha sido completada como sigue :

Alexander Graham Bell, presidente honorario. Henry Fairfield Osborn, presidente efectivo.

*Comité ejecutivo.* — Henry E. Crampton, canciller, profesor de zoología en el Barnard College de la Universidad de Columbia y conservador del Museo americano de historia natural.

James Mc Keen Cattei, profesor de psicología en la Universidad de Columbia.

Chas B. Davenport, director de la estación de evolución experimental Carnegie Institution of Washington y director residente del Eugenics Record Office, Cold-Spring Harbor, L. 1.

Franklin H. Giddings, profesor de sociología en la Universidad de Columbia.

August Hoch, director del Instituto de psiquiatria de Wards Island.

Edmund B. Wilson, profesor de zoología en la Universidad de Columbia.

Frederick Adams Wood, Brookline, Mass.

Arthur E. Hamilton, secretario del Extension Department del Eugenics Record Office.

En virtud de los trabajos iniciados, el Comité consultivo argentino ha quedado constituído así:

Presidente, doctor Genaro Sisto; vicepresidente, doctor Alfredo L. Palacios; secretario general, profesor Víctor Arreguine; tesorero, Víctor Delfino; vocales, doctores Marcelino Herrera Vegas, Pedro L. Baliña, Mariano R. Castex, Ricardo Calatroni.

Como se ve, las siete secciones que abarcará el congreso ofrecen un vasto campo en el terreno de la biojénesis antrópica, o más precisamente de la eugénesis. Dos grandes grupos de estudio, el de las observaciones científicas i el del análisis de las mismas, para su aplicación racional a los fines que se proponen los señores congresistas, entre los cuales figuran personalidades científicas de fama mundial.

Creemos que la Arjentina, dada su importancia bien adquirida en la América austral, debe concurrir a estos certámenes para demostrar a los sabios del mundo entero que cuenta, no sólo con hombres de ciencia, sino que también con obreros laboriosos, dispuestos a contribuir con su grano de arena a la obra común.

S. E. Barabino.

# BIBLIOGRAFÍA

---

**Annuaire pour l'an 1915** publié par le *Bureau des longitudes*, avec une *Notice scientifique*. Un volumen de 1000 pájinas con figuras i 4 láminas de color. Gauthier-Villars i compañía, editores. Paris, 1915. Precio 1,50 francos.

Año por año hemos venido anunciando la aparición de esta utilísima publicación del *Bureau des longitudes* que tiene ya 119 años de existencia, lo cual es la más fehaciente demostración de su bondad.

Este año, como los anteriores, además de los calendarios correspondientes, trata de los fenómenos celestes, mareas, estrellas; de la tierra i de sus coordenadas astronómicas; del sol, la luna, de los planetas, satélites, cometas, estrellas, etc.

Trae, además, interesantísimos datos jeográficos, numerosos cuadros, huso, horarios, hora legal; pesas, medidas i monedas; tablas de interés i amortización, informaciones meteorolójicas, etc.

Bueno es recordar que desde 1900 los horarios están espresados en *tiempo civil medio* de $0^h$ a $24^h$, a partir de media noche; desde 1912 los fenómenos siderales se refieren en *tiempo legal* (tiempo *medio* de París, disminuído de $9{,}21^s$); que los datos físicos i químicos no figuran en este año, pues de acuerdo con el plan establecido, se publicarán en el anuario de 1916.

En éste se ha introducido muchas mejoras i ampliaciones. Haré notar una nota astronómica del señor G. Bigourdan sobre las *Constelaciones* i una importante memoria del mismo sobre los *Métodos de examen de los espejos i de los objetivos*.

Francamente vale la pena tener sobre la mesa de trabajo i por 1,50 francos una obra esencialmente científica i útil.

S. E. Barabino.

**Restauration des montagnes, correction des torrents, reboisements**, por E. Thiery. Pertenece á la *Encyclopédie des travaux publics*, fundada por M. C. Lechalas. Consta de un tomo de 468 páginas, editado por la librería de Ch. Béranger, de París.

Bajo este título, el autor desarrolla un curso completo de hidráulica fluvial, deteniéndose especialmente en el estudio de los ríos torrenciales y la repoblación de bosques.

Es una obra que se agrega á la literatura hidráulica, tan escasa de publicaciones interesantes, y que, por la manera sencilla y clara de abordar el tema, impresiona al lector agradablemente.

Divídese el libro en tres partes: la primera trata la descripción del fenómeno torrencial; la segunda, la corrección de los torrentes; la tercera, los trabajos de repoblación de montes y asuntos diversos con ella relacionados.

Haremos un ligero análisis particular de cada uno de sus capítulos.

*Primera parte.* — Capítulo I. Desarrolla algunas nociones de hidráulica aplicable á los cursos torrenciales y al arrastre y depósito de materiales.

Capítulo II. Es una clasificación de los cursos torrenciales y partes constitutivas de un torrente. Esta clasificación es clara y distingue con sencillez los ríos, ríos torrenciales y torrentes. Las partes constitutivas de un torrente son objeto de una atención especial: distingue con precisión sus diferentes zonas y menciona las variantes de tipos de cuencas, canales de circulación, lechos de deyección y lechos de evacuación.

Capítulo III. Trata la formación de los torrentes, haciendo un estudio de las influencias geológicas y climatéricas; cita la influencia que tienen los bosques en su formación, los que considera como un obstáculo opuesto naturalmente á su desarrollo y llega á las siguientes conclusiones: 1ª la presencia de un bosque impide la formación de un torrente; 2ª la destrucción de un bosque libra al suelo de un obstáculo para el desarrollo de un torrente.

Capítulo IV. Es un estudio del origen de los materiales transportados por los torrentes.

Capítulo V. Sobre el régimen de los torrentes. Estudia el transporte parcial y en masa los «barrages» temporarios, formados por dos clases de elementos, los flúidos y los sólidos; los primeros permanecen íntimamente mezclados, pero los segundos, llegando á las cascadas existentes en la mayoría do los torrentes, se separan de la masa viscosa, precipitándose por las pendientes abruptas con grandes velocidades y deteniéndose cuando la pendiente disminuye, formando así un «barrage». Á menudo las aguas franquean estos obstáculos y se precipitan con gran potencia de corrosión, ejecutando un trabajo destructivo.

Capítulo VI. Sobre el perfil de compensación de los torrentes, cuyas pendientes se forman según el transporte parcial. Dedica un breve artículo á la posibilidad de aplicar á los torrentes el movimiento permanente.

Capítulo VII. Es un estudio detallado de lás diferentes fases de la formación de los lechos de deyección.

Capítulo VIII. Describe los daños causados por los torrentes en sus diversas secciones.

Capítulo IX. Sobre clasificación topográfica y otra basada en el origen de los materiales arrastrados por los torrentes.

*Segunda parte.* — Capítulo X. Sobre relación de erosiones mecánicas de una construcción de mampostería.

Capítulo XI. Sobre resistencia y estabilidad de los «barrages» rectos y de mampostería.

Capítulo XII. De los «barrages» curvilíneos.

Capítulo XIII. Utilidad de los trabajos de restauración.

Capítulo XIV. Utilidad de los trabajos de corrección. Estudio sobre el terreno.

Capítulos XV y XVI. Estos capítulos están dedicados á las correcciones de los

torrentes susceptibles de derrubio. El XV trata de la corrección de las gargantas y barrancos principales; y el XVI de la corrección de las gargantas y barrancos secundarios. Son capítulos muy interesantes por la exposición de las distintas maneras de atenuar los derrumbamientos y resbalamientos que se producen en estos cursos.

Capítulo XVII. Corrección de los torrentes glaciares, torrentes de transporte y torrentes mixtos. La diferencia que el autor establece entre estos torrentes y los estudiados en los capítulos XV y XVI, consiste en que se puede llegar á suprimir en éstos la producción de materiales, cosa que no es posible en los torrentes estudiados en este capítulo.

Capítulo XVIII. Versa sobre trabajos diversos, como ser: previsión contra los aludes, que se realiza mediante plantaciones, muretes, etc.; fijación de materiales inestables, estudio de los lagos, glaciares, etc.

Capítulo XIX. Sobre altura de los « barrages », su emplazamiento, etc.

Capítulo XX. Estudio de recopilación de nociones generales sobre la construcción de obras de defensa.

*Tercera parte.* — Dedicada á los trabajos de repoblación de montes.

Capítulo XXI. Dificultades que presenta la repoblación de montes.

Capítulo XXII. Granos, elección de esencias, etc.

Capítulo XXIII. Métodos usados en la repoblación.

Capítulo XXIV. Ejecución de los trabajos de repoblación.

Capítulo XXV. Situación de los trabajos.

Van intercalados en el texto grabados, tablas y gráficos que ilustran sobre los diversos tópicos que constituyen la obra.

ANECTO J. BOSISIO.

A flora of California, por WILLIS LINN JEPSON, PH. D., 1909-914. Partes I-IV (con figuras).

Comprende el estudio sistemático de la flora califórnica, con esta distribución.

*Parte I.* — *Pinaceae* á *Taxaceae* (1909).

*Parte II.* — *Salicaceae* á *Urticaceae* (1909),

*Parte III.* — *Gnetaceae* á *Cyperaceae* (1912).

*Parte IV.* — *Platanaceae* á *Portulacaceae* (1914).

Se comprenderá fácilmente la importancia de tal obra para nosotros, dadas las relaciones fitogeográficas que podrán establecerse con nuestra propia flora, muchos de cuyos elementos están en ella representados.

AUGUSTO C. SCALA.

## FE DE ERRATAS

DEL ARTÍCULO

# EXPEDICIÓN AL IBERÁ

POR HIPÓLITO B. POUYSSÉGUR

(TOMOS LXXVIII, 241-258, LXXIX, 35-64 Y 135-164)

---

| T. 78 pág. | Línea | Dice | Debe decir |
|---|---|---|---|
| 243 | 15 | ... sangre grado *(Crattou succirubrus fide Parodi)* | ... sangre de drago ó « sangre grado » *(Croton succirubrus* Parodi) |
| 247 | 7 | « Films Poeks » | « film-packs » |
| 249 | 30 | *pleuston* | *benthos* |
| 252 | 15 | *Solanum lepaso* | *Solanum leprosum* |
| 253 | 24 | *Amaranthus gomphrena* | *Amarantus* y *Gomphrena* |
| 253 | 40 | archellensis | Archhelenis |
| 254 | 39 | *Agelaius thibus* | *Agelaius thilius* |
| 255 | 1 | *Cyanocorus* | *Cyanocorax* |
| 255 | 3 | *Yacana Yacana* | *Jacana Jacana* |
| 255 | 8 | *Enterolabium timboswa* | *Enterolobium timboura* |
| 255 | 22 | *Victoria crujiana* | *Victoria cruziana* |
| 256 | 6 | *Phalacrocora* sp. | *Phalacrocorax sp.* |
| 257 | 38 | *Phyncops* sp. | *Rhyncops sp.* |
| 258 | 12 | ENRIQUE PUYSEGUR | HIPÓLITO B. POUYSSÉGUR |
| T. 79 | | | |
| 35 | 35 | *Brucchus fisorum* | *Bruchus pisorum* |
| 36 | 5 | *B. forum* | *Bruchus pisorum* |
| 39 | 39 | *Solminus* sp. | *Salminus sp.* |
| 46 | 21 | *Baubinia* | *Bauhinia* |
| 48 | 36 | *Pistra* | *Pistia* |
| 51 | 7 | *Efeira socialis* | *Epeira socialis* |
| 53 | 8 | *Potamogetum* | *Potamogeton* |
| 53 | 8 | *Minophilos* | *Myriophyllum* |
| 56 | 19 | *Asmunda* | *Osmunda* |

| T. 79 pág. | Línea | Dice | Debe decir |
|---|---|---|---|
| 56 | 19 | *Pteros* | *Pteris* |
| 55 | 4 | alimáceas | alismáceas |
| 57 | 13 | *Ryopotamus* | *Myopotamus* |
| 58 | 20 | *Camponatus* | *Camponotus* |
| 60 | 8 | *Colombas* | *Cabombas* |
| 60 | 11 | *Xanthosylon* | *Xanthoxylon* |
| 60 | 11 | *Tobebuina Avellanedae* | *Tabebuia Avellanedae* |
| 60 | 35 | *Salis* | *Salix* |
| 63 | 36 | *Ochras* sp. | *Achras sp.* |
| 63 | 39 | *Oreo daphie?* | *Oreodaphne?* |
| 64 | 1 | *Blephorocolis* sp. | *Blepharocalyx sp.* |
| 64 | 13 | *Aerocomia tatai* | *Acrocomia totai* |
| 136 | 16 | *Cassia bonariensis* | *Acacia bonariensis* |
| 153 | 3-4 | Dinosaurios. Saurópodos y mamíferos. Multituberculata | Dinosaurios saurópodos y mamíferos multituberculados |
| 155 | 1 | serie 553 | serie 3ª |
| 157 | 37 | Calcaracas | Calcáreos |
| 159 | 5 | *Cerchneiss* ... (Bidgno) | *Cerchneis* ... (Ridgw.) |
| 159 | 6 | *Miziopsitta* | *Myopsitta* |
| 159 | 9 | *Deudro colaptidæ* | *Dendrocolaptidæ* |
| 159 | 10 | *Toenioptera* | *Taenioptera* |
| 159 | 12 | *Phanesticus* | *Planesticus* |
| 159 | 15 | *pitiayunai* | *pitiayumi* |
| 164 | | El perfil geológico de las barrancas del Paraná [lámina 3ª] está tomado de d'Orbigny, *Voyage dans l'Amér. mérid., Géol., Atlas,* pl. 4. | |

# PUBLICACIONES RECIBIDAS EN CANGE

## EXTRANJERAS *(conclusión)*

### Italia

Atti della I. R. Accad. di Scienze Lettere ed Arti degli Agiati, Rovereto — Atti della R. Accad. dei Fisiocritici, Siena. — Riv. Ligure, Genova. — Riv. di Artiglieria e Genio, Roma. — Boll. della Soc. Geografica Italiana, Roma. — Ann. della Soc. degli Ing. e degli Architetti, Roma. — «Il Politecnico», Milano. — Boll. della Soc Zoologicá Italiana, Roma. — Gazz. Chimica Italiana, Roma. — L'Elettricitá, Milano. — Boll. Scientifico, Pavia. — Riv. Italiana di Scienze Naturali e Boll. del Naturalista Collettore, etc., Siena. — Atti della Soc. dei Naturalisti, Modena. — Boll. della Soc. Entomológica Italiana, Firenze. — Boll. della Soc. Médico Chirurgica, Pavia. — Atti della Soc. Linguistica, Genova. — Boll. del R. Comtato Geologico d'Italia, Roma. — Boll. della R. Scuola Super. d'Agricultura, Portici. — Atti della Assoc. Elettrotecnica Italiana, Roma — Il monitore Tecnico, Milano. — Boll. del R. Orto Botanico, Palermo. — Commissione Speciale d'Igiene del Municipio, Roma — Boll. Mensuale dell'Osservatorio Centrale del R. Colegio Alberto in Moncalieri, Torino. — Atti del R. Instituto d'Incoraggiamento, Napoli. — Accad. delle Scienze, Torino. — Atti della Soc. Toscana di Scienze Naturali, Pisa. — Ann. del Museo Civico di Storia Naturale, Genova. — Osservatorio Vaticano, Roma. — Rass. delle Scienze Geologiche in Italia, Roma. — L'Ingegneria Ferroviaria, Roma. — Atti della R. Accad. di Scienze, Lettere ed Arti, Modena. — Studi Sassaresi, Sassari — Riv. Tecnica Italiana, Roma. — Osservatorio della R. Universitá, Torino. — Atti del Collegio degli Ingegneri e Architetti, Palermo.

### Japón

The Botanical Magazine, Tokyo. — The Journal. of Geography, Tokyo. — Annotations Zoological Japaness, Tokyo. — The Zoological Society, Tokyo.

### Méjico

Bol. del Observ. Astronómico Magnético Metereológico Central Méjico. — Bol. del Observ. Nacional, Tacubaya. — An. del Museo Nacional, Méjico. — La medicina cien f a Méjico. — Memoria y Rev. de la Soc. científica, Antonio Alzate. — La Farmacia, Mejico. — An. del Inst. Médico Nacional, Méjico. — Bol. del Inst. Geológico, Méjico.

### Natal

Geological Survey of the Colony, Natal.

### Paraguay

An. de la Universidad, Asunción.

### Portugal

Bol. da Soc. Broteriana, Coimbra. — Jornal da Soc. das Sciencias Médicas, Lisboa. — Acad. R das Sciencias, Lisboa. — Bol. da Soc. de Geographia, Lisboa. — O Insttiuto Rev. Scient. é Litteraria, Coimbra. — Bol. do Observ. Metereológico é Magnetico, Coimbra — Jornal das Sciencias Matemáticas é Astronómicas, Coimbra. — Bol. do Observ. da Universidade, Coimbra. — Bol. do Observ. Meterológico do Infante Dom Louis. Lisboa.

### Perú (Lima)

An. de Minas. — Bol. de la Soc. Geográfica. — La Gaceta Cientifica. — Informaciones y Memorias de la Soc. de Ingenieros del Perú. — Rev. de Ciencias.

### Rumania

Bol. d Soc. Geográfica, — Bucuresci.

### Rusia

Soc. de Sciences Expérimentales, Kharkow. — Bul. de la Soc. de Geographie, Helsingfors. — Memoires de la Acad. Imper. des Sciences, San Petersbourg. — Bull. de la Soc. Polithécnique, Moscow. — Rev. des Sciences Mathématiques, Moscow. — La Biblioteca Politecnica, San Petersbourg. — Las Ciencias Físico Matemáticas en la Actualidad y en el Porvenir, Moscow. — Soc. pro Fauna et Flora, Filandia, Helsingfors. Rusia. —

Bull. de la Soc. Impér. des Naturalistes, Moscow. — An. de la Soc. Phisico Chimique, San Petersbourg. — Bull. de la Soc. Imper. de Geographie, San Petersbourg. — Phisicalische Central Observatorium, San Petersburg. — Bull. du Jardin Imper. de Botanique, San Petersburg. — Korrespondensblat de Natufors Vereins, Riga. — Bull. du Comité Géologique, San Petersburg. — Bull. de la Soc des Naturalistse de la Nouvelle Russie, Odesa.

### San Salvador

Observ. Meteorológico y Astronómico, El Salvador.

### Suecia y Noruega

Sveriges geologisca Underskning, Stockolm. — Bull. of the Geological Inst. University of Upsala, Suecia. — Kongl. Vetenskaps. Akademiens. Acad. des Sciences, Stockolm. — Reggia Soc. Scientiarum y Litterarum, Göteborgensis. — Porhandl et Vidensk Selskabet, Cristiania.

### Suiza

Bull. Tecnique de la Suisse Romande, Laussanne. — Geographich Ethnographiche gesellschaft. Zurich. — Soc. Hevéltique des Sciences Naturelles, Berna. — Bull. de la Soc. Neufchateloise de Geographie.

### Uruguay (Montevideo)

Vida Moderna. — Rev. de la Asociacion Rural. — Bol. de la Enseñanza Primaria. — Bol. del Observ. Metereológico, Villa Colón. — An. de la Universidad. — An. del Museo Nacional. — Bol. del Observ. Metereorológico Municipal. — An. del Departamento de Ganaderia y Agricultura.

## NACIONALES

### Buenos Aires

Rev. de la Fac. de Agronomía y Veterinaria, La Plata. — Rev. del Centro Universitario. La Plata. — Bol. de la Biblioteca Pública, La Plata. — An. del Museo, La Plata. — Oficina Químico Agrícola, La Plata. — An. del Observ. Astronómico, La Plata. — Rev. Mensual de la Cámara Mercantil, Barracas al Sud.

### Capital

An. del Círculo Médico Argentino. — An. de la Universidad de Buenos Aires. — Archivos de Criminalogía, Medicina legal y Psiquiatria. — Bol. del Inst. Geográfico Argentino. — Bol. de Estadística Municipal. — Rev. Farmacéutica. — La Ingeniería. — An. del Depart Nacional de Higiene. — Rev. Nacional. — Rev. Técnica. — An. de la Soc. Rural Argentina. — An. del Museo Nacional de Buenos Aires. — Bol. Demográfico Argentino. — Rev. de la Soc. Médica Argentina — Rev. de la Asociacion Estudiantes de Ingeniería. — Rev de la Liga Agraria. — Rev. Jurídica y de Ciencias Sociales. — Bol. de la Union Industrial Argentina. — Bol. del Centro Naval. — El Monitor de La Educacion Común. — Enciclopedia Militar. — La Semana Médica. — Anuario de la Direccion de Estadística. — Rev. del Círculo Militar.

### Córdoba

Bol. de la Acad. Nac. de Ciencias.

### Entre-Ríos

An. de la Soc. Rural.

### Tucumán

Anuario Estadístico.

---

## SUBSCRIPCIONES

### Paris

Annales des Ponts et Chaussées. — « Revue ». — Contes Rendus de l'Académie des Sciences. — Annales de Chimie et de Physique. — Nouvelles Annales de Mathématiques. — « La Nature ». — Nouvelles Annales de la Constauction (Oppermann). — Revue Scientifique. — Revue de Deux Mondes.

### Roma

Trattato Generale dell'Arte dell'Ingegnere. — Giornale del Genio Civile.

### Milano

Il Costruttore — L'Elettricitá.

### Londres

The Builder.

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

DIRECTOR : DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH

MAYO-JUNIO 1915. — ENTREGAS V-VI. — TOMO LXXIX


ÍNDICE




BUENOS AIRES

IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS

684 — CALLE PERÚ — 684

1915

## JUNTA DIRECTIVA

| | |
|---|---|
| *Presidente* | Doctor **Francisco P. Lavalle** |
| *Vicepresidente 1º* | Ingeniero **Eduardo Huergo** |
| *Vicepresidente 2º* | Doctor **Claro C. Dassen** |
| *Secretario de actas* | Doctor **Luciano P. J. Palet** |
| *Secretario de correspondencia* | Ingeniero **Anecto J. Bosisio** |
| *Tesorero* | Ingeniero **Benno J. Schack** |
| *Protesorero* | Arquitecto **Raúl G. Pasman** |
| *Bibliotecario* | Profesor **José T. Ojeda** |
| *Vocales* | Ingeniero **Santiago E. Barabino**<br>Ingeniero **Jorge W. Dobranich**<br>Doctor **Martiniano Leguizamón Pondal**<br>Doctor **Tomás J. Rumi**<br>Ingeniero **Oronte A. Valerga**<br>Doctor **Enrique del Valle Iberlucea**<br>Ingeniero **Eduardo Volpatti**<br>Ingeniero **Alberto D. Otamendi** |
| *Gerente* | Señor **Juan Botto** |

---

## ADVERTENCIA

Los colaboradores de los *Anales*, que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos deben solicitarlo por escrito a la Dirección, la que le dará el tramite reglamentario. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con los editores señores Coni hermanos.

Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas.

Los manuscritos, correspondencia, etc., deben enviarse a la Dirección **Cevallos, 269**.

*Cada colaborador es personalmente responsable de la tesis que sustenta en sus escritos.*

**La Dirección.**

---

## PUNTOS Y PRECIOS DE SUBSCRIPCIÓN

**Local de la Sociedad, Cevallos 269, y principales librerías**

| | Pesos moneda nacional |
|---|---|
| Por mes | 1.00 |
| Por año | 12.00 |
| Número atrasado | 2.00 |
| — para los socios | 1.00 |

LA SUBSCRIPCIÓN SE PAGA ADELANTADA

**El local social permanece abierto de 3 á 7 y de 8 á 12 pasado meridiano**

# MEMORIA ANUAL

## DEL PRESIDENTE DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

CORRESPONDIENTE
AL XLII° PERÍODO ADMINISTRATIVO (1° DE ABRIL DE 1914 Á 31 DE MARZO DE 1915)
LEÍDA EN LA ASAMBLEA DEL 14 DE ABRIL DE 1915



Señores consocios :

En cumplimiento de lo que prescribe el artículo 19, inciso 9°, de los estatutos, voy á daros cuenta detallada del movimiento social habido durante el XLII° período administrativo fenecido el 31 de marzo próximo pasado.

*Junta directiva.* — En la asamblea del 14 de abril del año próximo pasado quedó compuesta la Junta directiva en la siguiente forma :

*Presidente :* doctor Francisco P. Lavalle.

*Vicepresidente 1° :* ingeniero Eduardo Huergo.

*Vicepresidente 2° :* doctor Claro C. Dassen.

*Secretario de actas :* doctor Augusto Chaudet.

*Secretario de correspondencia :* ingeniero Anecto J. Bosisio.

*Tesorero :* ingeniero Benno J. Schnack.

*Protesorero :* arquitecto Raúl G. Pasman.

*Bibliotecario :* profesor José T. Ojeda.

*Vocales :* ingeniero Santiago E. Barabino, ingeniero Jorge W. Dobranich, doctor Martiniano Leguizamón Pondal, doctor Tomás J. Rumi, ingeniero Oronte A. Valerga, doctor Enrique del Valle Iberlucea.

Por renuncia del secretario de actas doctor Augusto Chaudet, en la asamblea del 5 de mayo de 1914 fué nombrado el doctor Luciano

P. J. Palet para desempeñar dicho cargo. En la misma asamblea se integró la Junta directiva con el nombramiento de los señores ingenieros Eduardo Volpatti y Alberto D. Otamendi en calidad de vocales, de acuerdo con los nuevos estatutos.

Así constituída, ha funcionado hasta la fecha, y en las veintiuna sesiones celebradas tomó en consideración y despachó todos los asuntos entrados, habiendo tomado entre otras las siguientes resoluciones:

Á solicitud del Comité argentino de la Exposición universal de San Francisco de California, se enviaron para ser expuestos en dicha exposición los catorce últimos tomos de los *Anales* publicados y que corresponden á los años 1900 á 1914.

Debo manifestar que el jurado de la Exposición universal de « Gante » acordó á la Sociedad un diploma y medalla de plata por los *Anales* presentados en aquel certamen, premio que, agregado á los ya obtenidos en diferentes exposiciones, forma un total de siete premios.

En virtud de que algunas revistas con las cuales la Sociedad mantenía el canje con sus *Anales* no correspondían á éste con regularidad, se resolvió suprimir el canje de todas aquellas que no hubieran correspondido durante los tres últimos años, y establecerlo con otras de interés para los asociados.

Aproximándose la fecha del primer centenario de nuestra independencia, y en el deseo de que la Sociedad participe en los festejos que con tal motivo se realizarán, se resolvió ofrecer al señor ministro de Agricultura el concurso de la Sociedad para los trabajos de organización y realización del Congreso y exposición de agricultura por celebrarse en aquella fecha.

Se solicitó y obtuvo del señor ministro de Obras públicas las estampillas necesarias para el franqueo del II° volumen del Congreso científico internacional americano, cuyas estampillas importaban la suma de 793 pesos con 20 centavos moneda nacional.

Adherirse al « International Engineering Congress » por reunirse en San Francisco de California en el mes de septiembre del corriente año; al XIX Congreso internacional de americanistas por reunirse á fines del año 1914 en La Paz (Bolivia), y al Congreso de bibliografía é historia por celebrarse en esta capital en 1916 con motivo del primer centenario de nuestra independencia.

Pasar notas á las casas editoras de esta capital, para que, como lo hacen varias casas editoras europeas, envíen para la biblioteca social un ejemplar de las obras que editen.

Designar al señor presidente para representar á la Sociedad en el acto de la distribución de premios habida en la Facultad de ciencias médicas y velada dada el 12 de julio próximo pasado con motivo del tercer aniversario del fallecimiento del sabio doctor Florentino Ameghino.

Efectuar una nueva edición de diplomas de socios activos y una menor especial en pergamino para socios honorarios.

Remitir al Comité de homenaje al ingeniero Luis A. Huergo la suma de 205 pesos moneda nacional, producto de la colecta realizada entre los socios.

Hacer entrega del diploma de socio honorario al doctor Eduardo L. Holmberg en un acto público que organizará oportunamente la Junta directiva.

Hacer las gestiones necesarias ante el honorable congreso para que se mantuviera el subsidio de que goza la Sociedad, en la cantidad primitiva, el que en el año 1914 había sido reducido á un 50 por ciento, debido á las economías introducidas por el Poder ejecutivo.

A este respecto me es grato hacer constar que se obtuvo la sanción favorable, pues en el presupuesto para el corriente año figura nuestra Sociedad con la suma de 500 pesos mensuales.

Debido al mal estado de conservación en que se encuentra el local social, lo que pone en peligro las existencias de la biblioteca, la presidencia trató de interesar al ex intendente municipal doctor Anchorena en pro de la Sociedad; con tal fin lo invitó personalmente á visitar el local, á cuya visita se dignó concurrir y darse cuenta de lo justo que era el pedido que le formulara con anterioridad verbalmente respecto á la cesión de alguno de los edificios de propiedad de la comuna, donde pudiera instalarse la Sociedad ó en su defecto se le acordara un subsidio. El intendente se retiró muy bien dispuesto prometiendo estudiar el asunto para ver la forma mejor y viable de ayudar á nuestra Sociedad. Las circunstancias que sobrevinieron después hicieron fracasar estas gestiones.

También se solicitó del ministerio de Obras públicas, se hicieran por administración algunas refacciones en el local social, á fin de poder salvar que fueran destruídas por la humedad las valiosas obras de la biblioteca. La Dirección general de arquitectura adonde pasara el expediente para que esa dirección informara sobre la vialidad del pedido, ordenó la inspección ocular del local por un técnico, quien tomó todas las medidas necesarias para formular el costo de los tra-

bajos. Hecho esto y siguiendo el expediente los trámites de estilo, pasó nuevamente informado al ministerio, donde se encuentra actualmente para su resolución.

Con motivo del nombramiento del profesor doctor Walther Nernst como socio honorario de la Sociedad, la Junta directiva resolvió hacerle entrega del diploma correspondiente en acto público, el cual se efectuó el 9 de mayo, desarrollándose el siguiente programa :

1º Apertura del acto por el presidente de la Sociedad Científica Argentina, doctor Francisco P. Lavalle ;

2º Doctor Horacio Damianovich. *Síntesis de la obra científica del profesor doctor Walther Nernst ;*

3º Doctor Walther Nernst. *Sobre los calores específicos y su aplicación al estudio de la constitución de los cuerpos sólidos ;*

4º Entrega de los diplomas de socio honorario de la Sociedad Científica Argentina y de la Sociedad Química Argentina por sus respectivos presidentes, doctor Francisco P. Lavalle y doctor Guillermo Schaefer.

Este acto fué organizado de común acuerdo con la Sociedad Química Argentina, la que, habiendo nombrado también socio honorario al doctor Nernst, manifestó sus deseos de hacerle entrega del diploma conjuntamente con el que le entregara la Sociedad.

Pasar una circular á los señores socios pidiendo se sirvieran indicar las obras y revistas cuya adquisición por parte de la Sociedad creyeran conveniente.

Con motivo de las conferencias que diera en la Universidad de La Plata el profesor doctor Walther Nernst, la Junta directiva resolvió invitar á sus asociados á concurrir á ellas.

Otras resoluciones de relativa importancia fueron tomadas en el transcurso del período, de las que omito el detalle, por no molestar tanto la atención de la asamblea.

*Congreso científico internacional americano.* — La Junta directiva en virtud de no disponer de fondos para proseguir la publicación de las memorias presentadas á dicho congreso, y deseando no dejarla trunca, resolvió dirigirse al honorable Congreso de la Nación para solicitar los recursos necesarios para el objeto indicado.

Con tal fin se dirigió á la honorable Cámara de senadores pidiendo se acordara á la Sociedad la suma de 40.000 pesos destinada á sufragar los gastos de la referida publicación. El pedido fué despachado favorablemente por dicha cámara, pero pasado el expediente á la Cámara de diputados para su sanción definitiva, ésta no alcanzó á tra-

tarlo en las sesiones ordinarias, y como es de consiguiente quedó aplazado.

La presidencia, haciendo un último esfuerzo, gestionó personalmente ante la comisión de presupuesto de la cámara de senadores la inclusión de dicha partida en el presupuesto para el corriente año. Estas gestiones dieron el resultado deseado, aunque no en su totalidad, pues sólo se acordó la suma de 15.000 pesos, con cuya suma unida al saldo de pesos 3840,88, que posee la Sociedad proveniente de los fondos recibidos de la Comisión nacional del centenario para organización y realización del congreso y el saldo del producido por concepto de adhesiones que suman la cantidad de 6006,08 pesos podrá proseguirse la publicación de las memorias.

Debo hacer constar que el despacho favorable obtenido en el congreso fué debido á la oportuna y eficaz intervención de los señores senadores doctor Enrique del Valle Iberlucea, nuestro consocio y compañero de comisión, y del ingeniero Valentín Virasoro, para quienes pido á la asamblea la sanción de un voto de especial agradecimiento.

Como hasta la fecha sólo se ha publicado una parte de los trabajos pertenecientes á la sección ingeniería sin las láminas correspondientes, la Junta directiva ha resuelto que antes de todo se complete el volumen aparecido con la impresión de las láminas respectivas, continuándose después con los demás trabajos.

*Asambleas.* — En el período que expira se han celebrado cuatro asambleas, en las cuales se ha dado lectura y aprobado la memoria anual correspondiente al XLI° período administrativo y renovación de la Junta directiva. Elección de secretario de actas en reemplazo del doctor Augusto Chaudet, que renunció, y nombramiento del profesor doctor Walther Nernst y doctor Eduardo L. Holmberg como socios honorarios.

*Conferencias.* — Las conferencias organizadas por la Junta directiva por realizarse durante el período, representaban un núcleo variado é interesante que, á pesar de nuestra buena voluntad, no pudo desarrollarse sino en parte.

Las realizadas fueron las siguientes :

Mayo 9. *Síntesis de la obra científica del profesor doctor Walther Nernst,* por el doctor Horacio Damianovich.

Mayo 9. *Sobre los calores específicos y su aplicación al estudio de la constitución de los cuerpos sólidos,* por el profesor doctor Walther Nernst.

Julio 15. *Las epidemias de las guerras. Mi actuación en la campaña de los Balcanes,* por el doctor Rodolfo Kraus.

Julio 25. *El desarrollo normal del germen humano,* por el doctor Victor Widakowich.

Agosto 7. *Sobre blastoftoria. Desarrollo patológico del germen humano,* por el doctor Victor Widakowich.

Octubre 10. Conferencia patrocinada por la Liga nacional de educación *Sobre analfabetismo y semianalfabetismo,* por el profesor Luis Morzone.

*Visitas efectuadas.* — Se efectuaron dos visitas, una á la usina de la Compañía italoargentina de electricidad, la que se llevó á cabo el 3 de octubre próximo pasado, á la que asistió un regular número de asociados. Por el informe publicado en los *Anales* relativo á dicha visita, podrá verse la importancia del establecimiento citado.

La otra, muy reciente, se efectuó al acorazado *Rivadavia,* que, como recordarán los señores socios, fué sumamente interesante bajo todo punto de vista.

*Homenaje pro-Ameghino.* — Debido á la mala situación actual por que atraviesa el país con motivo de la guerra europea, y como es de consiguiente, la circunstancia poco propicia para continuar la subscripción iniciada para el homenaje por tributarse á la memoria del ilustre sabio argentino, la Junta directiva resolvió suspender hasta mejor oportunidad la distribución de listas que se había iniciado con relativo éxito.

De los trabajos realizados por la junta ejecutiva del homenaje se ha dado cuenta detallada en la memoria presentada por la presidencia á la asamblea el año anterior, por lo que sólo me resta agregar que, de tiempo en tiempo se siguen recibiendo algunas de las listas que fueron distribuídas oportunamente, acompañadas de pequeñas contribuciones algunas, y en blanco otras.

Es sensible decirlo, pero lo cierto es que, á medida que la figura del sabio se agiganta, la subscripción disminuye notablemente, debido, no hay duda, á la crítica situación financiera, de todos conocida.

El estado actual de los fondos del homenaje puede verse por el balance correspondiente que se agrega al final de esta memoria.

Debo hacer presente á la asamblea que el subcomité de Santiago del Estero presidido por el doctor Baltasar Olaechea y Alcorta es el que mejor ha respondido con sus eficaces trabajos realizados en pro del homenaje, habiéndose hecho acreedor por parte de la Junta direc-

tiva de un voto de agradecimiento que le fué comunicado por nota oportunamente.

*Socios.* — El movimiento de socios ha sido el siguiente: el número de socios activos, que el 31 de marzo de 1914 era de 554, ha disminuído de 57, no obstante haber ingresado, durante el período, 12 socios nuevos y reingresado 3, lo que hace un total de 15.

Esta considerable diminución es debida á que la Junta directiva resolvió declarar cesantes á 21 socios activos, de acuerdo con el artículo 4° del reglamento; haber fallecido 6 y renunciado 29. El número de socios honorarios ha aumentado de 2 con motivo del nombramiento de los doctores Walther Nernst y Eduardo L. Holmberg. El de correspondientes es de 58.

La Sociedad ha tenido que lamentar el fallecimiento de los consocios doctor Adolfo Marcenaro, señor Juan B. Otamendi, ingeniero Fernando Cerdeña, ingeniero Josué R. Mom, doctor Justo V. Escobar y capitán de ingenieros Eduardo Maligne.

He aquí la nómina de los socios activos ingresados:

Doctor Julio Iribarne, señor Enrique Zuleta, señor Orestes Calcagno, doctor Nicolás Lozano, señor Santos Rodríguez Aravena, señor Domingo Mordeglia, señor Roberto E. Vernengo, señor Fortuno Parera Déniz, señor Agustín Zamboni, profesor Juan Brèthes, señor Santiago F. Peirano y señor Carlos Lix Klett.

Los reincorporados fueron:

Ingeniero Raúl Barrera, doctor Modesto Quiroga y señor Federico N. del Ponte.

*Tesorería.* — El cargo de tesorero ha sido desempeñado por el ingeniero Benno J. Schnack, quien lo ha atendido con toda la dedicación y fiscalización que este delicado cargo requiere.

Los cuadros de tesorería que se agregan á esta memoria demuestran el estado financiero de la Sociedad y el movimiento de las diferentes cuentas habido durante el período terminado. En dichos cuadros no figura la cuenta correspondiente á los fondos del Congreso científico internacional americano, por cuanto ella se lleva por separado.

La cuenta correspondiente á dicho congreso arroja un saldo á favor de 9846,96, incluído en esta suma el saldo del fondo de adhesiones.

Los libros de contabilidad han sido llevados en forma y se encuentran al día.

Continúan depositados en custodia en el Banco de la Nación Ar-

gentina los siguientes documentos, cuyos certificados de depósito se encuentran en poder del gerente de la sociedad.

Un título de propiedad de la casa Cevallos 269.

Dos comprobantes de pagos de paredes medianeras.

Dos comprobantes de aprobación de cuentas rendidas á la Contaduría general de la nación por trece mil ochocientos ochenta y tres pesos con tres centavos moneda nacional ($ 13.883,03 m/n) y seis mil ciento diez y seis pesos con noventa y siete centavos moneda nacional ($ 6.116,97 m/n) correspondientes á los fondos recibidos del gobierno de la Nación para gastos de representación y publicación de los trabajos presentados al IV° Congreso científico, 1° panamericano, de Chile.

Dos comprobantes de cuentas presentadas á examen de la Contaduría general de la Nación por cuarenta y un mil novecientos sesenta y dos pesos con veintitrés centavos moneda nacional ($ 41.962, 23 m/n) y ocho mil treinta y siete pesos con setenta y siete centavos moneda nacional ($ 8037,77 m/n), correspondientes á los fondos recibidos del gobierno de la Nación para exploración y estudio de la laguna Iberá.

Un título de la deuda pública externa de la provincia de Buenos Aires número 163.527 por valor de 100 pesos oro sellado nominales.

*Secretarías.* — Han sido desempeñadas por los señores doctor Luciano P. J. Palet la de actas é ingeniero Anecto J. Bosisio la de correspondencia, quienes han atendido, con todo el empeño y dedicación que dichos puestos requieren, el despacho de todos los asuntos entrados y resueltos por la Junta directiva y asambleas; la correspondencia social y redacción de las actas; las relaciones de la Sociedad con las del país y extranjeras.

En buen estado se encuentran los libros de actas de la Junta directiva y asambleas, copiador de notas y demás auxiliares.

La ardua labor de los señores secretarios está representada en parte por las 229 notas y 136 comunicaciones varias, estas últimas en su mayoría relativas á la biblioteca, que han sido enviadas durante el período y cuyas copias se encuentran en los libros respectivos; debiéndose agregar 272 notas y circulares pasadas á los subcomités relativas al homenaje pro-Ameghino.

*Biblioteca y archivo.* — El cargo de bibliotecario lo ha desempeñado con toda contracción el profesor José T. Ojeda.

La catalogación y clasificación de nuestra biblioteca, que en los últimos años se ha enriquecido notablemente por la adquisición de

obras importantes, ha sido considerada como una necesidad imprescindible y la obra ha sido emprendida por el señor bibliotecario con un empeño y laboriosidad digna de encomio.

Con anterioridad se inició, y de esto hace ya varios años, una catalogación y clasificación de acuerdo con el sistema llamado *clasificación decimal,* que es de indiscutibles ventajas para la ordenación de las obras que día á día van apareciendo, siguiendo la progresión creciente de los conocimientos y del progreso humanos, pero ese trabajo que requiere constante labor, no pudo llevarse á término y nuestra biblioteca quedó en las mismas condiciones en que se hallaba antes de emprenderse esa clasificación metódica.

Sin desconocer la importancia que tiene la clasificación mencionada y para abreviar el trabajo, se ha hecho, de acuerdo con lo aconsejado por la comisión especial formada por el señor bibliotecario y los señores socios doctor Tomás J. Rumi, doctor M. Leguizamón Pondal y el ingeniero Benno J. Schnack, una clasificacíón que, aunque se aparta mucho de la *decimal,* responde y satisface á las necesidades de nuestra Sociedad.

La tarea ha sido larga, pero debo hacer constar que ella se ha realizado sin mayores dispendios, utilizándose solamente el trabajo personal de los empleados de la Sociedad, en las horas fijadas para su concurrencia al local social. La demora en la terminación del catálogo está plenamente compensada con la importante economía que representa esa forma de realizar el trabajo.

La *1ª sección,* que comprende las obras de carácter general, está completamente terminada y los originales se han dado ya á la imprenta ; y en cuanto á la 2ª *sección,* que comprende las revistas, estará terminada dentro de breves días, todo lo cual asegura la publicación del catálogo completo en plazo relativamente corto. Á este trabajo debe agregarse la confección de las fichas bibliográficas por duplicado : una por materia y otra por autor.

Además de las revistas y otras publicaciones que se adquieren por subscripción, la Sociedad ha recibido varios ejemplares remitidos por las casas editoras de París, de Ch. Béranger, Hermann et fils, Dunod et Pinat, Octave Doin et fils, Gauthiers-Villars, Er. Rival y Félix Alcan y la de Miguel Casals Gambús de Barcelona, cuyas donaciones han merecido la publicación de juicios bibliográficos en los *Anales.*

Notándose el número reducido de las obras nacionales aparecidas en los últimos años, se pasó una circular á nuestras principales casas editoras, pidiéndoles la remisión de las que editaran, ofreciéndoseles

en cada caso la publicación en los *Anales* de la noticia y juicio bibliográfico correspondientes.

Á esta invitación respondieron gentilmente los señores Cabaut y Compañía y Ángel Estrada y Compañía, remitiendo los primeros 17 volúmenes y los segundos 41 volúmenes. Ambas casas manifestaron que continuarían haciendo nuevas remesas con las publicaciones que fueran apareciendo.

Además han enviado interesantes libros los señores: Carlos Lix Klett, cónsul argentino en Río de Janeiro; Instituto Central Metereológico y Geofísico de Chile; Raúl Barrera, Valentín Luis Massa, Argentino Valentini, Universidad Nacional de La Plata, Santiago Barabino Amadeo, Samuel de Madrid, Juan Brèthes, Atilio A. Bado, Adrián Ruíz Moreno, Carlos E. Porter, Franz Kuhn, Carlos Bruch, Jorge Magnin, Ángel H. Roffo, Ernesto Longobardi, Juan B. Lara, Trifón Ugarte, Carlos A. Marelli, Luigi Luiggi, Alcides Calandrelli, Rafael Castañeda Vega, Victor L. Meario y otros cuya nómina sería largo enumerar, los cuales forman un total de 190 volúmenes y una cantidad de interesantes folletos.

Contribuyen también á engrosar y enriquecer nuestra biblioteca las 281 revistas que se reciben en canje de los *Anales*, procedentes de 33 países, y las que se detallan á continuación, que se reciben por subscripción:

*Ponts et chaussées*, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, *Annales de chimie et de physique*, *Nouvelles annales de la construction Opperman*, *Revue scientifique*, *Giornale trattato générale dell'arte dell'ingegnere*, *The Builder*, *Revue générale de sciences*, *L'industria chimica*, *Scientia* de Milán, *Memoria di architectura pratica* de Torino.

Igualmente se reciben por subscripción la *Enciclopedia universal ilustrada* y la *Nueva enciclopedia de química*, por J. Guareschi.

A pedido de socios, durante el período se han comprado la obra *Universo ed Umanitá, Storia dei progressi umani nella conoscenza e nel dominio delle forze naturali*, 5 tomos, por autores varios, y 55 volúmenes de la biblioteca de Filosofía científica dirigida por Gustavo Le Bon.

Los nuevos canges establecidos son los que á continuación se detallan:

*Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería* de La Plata, *Boletín de la Sociedad de Oftalmología* de Buenos Aires, *Revista de ciencias económicas* de Buenos Aires, *Revista del Centro Estudiantes de Química y Farmacia* de La Plata, *La Navigazione Aerea* de Roma, *Buletinul Societatti Regale Romane de Geografie* de Bucuresti, *Société Inter-*

*nationale de Dialectologie Romane* de Bruxelles, *Boletín de Fomento*, órgano del ministerio de Fomento de San José de Costa Rica, *Revista del Ministerio de Industrias* de Montevideo, *Revista de la Universidad de Honduras*, Tegucigalpa; *Revista de Arquitectura* de Santiago de Chile, *Annales of The Missouri Botanical Garden* de St. Louis M. O., *Washington University Studies*, de St. Louis M. O.; *Revista de Club de Engenharia* de Río de Janeiro, *A Lavoura, Boletin da Sociedade Nacional da Agricultura* de Río de Janeiro.

La conservación de las obras se hace de la mejor manera, tratándose de encuadernar el mayor número de las que actualmente existen á la rústica, dentro de los recursos que pueden dedicarse á este servicio.

Durante el ejercicio que termina se han encuadernado 622 volúmenes, existiendo en poder del encuadernador 42 volúmenes al objeto indicado.

Para el mejor contralor de los libros que se acuerdan en préstamos á los señores socios, se ha cambiado el procedimiento de los recibos sueltos por la anotación correspondiente en un libro único, en que consta el retiro de las obras con la constancia del recibo que firma el que las utiliza. De las anotaciones de ese libro y de los recibos sueltos anteriores, se desprende que, además de las obras consultadas en el local social, han sido retirados 151 volúmenes y 165 números de diversas revistas, desde el día 1° de abril del año anterior hasta la fecha.

*Anales*. — Respecto á la publicación de nuestros *Anales*, cuya ardua labor está á cargo de nuestro consocio doctor Horacio Damianovich desde el 2 de mayo de 1913, debo repetir lo que mi antecesor, ingeniero Santiago E. Barabino, manifestara el año anterior en su memoria presentada á la asamblea, y es que el doctor Damianovich ha confirmado una vez más su reconocida competencia y laboriosidad en la dirección de nuestra revista.

Injusto sería cerrar este párrafo de la memoria, sin antes pedir á la asamblea que haga constar un voto unánime de agradecimiento para nuestro consocio el ex director de nuestros *Anales*, ingeniero Santiago E. Barabino, por su brillante como inteligente actuación durante los diez años consecutivos que dirigió la revista, con lo cual, aunque algo retardada la Sociedad, logrará saldar la deuda de gratitud á que se hiciera acreedor el ingeniero Barabino por su constante laboriosidad y competencia demostrada en el largo lapso de tiempo que estuvo á su cargo la publicación, y á la cual le prestó siempre su importante como valioso concurso personal, técnico y científico.

*Gerencia.* — Ha continuado á cargo del señor Juan Botto, quien desde hace veintinueve años viene desempeñando dicho puesto con toda la contracción que éste requiere, habiendo, como en los años anteriores, auxiliado eficazmente a los señores secretarios, tesorero y bibliotecario en sus diferentes trabajos.

Á su cargo está la contabilidad social, y del empeño y dedicación con que ha atendido esta importante y delicada parte de la administración, dan una idea los cuadros que se adjuntan á esta memoria y en los que puede verse el movimiento detallado de las diferentes cuentas habido durante el XLII° período administrativo.

De acuerdo con lo que establece el artículo 13 de los estatutos, los miembros salientes de la Junta directiva son los siguientes : doctor Francisco P. Lavalle, ingenieros Santiago E. Barabino, Jorge W. Dobranich, doctores Martiniano Leguizamón Pondal, Tomás J. Rumi, Enrique del Valle Iberlucea, ingenieros Oronte A. Valerga, Eduardo Volpatti y Alberto D. Otamendi.

Quedan como vocales los señores ingeniero Eduardo Huergo, doctores Claro C. Dassen y Luciano P. J. Palet, ingenieros Anecto J. Bosisio, Benno J. Schnack, arquitecto Raúl G. Pasman y profesor José T. Ojeda.

En consecuencia, hay que proceder á la elección de presidente, vices 1° y 2°, secretarios de actas y correspondencia, tesorero, protesorero, bibliotecario y un vocal.

Señores consocios :

Cumplido el precepto reglamentario, ceso desde este momento en el honrosísimo cargo de presidente, donde han tenido á bien llevarme mis dignos consocios ; pero no debo abandonar este sillón sin antes dirigir una palabra de agradecimiento á los que me han acompañado en las nobles y desinteresadas tareas. Si algún éxito se ha obtenido, se debe á ellos y no á mí.

La Sociedad Científica Argentina conserva siempre su altísimo puesto entre sus similares y no lo perderá ; su obra es obra altruísta, obra de divulgación científica ; su propaganda es noble y desinteresada : los *Anales* las conferencias y su biblioteca, que cada día adquieren más importancia, son los factores eficaces de su alta misión.

¡ Adelante, pues, y siempre adelante!

FRANCISCO P. LAVALLE.

# INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA Y DE LA HUMEDAD SOBRE EL MAÍZ

Por FRANCISCO P. LAVALLE

---

La exportación argentina del maíz alcanzará sin duda anualmente á más de cinco millones de toneladas, cantidad que irá aumentando progresivamente á medida que la producción y el consumo sean cada vez mayores. Son notorias las quejas de los compradores de este cereal y la desvalorización que sufre antes y durante el embarque á causa de su frecuente humedad. Mi deseo hubiera sido poder expresar esta pérdida en cifras concretas, pero no me fué posible hallar datos estadísticos, ni en las fuentes oficiales, ni en los centros donde más podía interesar su estudio. Á pesar de eso, el tema preocupa y debe seguir preocupando; los intereses comprometidos son valiosos y al ministerio de Agricultura corresponde la intervención en la forma eficaz que mejor convenga.

Ya la memoria del año 1912 hace mención sobre el asunto y en la página 13 encontramos: « Por lo que respecta á nuestra producción de maíz destinada á la exportación en su mayor parte, son notorias las causas porque puede verse restringida y que provienen principalmente de lo limitado de su consumo interno y de la frecuencia con que los cargamentos llegan deteriorados á los mercados europeos por las condiciones de su almacenamiento y transporte. Para estudiar la solución de este último problema se han contratado los servicios de un experto norteamericano que ha trabajado con igual objeto en el Laboratorio federal de Baltimore, y que, desde la presente cosecha, se ocupa de resolver las condiciones en que el maíz debe almacenarse y transportarse á los mercados europeos. »

Á pesar de esta importante resolución, nada se ha hecho que sepamos, creemos más bien que las cosas se encuentran en el mismo estado de antes ó quizá algo olvidadas (véase *La Nación* de marzo 22 de este año). Como la buena conservación del maíz es de un interés excepcional para la economía pública, he creído conveniente estudiar la acción de la humedad algo excesiva en él y el límite tolerable que puede soportar sin alterarse.

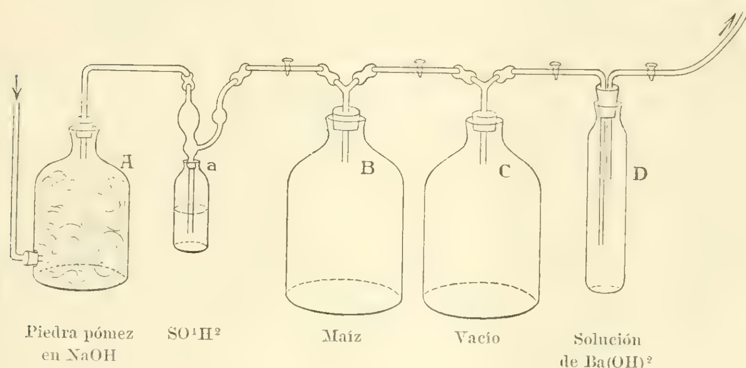
Es creencia fundada que es esta humedad la que produce el deterioro de los cereales porque facilita el sobrecalentamiento de ellos y la formación de microorganismos que los descomponen, y como causas únicas de esta humedad se considera el almacenaje del maíz no bien seco todavía, ya sea que se haya recogido temprano, ó ya debido á causas climatéricas ó accidentales. Sin embargo, existe otra causa productora de la humedad y que al mismo tiempo es la que contribuye á disminuir considerablemente su valor nutritivo, y es lo que podríamos llamar la respiración del maíz, lo cual no ha sido todavía bien estudiado ni tomado en cuenta. Müntz *(Sur la conservation des grains par l'ensilage, Comptes rendus,* 1881, pág. 97 y 137), ha sido uno de los primeros en observar la respiración de las semillas y la diminución gradual de la substancia seca en ellas. Más tarde van Tieghen y Bonnier *(Recherches sur la vie latente des grains, Comptes rendus de l'Académie des sciences,* Paris, 1882, pág. 25) lo observaron también. El doctor R. Kolknitz estudió también la respiración en la cebada y antes de observar los efectos de la humedad y de la temperatura sobre el maíz, indicó los métodos empleados para la determinación de la humedad y la valorización de la respiración.

*La determinación de la humedad* en los cereales ofrece mayores dificultades que en otras substancias, porque aquéllos, á pesar de ser higroscópicos, su membrana exterior no deja pasar fácilmente el agua. Es necesario quebrar el grano y romper la membrana, lo que se puede hacer en un molino de café ú otro semejante. Para el objeto se toman más ó menos cinco gramos de maíz molido, que se hacen secar en la estufa á 100 ó 105 grados, hasta obtener un peso constante, lo que se consigue después de cinco ó seis horas. El maíz que contiene más de diez y ocho por ciento de humedad no se deja moler bien; en este caso es necesario exponerlo á una desecación previa y molerlo después.

Para la determinación del *anhídrido carbónico* se utiliza el método volumétrico de Pettenkoffer haciendo pasar el aire por una solución titulada de hidrato de barita. El maíz retiene en su interior una can-

tidad del anhidrido carbónico que se difunde lentamente; para eliminar esta causa de error y para no prolongar demasiado el tiempo de observación, lo que podría dar lugar á transformaciones secundarias por la acción de los bacterios, se emplea el siguiente aparato:

Un frasco grande de ocho litros, A, lleno de piedra pómez embebida en solución de soda cáustica (1:3), comunica de un lado libremente con el aire exterior de tal manera que el aire que entra está obligado á pasar por las capas de piedra pómez, y por el otro lado con un frasco lavador que contiene ácido sulfúrico, *a*, con el objeto de detener la humedad. Este frasco secador comunica con el frasco que contiene el maíz, B, y cuya capacidad es variable según las necesidades




del caso. Este frasco, á su vez, comunica con otro de capacidad igual al anterior y vacío C, el cual, por medio de un tubo de Will y Warentrap ú otro, que contiene la solución titulada de agua de barita, D, está en comunicación con una bomba de Bunsen; dos llaves de vidrio permiten cerrar en caso necesario el frasco que contiene el maíz. Los tapones y los tubos de goma se cubren con una capa de silicato de potasio para evitar la difusión de gases.

La manera de operar es la siguiente: Dispuesto el aparato como he indicado y llenado el frasco con maíz, se interrumpe la comunicación con el aire: de tiempo en tiempo se interrumpe también la comunicacion con la bomba y se produce el vacío en el frasco grande hasta $\frac{1}{4}$ de atmósfera. Una vez obtenido este enrarecimiento de aire, se establece la comunicación con el receptáculo del maíz produciéndose una rarefacción también en este frasco, lo que permite una difusión rápida del anhídrido carbónico del interior al exterior. Abriendo aho-

ra la llave que comunica con los frascos lavadores del aire, se establece el equilibrio de presión con el exterior y entra aire privado de anhídrido carbónico y de humedad en el aparato. La operación se repite convenientemente colocando, si es necesario, el recipiente del maíz en la estufa á una temperatura constante. La duración de los ensayos varía de uno á seis días, según la temperatura; se hicieron tres series de ellos con el fin de determinar:

1ª La influencia de la temperatura;

2ª La influencia de la humedad:

3ª La influencia de estos dos factores juntos sobre la respiración del maíz.

### INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA

Una muestra de maíz con 12,82 por ciento de humedad:

| | | | Gramos de $CO^2$ en 24 horas |
|---|---|---|---|
| 1. | Un kilogramo á la temperatura de | 15°..... | 0.0006 |
| 2. | — | 20°..... | 0.0052 |
| 3. | — | 30°..... | 0.0093 |
| 4. | — | 40°..... | 0.0220 |

Los ensayos números 1 y 2 duraron seis días.

El ensayo número 3 duró tres días.

El ensayo número 4 duró un día.

Resulta que al aumento de temperatura de 5°, ó sea, de 15 á 20° corresponde á un aumento en la producción de $CO^2$ en la relación de 1 : 86.

Al aumento de la temperatura de 10°, ó sea, de 20 á 30° corresponde un aumento en la produción de $CO^2$ en la relación de 1 : 2.

Al aumento de la temperatura de 10°, ó sea, de 30 á 40° corresponde un aumento en la producción de $CO^2$ en la relación de 1 : 24.

### INFLUENCIA DE LA HUMEDAD

El maíz empleado en estos ensayos tiene un porcentaje elevado de humedad y ha sido humedecido artificialmente. Los ensayos se hicieron á la temperatura de 15°, con muy poca variación, aislando para esto el frasco conteniendo el maíz, con carbón de paja de lino, que es el mejor medio aislador conocido. La humedad expresada en números redondos nos dió:

| | Por ciento de humedad | Gramos de $CO^2$ en 24 horas |
|---|---|---|
| 1. Un kilogramo de maíz..... | 13 | 0.0006 |
| 2. — ..... | 18 | 0.0917 |
| 3. — ..... | 23 | 0.3123 |
| 4. — ..... | 27 | 0.8902 |
| 5. — ..... | 36 | 1.8400 |

Resulta que un aumento de:

5 por ciento de humedad, ó sea, de 13 á 18 por ciento aumenta la producción de $CO^2$ en la relación de 1:153.

5 por ciento de humedad, ó sea, de 18 á 23 por ciento aumenta la producción de $CO^2$ en la relación de 1:3,4.

10 por ciento de humedad, ó sea, de 13 á 23 por ciento aumenta la producción de $CO^2$ en la relación de 1:520,5.

4 por ciento de humedad, ó sea, de 23 á 27 por ciento aumenta la producción de $CO^2$ en la relación de 1:2,8.

9 por ciento de humedad, ó sea, de 27 á 36 por ciento aumenta la producción de $CO^2$ en la relación de 1:2,1.

## INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA Y DE LA HUMEDAD EN CONJUNTO

| | Por ciento de humedad | Grados | Gramos de $CO^2$ en 24 horas |
|---|---|---|---|
| A. Un kilogramo de maíz...... | 13 | 15 | 0.0006 |
| — ...... | 13 | 20 | 0.0052 |
| — ...... | 13 | 30 | 0.0093 |
| B. Un kilogramo de maíz...... | 23 | 15 | 0.3123 |
| — ...... | 23 | 30 | 0.8540 |
| C. Un kilogramo de maíz...... | 27 | 15 | 0.8902 |
| — ...... | 27 | 30 | 1.9740 |

Resulta que aumentando:

De 10 por ciento la humedad y de 15° la temperatura, aumenta la producción de $CO^2$ en la relación de 1:1423;

De 14 por ciento la humedad y de 15° la temperatura, aumenta la producción de $CO^2$ en la relación de 1:3290.

Si consideramos, por ejemplo, un maíz con 23 por ciento de humedad solamente, sometido á una temperatura de 30°, un kilogramo

perdería diariamente $0^{gr}8540$ de substancia seca, y una tonelada, en 30 días, 25kg62.

Estas investigaciones demuestran:

1° Que hasta 15° C. la respiración del maíz es lenta y se halla en un estado de reposo relativo;

2° Que de 15° arriba, la respiración progresa proporcionalmente;

3° Que un porcentaje de 18 por ciento de humedad favorece la respiración, y una mayor hace progresar rápidamente la producción del anhídrido carbónico:

4° Que el maíz no debe tener más de 13 por ciento de humedad para conservarse en buenas condiciones.

Un exceso de agua es perjudicial; es el mayor enemigo del maíz y del trigo porque favorece la respiración, causando así una pérdida de substancias nutritivas; facilita además el desarrollo de bacterios y hongos, que lo descomponen y lo pueden destruír por completo.

Por este motivo es de sumo interés para nuestro país hallar los medios de obtener productos bien secos y poder conservarlos en este estado; también de poder reducir la humedad á sus límites convenientes, ya por medio de secadores ú otros procedimientos apropiados. Estos últimos pasan los límites del laboratorio y deben hacerse en los grandes centros acopiadores, con ayuda de los métodos modernos de investigación que se emplean en el mismo laboratorio, el que puede servir de eficaz auxilio.

# SOBRE LOS RAYOS PRODUCIDOS POR LOS RAYOS RÖNTGEN

COMUNICACIONES DEL DEPARTAMENTO
DE FÍSICA DEL INSTITUTO NACIONAL DEL PROFESORADO SECUNDARIO

POR J. LAUB

---

## PRIMERA PARTE

### ESTUDIOS SOBRE LOS RAYOS SECUNDARIOS

### § 1. *El problema*

Es sabido que cuando los rayos X inciden sobre un cuerpo, surgen tres tipos de rayos: *a)* una radiación difusa y orientada; *b)* una radiación «propia», *no orientada* y característica para los átomos del medio excitado; *c)* rayos catódicos de una gran velocidad.

Del actual estado de investigacion podemos deducir que existe una íntima relación entre los rayos «propios» y los rayos catódicos, provocados por la luz de Röntgen; parece *que la producción de los electrones es el proceso primario.* Podemos hacernos la siguiente imagen de la transformación de la energía, que tiene lugar durante el nacimiento de los rayos mencionados: los rayos catódicos producen durante su calzamiento luz Röntgen orientada, ó llegando á una cierta velocidad crítica, producen rayos *homogéneos, característicos para el material del anticatodo.* Cuando los rayos X caen sobre un cuerpo, nacen nuevamente electrones, cuya formación está acompañada de *una radiación «propia»* del material.

Si nuestra imagen corresponde á la realidad, debemos esperar, según la teoría de los *quanta,* lo siguiente: 1° *La velocidad de los electrones producidos debe ser constante y en un intervalo relativamente vasto, independiente del potencial del tubo X; 2° La velocidad de los rayos pri-*

*marios, catódicos, podría tener solamente influencia, en cuanto ella interviene en la producción de los rayos « propios » ; 3º La velocidad de los electrones provocados debería ser normalizada por la frecuencia de los rayos homogéneos del material ; 4º Por los rayos difusos se deberían formar relativamente pocos electrones.*

No podemos admitir como argumento contra nuestra interpretación de arriba el hecho que, según las observaciones de los señores Bestelmeyer (1), Jnes y Laub, los rayos X producen electrones, cuya velocidad se extiende en un gran intervalo, pues por la heterogeneidad de las velocidades podemos explicar así que los electrones provocados pierden una parte de su energía cinética pasando por la materia ; además chocando con los átomos producen electrones secundarios.

Para estudiar las relaciones entre los rayos propios y los rayos catódicos y para ver si en realidad vale la fórmula

$$\frac{1}{2} mv^2 = h\nu \text{ (2)}$$

deducida de la teoría de los « quanta », es indispensable eliminar en lo posible los efectos secundarios, lo que podemos obtener aplicando *radiadores muy finos y rayos X muy homogéneos.*

Queriendo penetrar profundamente en el mecanismo de la producción de los electrones, hemos investigado si un cambio de las condiciones de experiencia influye siempre *en el mismo tiempo y en el mismo sentido* en los rayos catódicos y los rayos « propios ».

Inmediatamente después de los primeros ensayos he visto que sería muy conveniente aumentar nuestros conocimientos sobre los rayos propios. En vista que he usado láminas metálicas muy finas para la producción de los rayos catódicos secundarios, he investigado hasta *qué límite podemos suprimir el espesor de los radiadores,* sin perder la posibilidad de medir los rayos fluorescentes (3) y en general los rayos secundarios.

En una investigación anterior (4) he encontrado que el carbón bajo

(1) A. Bestelmeyer, *Annalen der Physik,* 22, 429, 1907 ; Jnes, *Proc. Royal Soc.* 1907 ; J. Laub, *Annalen der Physik,* 26, 712, 1908.

(2) $\frac{1}{2} m = v^2$ energía cinética de los electrones producidos, $h$ = constante de Planck, $\nu$ = frecuencia de la luz Röntgen.

(3) Así llama Barkla también los rayos « propios ».

(4) J. Laub, *loc. cit.*

la acción de la luz Röntgen emite una radiación electrónica bastante fuerte, aunque no tanto como la del platino. En mis ensayos recientes he visto que también en el papel se producen rayos catódicos. De otra parte hasta ahora no era conocida ninguna radiación propia de los elementos, cuyo peso atómico fuera menor que 32. Era entonces de gran importancia investigar si *al fin los elementos livianos no emiten rayos homogéneos.* Como material empleé carbón y azufre. Esta elección fué también influída por el trabajo fundamental de los señores Friedrich, Knipping y Laue (1).

Para ver si la distribución de las velocidades en los electrones, provocados por los rayos X, no es causada por el hecho que los elementos emiten rayos secundarios homogéneos de muchas frecuencias, he analizado nuevamente los rayos secundarios emitidos por *cobre, zinc, hierro y platino, tratando de mejorar en lo posible la instalación.* Y, en efecto, *he podido encontrar una serie de nuevos rayos propios.*

Tomando en cuenta una observación mía anterior, he examinado si *la intensidad y dureza de los rayos secundarios dependen del ángulo de incidencia de los rayos X primarios.* Esta experiencia ha tenido también por otra causa un *especial interés.* Aunque en un trabajo publicado en el año 1908 en los *Annalen der Physik*, he explicado que el aumento de la intensidad de los electrones, cuando los rayos X excitantes pasan del ángulo oblicuo al ángulo rasante, tiene su fundamento en la diferente penetración de los rayos X, era sin embargo posible que aquel fenómeno dependiera de la polarización de los rayos X. Los rayos X, según las observaciones de Barkla (2) y según las medidas muy exactas de Bassler (3), son parcialmente polarizados. Cuando entonces he encontrado que la intensidad de los rayos secundarios depende del ángulo de incidencia, he investigado *si y cómo el estado de polarización de los rayos primarios X influye en aquél fenómeno.*

## § 2. *Descripción de la instalación*

Un haz de los rayos Röntgen cuyo eje era *perpendicular* al de los catódicos, cayó, pasando por un diafragma de plomo, sobre una panta-

(1) M. Friedrich, P. Knipping y M. Laue; *Comunicaciones de la Real Academia de Ciencias de Bavaria, Clase Matem. Fis.*, página 303, 1912.

(2) C. G. Barkla, *Phil. Transactions*, 204, 1905.

(3) E. Bassler, *Annal. der Physik*, 28, 808, 1909.

lla giratoria, en la cual se han podido producir rayos secundarios (1).

Los rayos secundarios han ionizado el aire en un cilindro, unido al electrómetro de Dolezalek, que sirvió para la medida de la corriente de saturación.

El cilindro de ionización tenía la forma, representada en las figuras 1 y 2, según si el radiador se encontraba en el vacío ó en el aire.

La caja, en la cual se encontraba la pantalla, era hecha para el análisis de los rayos producidos en el cobre, zinc y hierro del mismo material, que la pantalla.

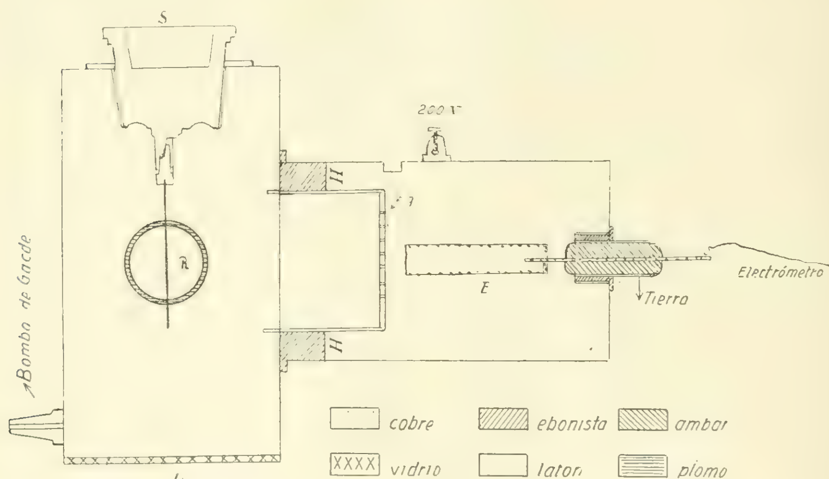



Fig. 1. — $\frac{2}{9}$ del tamaño natural

Pasando por abertura de diámetro de 5 milímetros los rayos X incidieron sobre el radiador R colocado en el tapón de latón S, que podía girar. La abertura era de vidrio ó de latón, en forma de tamiz (ver fig. 3) sobre el cual se había pegado con picina una hoja de aluminio muy fino.

Todas las dimensiones se ve en el dibujo. La pared perpendicular al rayo primario, estaba tapizada con papel grueso, para suprimir en lo posible los rayos catódicos, producidos eventualmente. La pared P era de vidrio, para ver dentro del aparato.

Trabajándo con hojas finísimas se las pegó sobre un soporte muy

(1) Los rayos Röntgen secundarios llamaremos en lo sucesivo « rayos secundarios ».

delgado de papel duro; en otros casos la pantalla consistía únicamente del material por investigar. Como se ve en la figura 1, el soporte de la pantalla ha podido ser colocado en *una sola posición* en el tapón S. Esto tenía la gran ventaja que, cambiando el material del radiador, el marco se ha podido poner exactamente en el mismo sitio, y la centralización, efectuada una vez, quedaba siempre constante. Sobre el tapón de latón S había colocada una escoba circular. La caja del radiador era unida durante la observación con la bomba de Gaede.

Los rayos secundarios, producidos en el radiador, llegaron al ionizador, pasando por la ventana A. La ventana A era de latón, provisto

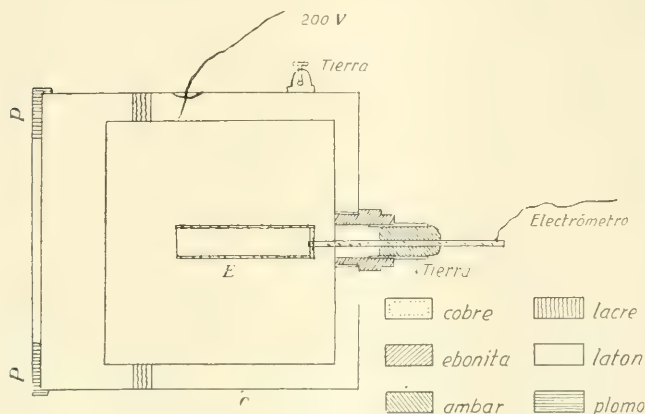



Fig. 2. — $\frac{2}{9}$ del tamaño natural

de muchos agujeros, sobre el cual se había pegado una hoja fina de aluminio. Los rayos catódicos producidos eventualmente no lo han podido penetrar.

En la pieza de ebonita H se ha podido enchufar exactamente el cilindro ionizador y unídola así con la caja del radiador. Inmediatamente detrás de H había una ranura, en el cual se ha colocado un soportador con láminas de aluminio de diferente espesor, para efectuar medidas de absorción. Por intermedio de un tapón de ebonita el electrodo E, cuya longitud era de 6 centímetros, se aislaba del ionizador, al cual se comunicó una tensión de 200 voltios. Por la ebonita pasaba un tubo de latón puesto á tierra, en el cual se había colocado un tapón de *ámbar* perforado en el centro. El ámbar sirvió como *aislador* y sostén del electrodo, que era unido con el electrómetro de Dolezalek.

El aparato de la figura 1 se usaba únicamente para el análisis de

los rayos, producidos en los metales pesados, por tubos Röntgen *duros* y para los ángulos de incidencia entre 50 y 90 grados.

Cuando el radiador no estaba en el vacío, se aplicaba otro ionizador, cuyo esquema se ve en la figura 2.

En la cara anterior del cilindro C se encontraba una placa de plomo P, para que los rayos X no pasaran por el espacio comprendido entre los dos cilindros y que no ionizaran el aire. Cuando hemos trabajado con el aparato de la figura 2, el radiador se ponía en un soporte especial, no usando la caja del radiador.

El ionizador se encontraba encima de una mesa giratoria. El electrómetro de Dolezalek con una suspensión de *cuarzo* (1) tenía una sensibilidad de 4000 divisiones para un voltio, la batería de los acumuladores y el electrómetro se hallaban en una caja de lata, unida con tierra.

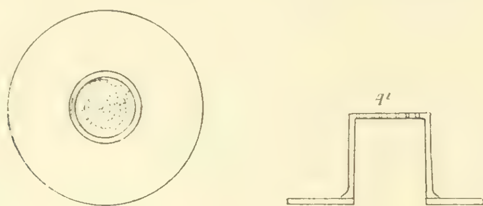


Fig. 3. — $\frac{2}{3}$ del tamaño natural

Todas las conexiones estaban protegidas contra pertubaciones electrostáticas. También la batería con la cual se cargaba el ionizador, se encontraba en una caja de lata ; el hilo que conducía al ionizador pasaba por un tubo de *plomo* puesto á tierra. Al electrómetro lo podíamos manejar del lugar de observación, la llave era protegida contra el aire ionizado y contra perturbaciones eléctricas.

Para la producción de los rayos Röntgen servía una bobina (con interruptor de turbina), la cual se excitaba con 110 voltios y 4 amperios, y estaba colocada en un cajón de madera, tapizado interiormente con chapas de hierro galvanizado. Esta precaución se hacía indispensable, en vista que el laboratorio era relativamente pequeño. Los hilos de la bobina al tubo X pasaban por un grueso tubo de goma, envuelto en cinta aisladora. La pared de la caja de plomo, por donde salieron los rayos Röntgen, tenía un espesor de un centímetro. En esta

(1) El cuarzo se ha hecho buen conductor por intermedio de los rayos catódicos según el método de Bestelmeyer.

gruesa pared era colocado un tubo cilíndrico de plomo de 20 centímetros de longitud, en los extremos del cual se hallaban dos diafragmas concéntricos, de 5 milímetros de diámetro. Hemos usado tubos de Gundelach con anticatodo de platino.

Para poder girar los tubos en las observaciones de la polarización, se ha hecho en el taller una instalación especial (mesita giratoria). El tubo se sujetaba por los apéndices del catodo y anticatodo en un soporte de madera dura, así que la dirección del catodo al anticatodo era perpendicular al eje de rotación de la mesita. Se ha movido el tubo hasta que el eje de los rayos X coincidiera con la dirección del eje de rotación. También el ionizador, colocado en una especie de mesita espectral, ha podido ser girado en el mismo ángulo, en el cual se ha movido el radiador.

Los rayos Röntgen salientes en la dirección *perpendicular* al punto de emisión del anticatodo, en realidad coincidían con el eje de rotación de la instalación. He comprobado así que el centro de los hilos del retículo de un anteojo coincidían durante de la rotación del tubo con el punto del anticatodo, una vez fijado.

También en el eje del tubo, sobre el cual se colocaban los diafragmas de plomo, se enfocaba de una manera análoga.

Los rayos primarios han tenido durante la experiencia siempre que caer en el mismo lugar, la exactitud de la centralización, la controlaba con una pantalla de fosforescencia, colocada encima del radiador. La mancha clara ha tenido que conservar siempre su posición.

## § 3. *Manera de observar*

Estando todo centralizado, se controlaba si había aun perturbaciones, que pudieran falsear los resultados. Trabajando con hojas finísimas, era indispensable que el electrómetro, separado de la tierra, se quedara completamente fijo, cuando el radiador no era iluminado. Para ver si esto sucedía, se ha puesto primeramente en función la bobina sin tubo X, permitiendo saltar chispas de una longitud de 40 centímetros. El electrómetro no indicaba ninguna desviación.

Cuando el diafragma, por el cual pasaban los rayos Röntgen, era tapado con plomo de un milímetro de espesor, ó cuando antes del ionizador se colocaba una placa de plomo, el electrómetro conservaba su posición, aunque el tubo radiaba.

Sacando el radiador, el electrómetro quedaba fijo un minuto.

Muchas veces sucedía que el electrómetro, separado de la tierra, daba en seguida una desviación de una á dos divisiones (1), en este caso se esperaba con la medida, hasta que el espejo quedase quieto.

En vista que todo estaba muy bien protegido, la pérdida normal no era nunca mayor de una división en un minuto.

El tubo X se ponía siempre por lo menos una hora en funcionamiento, para que se encaminara, antes de empezar las observaciones, únicamente en este caso hemos obtenido desviaciones constantes.

Se observaba según el espesor de los radiadores y según de la dureza del tubo 4-30 segundos, midiendo el número de divisiones, en el electrómetro era desviado en 4-30 segundos, ó se medía con el cronómetro el tiempo necesario, para que la aguja del electrómetro se desviara de un cierto ángulo.

La calibración del electrómetro se repetía á menudo con el condensador *de Harms*.

La aplicación de un electrómetro sensible ha tenido muchas ventajas. La sensibilidad se podía variar según era necesario, además en vista de la brevedad de la observación, el carácter de los tubos quedaba constante por mucho tiempo, lo que hemos podido reconocer en las constantes desviaciones del electrómetro. Especialmente aplicando tubos X muy duros para la producción de los rayos « propios » duros de platino, zinc, carbón y azufre, el cambio de carácter de los rayos primarios producía muchas dificultades. *Era indispensable evitar una larga exposición, porque en otro caso cada medida cuantitativa era ilusoria. Hemos tenido también que evitar el recalentamiento de los tubos* X (2).

En vista que los radiadores eran expuestos muy corto tiempo á la acción de los rayos X, los rayos difusos en el aire en la mayor parte de las observaciones no han producido perturbaciones de importancia. Sin embargo la radiación secundaria del aire se hacía incómoda, cuando hemos analizado los rayos duros y homogéneos producidos en los metales pesados; la homogeneidad puede fácilmente ser oculta por la radiación secundaria del aire; por esto hemos efectuado medidas con el aparato de la figura 1.

Hemos hecho siempre una *serie de observaciones*. Investigando la

(1) Acaso por la « electricidad de frotamiento » producida, cuando se sacó la llave de Hg ó por cambio de capacidad.

(2) Para eliminar pequeños cambios de la dureza.

función del ángulo (1), hemos medido en la dirección de 90-0 grados é inversamente, además se hacían medidas de control bajo cualquier ángulo.

## § 4. *Los resultados*

*a) La dependencia de la radiación secundaria del espesor de las láminas y del ángulo incidente de los rayos primarios.* — En lo siguiente debemos comprender bajo el nombre del «plano de incidencia» el plano que pasa por el eje de los rayos catódicos y por la normal al anticatodo. El punto en el cual el radiador es tocado por el rayo Röntgen, llamaremos como en la óptica común «punto de incidencia», el ángulo entre el rayo incidente y la normal de incidencia, «ángulo de incidencia».

Se ha investigado los rayos secundarios, producidos en las hojas de *oro,* empezando con las más finas (verde en la luz transparente) hasta espesor de $0^{cm}001$, láminas de *plata* (2), desde $0^{cm}00001$ á $0^{cm}07$, *aluminio* de $0^{cm}0001$ á $0^{cm}1$, *cobre* de $0^{cm}0009$ á $0^{cm}05$ é *hierro* de $0^{cm}004$ á $0^{cm}2$, *plomo* de $0^{cm}05$ á $0^{cm}2$, *platino* $0^{cm}0085$, *zinc* $0^{cm}007$ á $0^{cm}3$, *carbón* $0^{cm}4$ á $6^{cm}$, *azufre* $2^{cm}$, *papel* $0^{cm}0052$ á $0^{cm}1$.

*De las observaciones se ha visto que las más finas láminas investigadas emiten rayos secundarios, cuando la luz Röntgen cae en ángulo rasante* (90° á 80°). *Con la diminución del ángulo de incidencia se disminuye rápidamente la radiación secundaria, así que muy pronto no se la puede más medir.* Para la ilustración sea dada la siguiente tabla.

TABLA I

*Oro transparente*

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| 85° | 100 |
| 70 | 66 |
| 60 | 42 |
| 50 | 10 |
| 40 | 0 |

(1) Bajo la «función del ángulo» hay que comprender la dependencia de la intensidad de la radiación del ángulo incidente de los rayos primarios.

(2) No hemos tenido en el laboratorio otros espesores.

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| *Aluminio, espesor $0^{cm}0002$* | |
| 80 | 100 |
| 60 | 0 |
| *Aluminio, espesor $0^{cm}002$* | |
| 80° | 100 |
| 70 | 60 |
| 60 | 20 |
| 50 | 0 |
| *Papel* (1), *espesor $0^{cm}00052$* | |
| 80 | 100 |
| 70 | 0 |
| *Papel, espesor $0^{cm}00104$* | |
| 80° | 100 |
| 60 | 18 |
| 50 | 0 |

*Con el aumento del espesor de las láminas, se aumentan los valores absolutos de la cantidad de radiación secundaria, además se le puede medir bajo ángulos menores. Desde un cierto espesor, que es tanto menor, cuanto más denso es el material del radiador, hemos podido constatar radiación secundaria y bajo la incidencia normal.* Para la comparación, me será permitido dar los siguientes números, los cuales para aluminio y papel son expresados en las divisiones de la desviación del electrómetro.

TABLA II

*Papel, espesor $0^{cm}00156$*

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| 80° | 30 |
| 70 | 10 |
| 50 | 4 |
| 10 | 0 |

(1) Densidad 1.1.

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| *Papel, espesor $0^{cm}009$* | |
| 80° | 56 |
| 70 | 30 |
| 60 | 9 |
| 50 | 7 |
| 40 | 5 |
| 30 | 5 |
| 8 | 4 |

TABLA III

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| *Aluminio, espesor $0^{cm}0044$* | |
| 80° | 65 |
| 70 | 32 |
| 60 | 19 |
| 50 | 16 |
| 40 | 12 |
| 30 | 12 |
| 20 | 12 |
| *Aluminio, espesor $0^{cm}01$* | |
| 85° | 75 |
| 80 | 50 |
| 70 | 25 |
| 60 | 20 |
| 50 | 10 |
| 40 | 8 |
| 30 | 8 |
| 20 | 8 |

TABLA IV

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| *Plata, espesor $0^{cm}00007$* | |
| 80° | 100 |
| 70 | 55 |
| 60 | 36 |
| 50 | 33 |
| 40 | 20 |

TABLA V

*Oro, espesor 0cm00001*

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| 80° | 100 |
| 70 | 66 |
| 60 | 52 |
| 50 | 30 |
| 20 | 30 |

*Los valores eran obtenidos sucesivamente ; hemos controlado siempre la sensibilidad del electrómetro.* Los números reunidos en lo siguiente indican los espesores, que hemos tenido que elegir, para obtener una radiación *mensurable bajo todos los ángulos.*

| | Centímetros |
|---|---|
| Oro | 0.00002 |
| Plata | 0.00007 |
| Aluminio | 0.0044 |
| Cobre (1) | — |
| Hierro (1) | — |
| Papel | 0.0090 |

*Todos los resultados dados hasta ahora se refieren á los rayos blandos.*

*La función del ángulo se cambia mucho con la dureza de los rayos primarios, especialmente cuando ellos caen sobre los materiales livianos, como papel, aluminio y carbón.*

*También la cantidad de los rayos secundarios producidos en las láminas finas se disminuye fuertemente con la dureza de los tubos X, y así no hemos podido obtener efectos mensurables, radiando con tubos Röntgen duros bajo el ángulo de incidencia de 70 grados las láminas de aluminio y de papel arriba mencionadas, de un espesor de 0cm002 á 0cm00104.*

Para la ilustración doy las tablas siguientes :

(1) No hemos tenido hojas bastante finas.

TABLA VI

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria | |
|---|---|---|
| | Tubo blando | Tubo duro |
| *Aluminio, espesor $0^{cm}01$* | | |
| 80° | 100 | 100 |
| 70 | 66 | 50 |
| 60 | 56 | 50 |
| 50 | 33 | 40 |
| 40 | 26 | 20 |
| 30 | 10 | 10 |

TABLA VII

*Plata, espesor $0^{cm}007$*

| | | |
|---|---|---|
| 80° | 100 | 100 |
| 70 | 53 | 60 |
| 60 | 42 | 50 |
| 50 | 26 | 50 |
| 40 | 20 | 50 |
| 30 | 20 | 50 |

TABLA VIII

*Cobre, espesor $0^{cm}01$*

| | | |
|---|---|---|
| 80° | 100 | 100 |
| 70 | 83 | |
| 60 | 75 | 85 |
| 50 | 60 | 72 |
| 30 | 27 | |
| 20 | 12 | |

TABLA IX

*Hierro, espesor $0^{cm}2$*

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria Rayos propios duros |
|---|---|
| 80° | 100 |
| 70 | 84 |
| 60 | 67 |
| 40 | 55 |
| 30 | 38 |

*Hierro fino, espesor* $0^{cm}004$

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria Rayos propios duros |
|---|---|
| 80° | 100 |
| 70 | 90 |
| 60 | 87 |
| 40 | 75 |

*Investigando las relaciones existentes entre los rayos propios y la función del ángulo, se halla lo siguiente : para todos los metales se cambia la intensidad de radiación con el ángulo de incidencia, cuando ellos emiten rayos propios, la intensidad del cambio con el ángulo incidente es diferente para diferentes materiales.*

TABLA X

*Cobre, espesor* $0^{cm}01$

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria | $I_{\alpha} = I_{90}\ (1 - \cos^2\alpha)$ |
|---|---|---|
| 90° | — | 100 |
| 80 | 100 | 97 |
| 70 | 80 | 91 |
| 60 | 72 | 77 |
| 50 | 60 | 60 |
| 40 | 48 | 41 |
| 30 | 35 | 24 |
| | | 10 |

TABLA XI

*Zinc, espesor* $0^{cm}03$

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| 80° | 100 |
| 70 | 66 |
| 60 | 58 |
| 50 | 50 |
| 40 | 41 |
| 30 | 40 |
| 20 | 10 |

TABLA XII

| Ángulo de incidencia | Intensidad de la radiación secundaria |
|---|---|
| *Platino, espesor 0cm0085* | |
| 80° | 100 |
| 70 | 90 |
| 40 | 67 |
| 30 | 67 |

TABLA XIII

| | |
|---|---|
| *Plomo, espesor 0mm2* | |
| 80° | 100 |
| 70 | 92 |
| 50 | 82 |
| 40 (1) | 72 |

*b) Los rayos propios del cobre, zinc, plomo, platino, carbón y azufre.* — Radiando cobre y zinc con tubos blandos, hemos obtenido una radiación homogénea, cuyo coeficiente de absorción en aluminio era idéntico con el determinado por el profesor Barkla; los rayos pertenecían á la clase de K. En el intervalo blando á medioblando la radiación era independiente del grado de la dureza de los tubos. Cuando hemos aumentado más la tensión eléctrica de los tubos, poco á poco se perdía el carácter homogéneo de los rayos secundarios, pues el coeficiente de absorción en el aluminio se disminuía con el aumento de las capas absorbentes; sin embargo hemos visto que no se trata de rayos difusos, porque siguiendo las medidas de absorción, hemos podido constatar que la radiación no era muy variable. (Ver las tablas 14 y 27.)

Hemos entonces aplicado un tubo más duro del mismo tipo (anticatodo de platino), además hemos *puesto en el camino de los rayos primarios una placa de aluminio de 1 á 4 milímetros, para absorber los ra-*

(1) También la intensidad de los rayos propios duros producidos en carbón del espesor de 6 centímetros, se aumenta en 16 por ciento pasando del ángulo incidente de 45 grados al ángulo rasante.

*yos menos penetrantes.* Con el mismo tubo han sido después radiados hierro, platino, plomo, carbón y azufre; los resultados se ven en las tablas.

TABLA XIV

*Zinc, espesor $0^{cm}01$*

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}01$ Al por ciento | Después que pasó por láminas de Al de espesor: en centímetros |
|---|---|
| 64.5 | 0.0 |
| 56.0 | 0.1 |
| 41.7 | 0.02 |
| 38.0 | 0.03 |
| 37.2 | 0.04 |

TABLA XV

*Zinc, espesor $0^{cm}1$. Los rayos primarios blandos han sido absorbidos*

| Tubo duro La radiación propia se debilita en $0^{cm}01$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento | Coeficiente específico de absorción |
|---|---|---|
| 38.5 | 0 | |
| 38.0 | 47.3 | |
| 37.8 | 56.0 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 40.1 | 72.3 | 18.5 |
| 38.0 | 88.5 | |
| 26.0 | 95 | |

*Tubo muy duro. Los rayos primarios blandos absorbidos en 2 milímetros* Al

| Por ciento | Por ciento | |
|---|---|---|
| 14.2 | 0 | |
| 13.2 | 30 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 13.8 | 56 | |
| 14.3 | 68.6 | 5.6 |
| 13.2 | 86.5 | |

TABLA XVI

*Cobre, espesor $0^{cm}01$*

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}01$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento | Coeficiente específico de absorción |
|---|---|---|
| 46.1 | 0 | |
| 47.5 | 60.2 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 47.3 | 70.2 | |
| 48.5 | 85.4 | 23.8 |
| 46.0 | 92.1 | |

TABLA XVII

*Platino, espesor $0^{cm}0085$*

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}004$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento | Coeficiente específico de absorción |
|---|---|---|
| 20.0 | 0 | |
| 20.4 | 45.2 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 21.0 | 62.3 | 21.5 |
| 19.4 | 74.3 | |

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}01$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento |
|---|---|
| 34.4 | 84.0 |
| 27.5 | 92.0 |
| 25.2 | 96.3 |

*Tubo muy duro. Los rayos primeros blandos absorbidos en 4 milímetros* Al

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}01$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento | Coeficiente específico de absorción |
|---|---|---|
| 17.9 | 0 | |
| 18.7 | 46 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 17.3 | 63.5 | 7.2 |
| 18.0 | 83.0 | |

TABLA XVIII

*Plomo, espesor* $0^{cm}2$

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}01$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento | Coeficiente específico de absorción |
|---|---|---|
| 31.3 ............ | 0 | |
| 35.2 ............ | 45 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 33.9 ............ | 60.5 | 16 |
| 31.0 ............ | 89.5 | |

TABLA XIX

*Hierro, espesor* $0^{cm}2$

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}01$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento | Coeficiente específico de absorción |
|---|---|---|
| 68.6 ............ | 0 | |
| 68.0 ............ | 76 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 67.8 ............ | 85 | |
| 68.0 ............ | 90 | 43.8 |
| 67.4 ............ | 94 | |

TABLA XX

*Carbón de leña, espesor 6 centímetros*

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}1$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento | Coeficiente específico de absorción |
|---|---|---|
| 10.0 ............ | 0 | |
| 9.5 ............ | 10 | |
| 10.0 ............ | 18 | |
| 9.5 ............ | 26.5 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 11.0 ............ | 30 | 0.37 |
| 10.0 ............ | 55.3 | |
| 10.0 ............ | 83.5 | |

TABLA XXI

*Azufre, espesor* $2^{cm}$

| La radiación propia se debilita en $0^{cm}3$ Al por ciento | Después que han sido absorbidos en Al por ciento | Coeficiente específico de absorción |
|---|---|---|
| 14.0 ............ | 0 | |
| 14.0 ............ | 14 | |
| 14.0 ............ | 38.5 | $\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al |
| 14.3 ............ | 54 | 0.21 |
| 15.0 ............ | 61.0 | |
| 14.6 ............ | 82 | |

De las experiencias resulta que vale *siempre* la regla de Stokes. Para la ilustración sean dados los siguientes números:

| | Absorción de los rayos propios en un décimo milímetro A por ciento. | Absorción de los rayos primarios excitantes en en un décimo milímetro Al por ciento. |
|---|---|---|
| De hierro ............ | 68.6 | 39 |
| De cobre ............ | 46.1 | 27.7 |
| De plomo ............ | 34.3 | 14 |

*c) Medidas de polarización.* — Se podría pensar que el hecho que la intensidad de los rayos secundarios depende del ángulo incidente, tiene su causa en la polarización parcial de los rayos primarios. (Ciertamente la cantidad de los rayos secundarios se disminuye en un porcentaje mucho mayor, que habría de esperar de las medidas de los señores Barkla y Batsler). La observación con el cobre (ver tabla 10) parece indicar la posibilidad que la causa de la diminución de los rayos secundarios con el ángulo incidente habría que buscar en el estado de paralización de los rayos Röntgen. Pues los valores encontrados podemos relativamente bien presentar por la fórmula:

$$I_\alpha = I_{90} (1 - \cos^2\alpha),$$

donde $I_\alpha$ es la intensidad bajo el ángulo de incidencia $\alpha$, $I_{90}$ la intensidad bajo la incidencia rasante.

La última fórmula se podría explicar así, que el término $I_{90°} \cos^2\alpha$ correspondía á la energía de la componente eléctrica, paralela á la superficie del radiador.

Para dilucidar esto, hemos hecho algunas experiencias, fundadas en la siguiente idea. Según la teoría de impulsos de Stokes-Wiechert de los rayos Röntgen, el vector eléctrico en un haz de rayos X, que corre normalmente á la dirección del catodo tiene el valor máximo en la dirección paralela al eje de los rayos catodicos. Cuando entonces los rayos Röntgen caen sobre un cuerpo, será producida la *máxima* ó la *mínima* cantidad de los electrones (en un plano normal al eje de los rayos primarios) según si la dirección del punto de origen de los rayos catódicos secundarios al cilindro de ionización sea paralela ó perpendicular á los rayos catódicos. Se producirá, pues, en el primer caso el *mínimum*, en el segundo caso el *máximum* de los rayos *secundarios* X. Según, si bajo el ángulo rasante de los rayos primarios la dirección del radiador al ionizador es paralela ó normal al eje á los rayos catódicos, tendremos en el *primer caso un aumento* de intensidad con la *diminución* del ángulo de incidencia, en *segundo caso una diminución*, siempre que la dependencia del ángulo sea causada por la polarización de los rayos X.

Por intermedio de la instalación descripta en el párrafo 2 hemos podido girar el tubo Röntgen alrededor del eje del haz de los rayos, que era emitido *normalmente* á la dirección del catodo; así que el eje de los rayos catódicos ha tenido diferentes posiciones con respecto á la dirección : fuente de la radiación secundaria → cilindro de ionización. Los resultados se ven en los números siguientes.

I. *Vector eléctrico* II *al radiador*

| | Al 0cm01 | | Cu 0cm01 |
|---|---|---|---|
| 85° | 100 | 85° | 100 |
| 50° | 73 | 50° | 66 |

| | Papel 0cm009 | | Pt 0cm0085 |
|---|---|---|---|
| 85° | 100 | 85° | 100 |
| 50° | 80 | 50° | 61 |

II. *Vector eléctrico* I *al radiador*

| | Al 0cm01 | | Cu 0cm01 |
|---|---|---|---|
| 85° | 100 | 85° | 100 |
| 50° | 70 | 50° | 66 |

| | Papel 0cm009 | | Pt 0cm0085 |
|---|---|---|---|
| 86° | 100 | 85° | 100 |
| 50° | 82 | 50° | 60 |

## § 5. *Discusión é interpretación de los resultados*

De la primera parte de nuestro estudio resulta que la dependencia encontrada de la radiación secundaria del ángulo incidente, no está causada por la polarización de los rayos Röntgen excitantes.

Que se refiere á la radiación difusa, orientada, resulta de las observaciones que la luz Röntgen debe recorrer bastante grandes espacios hasta que su difusión sea mensurable. Tenemos condiciones análogas como en la óptica común en la difusión de la luz en los medios turbios. Pero en vista que la longitud de onda en los rayos X es muy pequeña, ellos pueden y deben penetrar en mayores profundidades, antes que sufran tanta difusión, que la observación se haga posible.

La función del ángulo y la relación entre la intensidad de los rayos secundarios y el espesor de las láminas podemos fácilmente explicar. Cuando los rayos X caen sobre hojas muy finas entonces *solamente bajo el ángulo rasante* habrá tanta substancia, que en ella se difunde una cantidad mensurable de los rayos. Con el aumento del espesor de los radiadores crece la cantidad de los rayos difusos, además obtendremos ya también bajo la incidencia oblicua rayos difusos tanto más pronto, cuanto más denso es el material, pues en este caso los rayos X primarios caen sobre un número mayor de átomos.

De la misma manera podemos explicar la relación entre la función del ángulo y la dureza de los tubos.

Si nuestra interpretación corresponde á la realidad, podemos también decir que el espesor, bajo el cual un cuerpo *justamente* empieza emitir rayos secundarios, bajo el ángulo incidente normal, nos indica la *mínima profundidad* de la penetración de los rayos X, que es indispensable para que se forme una radiación secundaria difusa, mensurable.

Se comprende también que la profundidad de la penetración para los rayos X es mucho mayor que para la luz común, determinada hace algún tiempo por el profesor Hallwachs en el efecto fotoeléctrico.

Ahora podemos también explicar por qué los señores Friedrich (1), Knipping y Laue en su trabajo clásico sobre la interferencia de los rayos X encuentran que la intensidad de las manchas secundarias depende del espesor de «las chapas radiadas». Pues con el aumento del

(1) W. Friedrich, P. Knipping y M. Laue, *loc. cit.*

espesor del cristal iluminado, la difusión de los rayos secundarios queda reforzada.

Si un cuerpo radiado emite rayos *propios,* podemos interpretar la función del ángulo de una manera análoga como arriba ; *pero el mecanismo del fenómeno es esencialmente diferente. En este caso tiene lugar una absorción de los rayos X y una transformación de la energía de rayos duros en rayos blandos.* Para que un cuerpo emita una radiación propia constatable, él debe forzosamente absorber una cierta cantidad de energía. Cuando entonces los rayos primarios caen sobre láminas finas, solamente bajo ángulo rasante será absorbida una suficiente cantidad de energía, para que tenga lugar una emisión ; con la disminución del ángulo de incidencia los rayos pasan por la materia sin sufrir una absorción de importancia y por esto no producen una radiación propia. Aumentando el número de las láminas, la luz Röntgen será debilitada también bajo pequeños ángulos de incidencia ; gracias á la absorción surgirá una constatable radiación propia.

Pero también para las placas gruesas siempre llegará la mayor cantidad de los rayos propios al ionizador bajo la incidencia rasante, pues con el descrecimiento del ángulo incidente los rayos producidos deben atravesar mayores espacios, antes que lleguen á la superficie del cuerpo. Tomando además en cuenta que el coeficiente de absorción de los rayos propios es mucho mayor que el de los rayos primarios, es claro que los rayos propios son más fuertemente absorbidos y no medibles, cuando los rayos excitantes inciden bajo un ángulo oblicuo.

También la dependencia del material del radiador tiene su causa en diferentes espesores de penetración. Hay siempre que tomar en cuenta los coeficientes de absorción de los rayos primarios y los *muchos mayores* de los homogéneos.

Cuando he efectuado las experiencias, no me eran conocidos los trabajos de los señores Bragg, quienes justamente en el mismo tiempo encontraron una fuerte dependencia de la radiación secundaria del ángulo incidente para *los cristales.* Si en nuestras observaciones tienen influencia fenómenos análogos como en las de los señores Bragg, tiene que decidir la experiencia. Y así se pregunta si los rayos X en nuestro caso son también eventualmente difractados, pues cuando ellos pasan por láminas metálicas ó por los bordes de los cuerpos, parece que sufren una difracción (ver los trabajos del autor publicados en el *Physikalische Zeitschrift,* 1913 y 1914, y una publicación que saldrá en breve.)

Refiriéndome á los rayos propios de platino, plomo, zinc é hierro,

azufre y carbón encontrados por mí, quiero llamar la atención sobre la gran dificultad que existe en el cambio de la dureza de los tubos. Esta dificultad evidentemente tiene su causa en el hecho que sucesivamente es emitida una *serie de rayas,* cuando los rayos primarios han llegado á su dureza crítica.

Especialmente difícil era el trabajo con el carbón y el azufre, pues si el tubo se calienta un poco, no hay más rayos homogéneos, lo que también podemos explicar por el hecho que la radiación excitante no era bastante dura para producir la radiación propia (de onda corta) de carbón y azufre.

Los rayos propios del C y S *son muy duros, muy homogéneos y muy intensos.* La intensidad de ellos no es mucho menor que la de la radiación del cobre; aquellos rayos duros pueden ser probablemente empleados en la medicina en reemplazo de los rayos $\gamma$. Ciertamente los elementos con menor peso atómico emiten rayos más duros.

Ahora también comprendemos por qué no era posible constatar la polarización de los rayos X primarios, *duros,* tampoco cuando se la ha medido por intermedio de la radiación secundaria, producida en los elementos livianos, como parafina y carbón. El resultado negativo hay que buscar también y en esto, que los elementos livianos emiten una *radiación propia,* no *orientada* bajo la acción de los rayos duros.

En mis medidas anteriores de las velocidades, de los electrones, que nacen radiando platina con rayos X, he encontrado los siguientes valores máximos:

| | Voltios | | |
|---|---|---|---|
| Tensión del tubo... | 35.000 | Velocidad máxima.. | 24.000 |
| Tensión del tubo... | 65.000 | Velocidad máxima.. | 27.000 |

Aplicando el criterio de Widdington *sobre los coeficientes específicos de absorción para la radiación* propia de 1 platino, encontrada ahora por mí, calculando por la relación

$$\frac{1}{2} mv^2 = h\nu$$

($h$ constante de Panck, $\nu$=frecuencia de la luz X, $\frac{1}{2} mv^2$=energía cinética del *electrón* producido por el rayo X) las longitudes de las ondas se obtiene para:

$$\left(\frac{\lambda}{s}\right) \text{Al} = 21{,}5 \text{ la longitud de la onda} = 6{,}75.10^{-9} \text{ cm.},$$

y para

$\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ Al=7,2 la longitud de la onda=4,33.11$^{-9}$ cm.

De otra parte, calculando la longitud de ondas por intermedio de la *velocidad máxima* de los *electrones producidos,* aplicando también la ecuación.

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = eh\nu$$

se obtiene para 24.000 voltios, la longitud de la onda 5,25.10$^{-9}$, y para 27.000 voltios, longitud de la onda 4,66.10$^{-9}$.

La continuación de la discusión con relación á la teoría de los *quanta,* será comunicada juntos con las observaciones sobre los *electrones* producidos por los rayos Röntgen.

## RESUMEN

1° Se ha encontrado una dependencia entre la intensidad de los rayos secundarios y entre el ángulo de incidencia de la luz Röntgen excitante.

2° Aquella dependencia es tan fuerte, que aplicando láminas muy finas como radiadores, podemos constatar rayos secundarios *únicamente,* cuando los rayos primarios caen bajo un ángulo rasante.

3° La función del ángulo cambia con la dureza de los tubos X y con el material del radiador.

4° Experiencias especiales han demostrado que la dependencia de la radiación secundaria del ángulo incidente no está causada por el estado de polarización de los rayos primarios excitantes.

5° La dependencia del ángulo hemos explicado por la diferente profundidad de penetración, que es indispensable para que los rayos X produzcan una radiación secundaria.

6° Hemos indicado la posibilidad que la función del ángulo está en relación con la difracción de los rayos X.

7° Hemos descubierto una serie de nuevas rayas propias en *hierro, cobre, zinc, platino, plomo, carbón y azufre,* y hemos determinado el coeficiente específico de absorción en aluminio.

8° Los rayos secundarios del carbón y azufre son los más duros rayos propios conocidos hasta ahora.

Departamento de física del Instituto nacional del profesorado secundario, marzo 1915.

# DETERMINACIÓN DEL CONTENIDO RADIOACTIVO DE LAS SALES

## EN LAS AGUAS DEL ATLÁNTICO Y DEL PACÍFICO ENTRE MONTEVIDEO Y EL CALLAO

(COMUNICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA DEL INSTITUTO NACIONAL DEL PROFESORADO SECUNDARIO)

Por URBANO MIALOCK

### INTRODUCCIÓN

Durante un viaje de vacaciones que llevó á cabo el doctor Laub en el vapor *Roda,* saliendo de Montevideo con rumbo á El Callao, aprovechó la oportunidad, que se le presentaba, para realizar algunas observaciones *aeroeléctricas é investigaciones sobre el contenido de substancias radioactivas en las aguas oceánicas.* Estos importantes estudios han tenido por objeto principal :

1° *Aumentar los conocimientos sobre la distribución geográfica de las substancias radioactivas en el globo ;*

2° *Determinar la relación existente entre el contenido de las substancias radioactivas de la tierra y el de los mares;*

3° *Investigar la dependencia de los elementos aeroeléctricos de las substancias radioactivas :*

4° *Hallar el origen de la emanación en el agua oceánica.*

Es sabido que la atmósfera sobre los mares contiene emanación del radio, pero no son establecidas definitivamente las causas de ella. Posiblemente este fenómeno proviene de las mismas aguas, con las cuales la atmósfera se encuentra en contacto; pero es más posible aún que aquella emanación sea debida á los vientos continentales. De cualquiera manera es innegable que, si esta última causa no es la única, es la más importante que interviene en el fenómeno.

Además es sabido también que las aguas oceánicas contienen ellas mismas muy pocas cantidades de *emanación* radioactiva. Era, entonces, de una singular importancia determinar si esta radioactividad tiene sus causas en las sales disueltas en el agua ó en la absorción de la emanación atmosférica por parte de aquélla.

Por los motivos citados el doctor Laub (*) ya en su viaje determinó *la conductibilidad eléctrica de la atmósfera oceánica, el gradiente eléctrico, la inducción del radio y la emanación del mismo en las aguas.* (Observó también los elementos meteorológicos.) Además recogió una gran cantidad de sales, contenidas en las aguas oceánicas de diferentes latitudes y longitudes geográficas.

Á pedido del doctor Laub he investigado en el laboratorio del departamento de física la radioactividad de aquellas sales (**).

## § 1. *Método empleado*

El estudio se refiere á la radioactividad de las *sales* contenidas en las aguas. Era necesario, pues, empezar por conseguir dichas sales. Para esto desde á bordo del vapor y en diversas posiciones geográficas se recogió siempre *un decímetro cúbico* de aguas oceánicas, se extrajeron en seguida á bordo por ebullición las sales y se guardaron en cajoncitos herméticamente cerrados. Determiné en el laboratorio en todos los casos las masas de éstas y luego las disolví en agua destilada y la disolución cerré en balones. *En esta forma quedaron las aguas más de seis meses.*

Durante este lapso de tiempo, el agua emitió cierta cantidad de emanación, la que nos sirvió como fundamento para la determinación del radio contenido en ella.

Según la teoría de Rutherford, la descomposición de un elemento A (p. e. radio) está siempre acompañada de la producción de un nuevo elemento B (emanación.) La ley que vale para este proceso, se expresa en una forma muy *sencilla*. Si Q indica la cantidad de la materia, que sufre una transformación, tenemos la ecuación

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda Q, \tag{1}$$

(*) J. LAUB, *Physikalische Zeitschrift*, 14, páginas 81-83. 1913.

(**) La discusión en relación con las observaciones aeroeléctricas saldrá en breve en una publicación del doctor Laub.

donde la constante de proporcionalidad $\lambda$ (coeficiente de transformación) caracteriza la velocidad del proceso de la descomposición. Integrando la ecuación (1), se obtiene

$$Q = Q_0 e^{-\lambda t}; \qquad (2)$$

$Q_0$ indica la cantidad que hay en el momento $t=0$, $e$ la base de los logaritmos naturales.

Podemos fácilmente calcular la cantidad Q de la materia B, que se formó en el tiempo $t$ por la descomposición de *una cantidad dada del elemento* A.

Sea $q$ la cantidad *que se desarrolla en la unidad del tiempo* (1 seg), gracias á la transformación de A (radio) en B (emanación), sea $\lambda$ la constante de transformación para B, la cual nos *indica la velocidad con que se descompone* B *en* C (p. e. la descomposición de la emanación de R*a* en R*a*A.) Es claro que el aumento Q en el segundo $\frac{dQ}{dt}$ está dado por la cantidad que se produce gracias á la descomposición de A *en un segundo, menos la cantidad,* que se pierde por la transformación de B en C. Tenemos entonces

$$\frac{dQ}{dt} = q - \lambda Q. \qquad (3)$$

La ecuación diferencial (3) la podemos integrar escribiendo

$$\frac{dQ}{q - \lambda Q} = dt. \qquad (3a)$$

Integrando (3*a*) obtenemos:

$$q - \lambda Q = ce^{-\lambda t}, \qquad (4)$$

$c$ es la constante de la integración, la cual podemos determinar teniendo en cuenta que para $t=0$ vale la relación (*):

$$q - \lambda Q_0 = c, \qquad (5)$$

si llamáramos $Q_0$ á la cantidad de la materia, que hay en el momento $t=0$. Para el caso especial de $Q_0 = 0$, se obtiene:

(*) Las fórmulas serán un poco más complicadas, si calculásemos las cantidades $Q'$, $Q''$, $Q'''$, etc., de las substancias C, D, E, producidas por la descomposición de los elementos B, C, D, E, etc., lo que no influye en los resultados de nuestra investigación.

$$Q = \frac{q}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}). \qquad (6)$$

Después de un tiempo infinitamente grande, $t = \infty$, resulta

$$Q_\infty = \frac{q}{\lambda}. \qquad (7)$$

La emanación $Q_\infty$ la podemos determinar con gran precisión, midiendo la corriente de saturación producida por ella, (v. art. 2), lo que nos permitirá, por intermedio de la ecuación (7), calcular la cantidad de *Ra (en gramos)*, contenida en el líquido.

En efecto, conociendo el coeficiente de transformación para la *emanación de* Ra ($\lambda = 2,0 . 10^{-6}$ seg$^{-1}$), podemos calcular $q$, es decir, determinar la cantidad de la *emanación*, que el *Ra*, contenido *en la disolución, crea en un segundo. Sabiendo de otra parte la corriente de la saturación, que provoca la emanación producida por un gramo de* Ra *met., podemos en seguida encontrar el peso del* Ra *contenido en la disolución investigada.*

Para este fin el doctor Laub calibró la instalación (v. fig. 3) con el líquido normal (*) de Schmidt, colocando en lugar del globo B el frasco de Schmidt, que era ya hace seis meses cerrado. El peso de *Ra met.* en la disolución de Schmidt era igual á $2,22 \times 10^{-9}$ gramos.

*Observando la corriente de saturación* $Q'_\infty$ *producida por el líquido normal, obtendremos, para la emanación producida en un segundo* (v. ecuación 7):

$$q' = \lambda Q'_\infty.$$

La emanación $q''$, creada por *un gramo de* Ra *en un segundo*, será entonces dada por la fórmula

$$q'' = q' \frac{1 \text{ gr. } (^{**})}{2,22 . 10^{-9} \text{ gr.}}$$

*Sabiendo de la observación que la sal investigada desarrolla en un segundo la cantidad $q$, se obtiene el peso en gramos del* Ra *met. contenido en ella, dividiendo $q$ por $q''$.*

*Si en el líquido investigado eran disueltos m gramos de la sal oceánica,* un gramo de la sal contiene

(*) Es decir, con un líquido cuyo contenido de *Ra met.* es conocido.

(**) Según la teoría y experiencia, $q$ es proporcional al peso de radio disuelto y no depende del aparato aplicado.

$$\frac{q}{q''m} \text{ gr. } Ra \text{ met.}$$

*De otra parte un centímetro cúbico del agua oceánica, contiene :*

$$\frac{q}{q''.10^3 \text{ cm}^3} \text{ gr. } Ra \text{ met.}$$

La corriente de saturación producida por el líquido normal se ha medido dos horas después que la emanación quedó cerrada en el *ionizador* (v. § 2 y § 3). [En este caso más ó menos 50 por ciento de la corriente de saturación corresponde al efecto producido por Ra*Em*, el resto tiene su origen en las inducciones del *Ra* (*Ra*A — *Ra*E)].

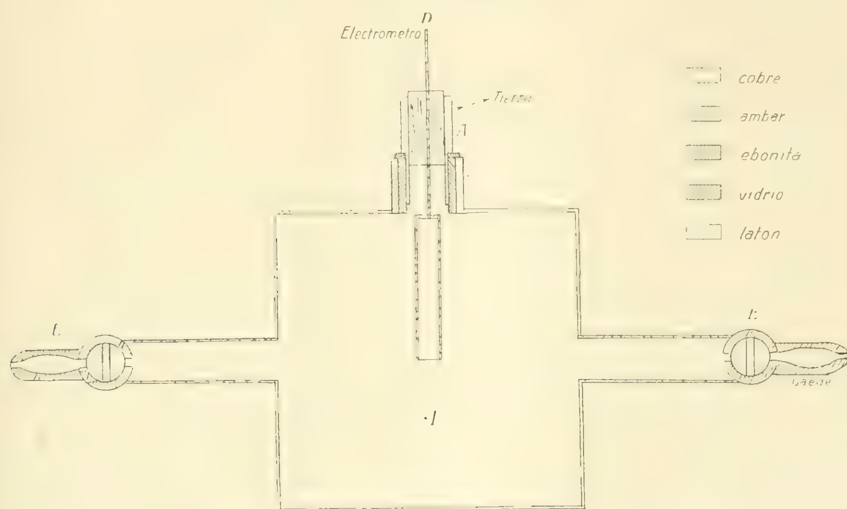



Fig. 1

## § 2. *Descripción de la instalación*

La parte principal de la instalación está formada por un ionizador I y por un electrómetro de cuadrante según Dolezalek.

El ionizador (*), del cual presento un esquema (fig. 1), se compone de un cilindro I de latón de 80 milímetros de altura por 83 milímetros de diámetro. En la parte superior se encuentra un tubo A de latón tam-

(*) El ionizador fué hecho en el taller del laboratorio del departamento de física según las indicaciones del doctor Laub.

bién, el que se halla sujeto y aislado del cilindro I (cargado con alta tensión) por otro *de ebonita*. En el tubo de A se encuentra un tapón de *ámbar*, á través del cual pasa el electrodo D, que conduce al electrómetro. De esta manera el electrodo está protegido eléctricamente del gran cilindro I y de la ebonita.

Además se encuentran dos robinetes de vidrio E: uno para efectuar el vacío; el otro para permitir la entrada de la *emanación*.

*El electrómetro* de Dolezalek es simplemente un electrómetro de cuadrante. Entre los diversos modos de operar con él, he empleado el que se indica en la figura 2.

Los sectores opuestos fueron cargados por una batería de pilas secas




Fig. 2

de Krüger. La aguja colgada sobre un hilo de Wollaston estaba en comunicación con el electrodo D del ionizador.

Para evitar perturbaciones electrostáticas, el electrómetro se hallaba encerrado en una caja de lata, *puesta á tierra*. Antes de empezar las observaciones definitivas, calibré el electrómetro: la sensibilidad fué de 1500 divisiones de la escala bajo el potencial de un voltio.

La instalación entera se ve en la figura 3.

Ella comprendía además un balón B, donde se colocaba el agua radioactiva, un segundo balón C, condensador, una probeta P, llenada con agua, destinada á depósito de la emanación, un tubo secador S y el ionizador I. El electrodo de este último estaba, como ya lo he dicho, en comunicación con el electrómetro, encerrado en una caja de metal. Para eliminar perturbaciones eléctricas, la parte exterior del electrodo D y el hilo, que lo comunicaba con el electrómetro, pasaban por el interior de un tubo metálico, puesto en comunicación con la tierra.

El ionizador estaba cargado por una batería de 100 voltios (corriente de saturación), uno de cuyos polos iba á tierra.

Las desviaciones del electrómetro las observaba por medio de un anteojo y escala. Desde el lugar de la observación un dispositivo especial, formado por un contrapeso, y un hilo, pasando por una roldana, me permitieron establecer comunicación eléctrica entre el ionizador y el electrómetro.

## § 3. *Marcha de la operación*

Ya he dicho anteriormente que el electrómetro había sido calibrado con un líquido cuyo contenido radioactivo era conocido. Además antes de empezar una observación sobre el agua por investigar, determinaba la pérdida normal del electrómetro y del ionizador, es decir, la pérdida

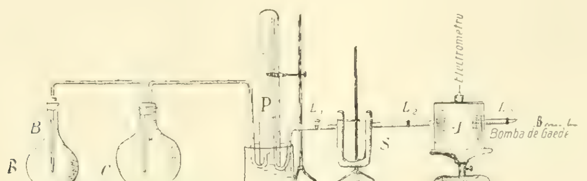



Fig. 3

de carga eléctrica debida al aislamiento no perfecto. Hé aquí como procedía :

Enfocaba la escala en el espejo del electrómetro por medio del anteojo y, colocado el retículo en la división 500, cargaba el ionizador por medio de la batería de 100 voltios y establecía su comunicación con el electrómetro. Después observaba las desviaciones durante *20 minutos* con un intervalo de dos minutos. De esta manera conocía la pérdida normal del potencial, para tenerle en cuenta en los estudios definitivos.

Hecho lo anterior, se colocaba el agua por investigar en B (v. fig. 3) y se procedía á la ebullición lenta de la misma. Los vapores se condensaban en C, y la emanación del radio pasaba á la probeta P, donde desalojaba el agua puesta en ella. Luego se hacía el vacío en el ionizador I con la *bomba de Gaede,* estando las llaves $L_1$ y $L_2$ cerradas. Después se cerraba $L_3$ y se *abrían* $L_1$ y $L_2$. Debido á la diferencia de presión, el aire ionizado, recogido en la probeta P, pasando por el tubo secador S, se alojaba en el ionizador I. Luego se cerraban $L_1$ y $L_2$.

Ahora bien : sabido es que la emanación de radio tiene la propiedad de ionizar el aire, es decir, hacerlo conductor eléctrico. De manera que la emanación radioactiva partida del balón B y alojada en el ionizador I, ha quedado en contacto con la parte interior del electrodo D, y entonces el potencial de 100 voltios dado al ionizador I se ha descargado.

La descarga *producida la he observado durante 20 ó 30 minutos* (con un intervalo de dos minutos), *dos horas después que la emanación del radio quedó encerrada en el ionizador.*

## § 4. *Resultados*

En la siguiente tabla se encuentran los resultados de la experiencia :

| Longitud geográfica | Latitud geográfica | Distancia del continente en millas | Gramos *Ra* en 1 gramo de sal | Gramos *Ra* en 1 centímetro cúbico de agua |
|---|---|---|---|---|
| 59°53′ O. | 42°52′ S. | 157. | $72.10^{-14}$ | $1224.10^{-17}$ |
| 60 25 O. | 43 30 S. | 139 | $149.10^{-14}$ | $2371.10^{-17}$ |
| 60 55 O. | 44 8 S. | 135 | $135.10^{-14}$ | $2362.10^{-17}$ |
| 62 38 O. | 46 16 S. | 139 | $126.10^{-14}$ | $2142.10^{-17}$ |
| 63 40 O. | 47 36 S. | 83 | $36.10^{-14}$ | $587.10^{-17}$ |
| 64 13 O. | 48 17 S. | 62 | $9.10^{-14}$ | $292.10^{-17}$ |
| 67 6 O. | 51 18 S. | 69 | $56.10^{-14}$ | $1077.10^{-17}$ |
| 70 18 O. | 52 43 S. | 3 | $113.10^{-14}$ | $1474.10^{-17}$ |
| 76 22 O. | 51 7 S. | 40 | $98.10^{-14}$ | $1054.10^{-17}$ |
| 76 14 O. | 46 7 S. | 41 | $126.10^{-14}$ | $1726.10^{-17}$ |
| 74 30 O. | 41 30 S. | 25 | $300.10^{-14}$ | $4226.10^{-17}$ |
| | Corral | 1 | $221.10^{-14}$ | $3542.10^{-17}$ |
| | Coronel | $<1$ | $126.10^{-14}$ | $819.10^{-17}$ |
| | Valparaiso | Puerto | $157.10^{-14}$ | $2746.10^{-17}$ |
| | Salida de Valparaiso | 5 | $131.10^{-14}$ | $288.10^{-17}$ |
| | Antofagasta | 3 | $599.10^{-14}$ | $5395.10^{-17}$ |
| 70 25 O. | 21°17′ S. | 23 | $80.10^{-14}$ | $987.10^{-17}$ |
| 70 54 O. | 18 5 S. | 4 | $116.10^{-14}$ | $1215.10^{-17}$ |
| | Mollendo | 3 | $200.10^{-14}$ | $3000.10^{-17}$ |
| 76 29 O. | 14 10 S. | 9 | $105.10^{-14}$ | $1130.10^{-17}$ |

Los números de la columna cuarta indican los gramos del *Ra* contenidos en un gramo de la sal oceánica ; la última columna contiene gramos del *Ra* en un centímetro cúbico del agua oceánica.

Vemos que el agua recogida *en los puertos Corral, Coronel, Valparaiso y Antofogasta contiene un máximum del* Ra ; *lo mismo sucede con las aguas de los lugares que se encuentran cerca de la costa.* Sin embargo

no queremos todavía afirmar, que las aguas en la proximidad del continente tienen más *Ra* que las otras aguas oceánicas. Y así puede ser que la relativamente grande cantidad de *Ra* en los puertos del Pacífico es una propiedad local. Antofagasta — campos de salitre, Coronel — minas de carbón. Para la deducción de conclusiones precisas, será indispensable aumentar el material de observación y extenderle sobre mayores períodos.

No hay ninguna duda que *en las aguas oceánicas se encuentra radio y que la cantidad varía mucho con la posición geográfica.*

*La influencia del Ra en las sales y aguas oceánicas sobre los elementos aeroeléctricos en la atmósfera sobre los océanos y mares debe ser bastante grande,* aunque no tanta como la radioactividad de las piedras sobre el clima continental.

*El valor medio de todas las observaciones es* $147{,}7.10^{-14}$ *gramos Ra por un gramo de la sal oceánica,* $1877{,}8.10^{-17}$ *gramos por centímetro cúbico del agua oceánica.* Eliminando las observaciones efectuadas en los puertos, se recibe como valor medio $108{,}6{,}10^{-14}$ gramos por gramo sal (*).

Por el contenido del radio en diferentes rocas obtienen Joly (**) y Strutt (***), como valores medios $1{,}4 - 5.10^{-12}$ gramos en un gramo de roca. Las rocas del Simplón contienen, según Joly, $6{,}1.10^{-12}$ gramos en un gramo de roca.

Departamento de física del Instituto nacional del profesorado secundario. Diciembre 1914.

(*) J. Joly *(Phil. Mag.,* 15, 385, 16, 194. 1908) encuentra en el agua del océano de la India, $2800 . 10^{-17}$ gramos por centímetro cúbico de agua, en el canal de Islandia $1700 . 10^{-17}$ gramos por centímetro cúbico de agua.

(**) Joly, *Radioactivity and Geology* (libro publicado 1909) y *Nature,* 78, 456. 1908.

(***) R. J. Strutt, *Proc. Roy. Soc.,* 77, 472, y 78, 150. 1906.

# LA ENSEÑANZA DE LA QUÍMICA TECNOLÓGICA EN ALEMANIA

POR MARTINIANO LEGUIZAMÓN PONDAL

La gigantesca contienda que los imperios germánicos sostienen en la actualidad, y cuyo mayor esfuerzo lo efectúa la Alemania, hace pensar en la prodigiosa expansión industrial y en sus múltiples formas por ella lograda, gracias á no haber descuidado la instrucción técnica de la juventud, instrucción adecuada en un todo á las necesidades de la industria.

Los industriales que se ven poco á poco desalojados de los mercados, se preguntan cómo hace la industria alemana para sobrepasar la de otros países tal vez más beneficiados por la naturaleza, y no hay discrepancia en afirmar que los alemanes han alcanzado ese éxito porque han tenido la felicidad de poseer una serie de grandes espíritus en el dominio de la ciencia pura, que no han dejado de favorecer á la industria con sus investigaciones; por eso para ellos la instrucción es la base de todo, atribuyendo en consecuencia la génesis del progreso de su país á sus grandes sabios: Humboldt, Liebig, Hoffmann, Bunsen, etc.

Muchos autores, entre ellos Le Chatelier, en *L'enseignement scientifique dans ses rapports avec l'industrie;* Rousset, en *Industrie chimique en Allemagne;* Clerget, en *L'esprit scientifique dans l'enseignement commercial;* Schwob, en *Le péril allemand;* Lauth, en la *Revue générale des sciences;* Haller, en *L'industrie chimique en 1900;* Lefevre, en la *Revue de matières colorantes;* Trillat, en *L'industrie chimique en Allemagne;* Band, en la *Revue scientifique;* Blondel, en *L'essor commercial et industriel du peuple allemand;* Wellhoff, en *Rapport upon technical education in the exhibition of Saint Louis;* Favre, en la *Revue*

*scientifique;* y Cambón, en *L'Allemagne au travail,* han reconocido que la industria alemana debe su expansión á la organización de la enseñanza técnica.

Entre los industriales, la opinión del gran inventor é industrial inglés, sir Robert Hatfield, no es menos categórica; así, al describir las impresiones que recibió de la industria alemana durante un largo viaje en este país, dice: «El progreso de Alemania en la industria es casi pasmoso. Cuando vi el grandioso laboratorio químicofísico que acaba de instalar la casa Krupp de Essen, con un gasto de dos millones de marcos, este excelente establecimiento para experimentos científicos dentro de una fábrica, tal como ninguna universidad del mundo posee, me di cuenta de nuevo de los servicios que presta la ciencia á la industria en Alemania.

«Mi admiración creció más aún cuando visité los establecimientos del estado, donde se efectúan los exámenes químicos y analíticos, en los cuales se resuelven los más complicados problemas de la industria alemana. En estos laboratorios es donde nacen los éxitos del comercio alemán. No son las aduanas protectoras las que han dado el poderoso impulso á Alemania, sino los ingenios educados en las universidades y escuelas superiores del imperio alemán.»

El mismo káiser — para no citar sólo opiniones de profesores y técnicos — en la inauguración de la Technischen Hochschule de Charlottenburg, dirigiéndose á los alumnos, dijo: «La industria química ha sido una de las causas de la prosperidad comercial de Alemania; pero es necesario que, por la organización especial de vuestras escuelas y por el estímulo dado á los químicos, Alemania tome tal desarrollo que el mundo entero le sea tributario.»

Otra de las causas del éxito ha sido sin duda alguna el avance progresivo de la *técnica* sobre el *empirismo,* y el desarrollo de aquélla reposa sobre el hecho de que la industria alemana, siempre anhelosa de progreso, ha dado su verdadero lugar á los hombres de ciencia, haciendo de lado el concurso de los empíricos.

No será entonces sin orden y por tanteos como se tratará de resolver un problema industrial cualquiera, sino por una serie de ensayos sinópticos apropiados al objeto perseguido.

Casi no existe un alemán que no reciba una enseñanza profesional cualquiera. En ese país, donde todo el mundo trabaja, reina la más profunda convicción de que es imposible ejercer un oficio sin haberlo aprendido no sólo práctica sino teóricamente, para lo cual los estados y las municipalidades, animadas de una profunda emulación, han

instalado una infinidad de laboratorios en universidades, politécnicos, escuelas profesionales, etc., que son verdaderos almácigos de personal entendido en su oficio y en número tal, que cada año salen de esos laboratorios verdaderos enjambres á formar (por todo el territorio de Alemania, desde los Velt hasta la Turingia, donde se enseña á los jóvenes, cuando la nieve cubre los caminos, á fabricar los relojes *kukukuren)* las colmenas, á que debe su engrandecimiento.

La convicción de la eficacia de tal procedimiento es tan profunda, que ha convertido en tendencia nacional la de dotar á cada alemán con el bagaje necesario para poder afirmar en la lucha económica la superioridad de su industria.

Las universidades, según Cambón (1), cualquiera sea la orientación de su enseñanza, abordan la formación técnica de los ingenieros por medio de sus institutos de química, de física y de ciencias naturales.

La enseñanza técnica, al crear una mentalidad práctica con sus actividades orientadas hacia la industria y el comercio, ha tenido la parte principal en la maravillosa expansión alemana, pues forma industriales con las siguientes características: primero, ser lógicos; segundo, dirigir científicamente su productividad; y por fin, tener una tenacidad disciplinada.

## RESEÑA HISTÓRICA

Johan Hartmann (2) ha sido sin duda alguna el primer profesor que ha dado un curso completo de química, fué en 1620, en la histórica universidad de Marburg en el Hessen-Nassau situada sobre las riberas del Lahn, cerca del sitio donde en la actualidad existe el Instituto terapéutico, dirigido por el profesor Behring.

Después Werner Rolfink (3), en 1629, en la universidad de Jena, ducado de Sachsen Weimar; y unos años más tarde, Beccher, profesó en la universidad de la antigua Mainz del ducado de Hessen, iniciando á su discípulo Stahl en la teoría del flogisto, y reemplazando los cuatro elementos de Empedocles por *tierra vitrificable, tierra com-*

(1) CAMBON, *L'Allemagne au travail*, página 13. 1905.

(2) EMIL FISCHER, *Das Studium des technischen Chemie an den Universitäten Deutschlande.*

(3) KOPP, *Geschichte der Chemie*, II, página 18.

*bustible* y *tierra mercurial* (1); pero fué Johan Hofmann en 1683 en la extinguida universidad de Altorf cerca de Nürnberg el primer profesor que tubo laboratorio en Alemania, el que servía para las conferencias del profesor y para química médica.

Intencionalmente hacemos el distingo de primer profesor (2) que tuvo laboratorio en Alemania; porque cuando Colbert organizó en 1666 la Sorbona, impuso á la docta Academia la obligación de enseñar sobre todo: astronomía, matemáticas, química, botánica y anatomía, haciéndole construir un laboratorio para la enseñanza en lo que había sido biblioteca del rey, y prohibiéndole prudentemente toda experimentación sobre piedra filosofal.

Kunckel (3) dictó después y durante varios años un curso de química experimental en la universidad prusiana de Wittenberg en la misma que Martín Luther había dictado filosofía, no obstante lo cual está desde hace años transformada en un cuartel de infantería; más suerte le cupo al convento de agustinos, en que vivió, el que ha sido convertido en un *Lutherhalle,* museo luterano, conservándose todos sus recuerdos, hasta la mancha de tinta de la pared, producida por el tinterazo con que Luther decía haber espantado al diablo la noche que se le presentó. Después de 1694 los cursos de química experimental fueron continuados por Stahl, (4) en la universidad de Halle, gran ducado de Sachsen Weimar, de cuyo gran duque fué su médico hasta 1716, sosteniendo ardientemente la teoría del flogisto; y por Ludorf en la extinguida universidad de Erfürt.

Luego la universidad de Göttingen incorporó la química á sus planes de estudio y ésta se dictó de una manera regular hasta nuestros días.

Zimmermann, en 1809, introdujo la práctica de laboratorio, á él le siguió Liebig en la de Giessen, quien perfeccionó las investigaciones científicas.

Al decir de Adrién — industrial francés — en un elocuente discurso pronunciado en julio de 1904 en el instituto de química aplicada de París «el verdadero impulso dado á la industria por la tecnología química se debe á Liebig, quien al regreso de su viaje á París en 1822 (donde quedó asombrado de la prosperidad industrial de Fran-

(1) Kopp, *Beiträge zur Geschichte der Chemie,* página 202.

(2) Kopp, *Geschichter der Chemie,* I, página 193.

(3) Kopp, *Beiträge zur Geschichte der Chemie,* página 192.

(4) Kopp, *Beiträge zur Geschichte der Chemie,* página 211.

cia en aquel entonces, debida á la colaboración prestada por los sabios principalmente por Fourcroy y Vauquelin, quienes, con la colaboración de De Serres, fundaron la primera casa de productos químicos) promovió un movimiento de asociacion entre los industriales y los profesores de la universidad, movimiento que no ha cesado de dar beneficio á las industrias alemanas ».

Fué en efecto en 1823, al regreso del viaje de Liebig á París, cuando fué recién graduado gracias á la munificencia del gran duque de Hessen, Luis II, que conoció á Humboldt, el que lo hizo nombrar profesor de química en la universidad de Giessen, su patria, cargo al que dedicó la mayor parte de su vida, viéndose sus cursos sumamente concurridos.

Giessen era en aquellos tiempos uno de los focos de los *corps* de estudiantes duelistas y pendencieros, por cuyas estrechas y tortuosas callejas veíanse los estudiantes *forscher,* con sus cicatrices *schneidig* en las mejillas, lo que contrastaba con la vida casi idilicia de la comarca.

Liebig consiguió un laboratorio para las manipulaciones de química práctica, el que fué concurrido por un grupo numeroso de discípulos, entre los que se encontraban los más grandes químicos de Alemania: Hoffmann, Gerhardt, Wiess, Fresenius, etc., con cuyo concurso pudo el maestro instalar un laboratorio de química tecnológica, que sirvió de modelo.

Es en ese año de 1823, en el que vemos por vez primera figurar en los *program* tres horas de la semana dedicadas á la enseñanza de la tecnología química; por esto y por haber contribuído á su engrandecimiento con más de 300 memorias propias y 40 en colaboración, se considera al barón Justo von Liebig como el fundador de ésta rama de la química.

En el año siguiente, Hildebrand dicta cinco horas por semana de química industrial y comienzan las visitas á las fábricas, para lo que dedica cuatro horas por semana en el horario del semestre de verano.

En 1824, en Göttingen se dedica un semestre para tecnología química en general y otro semestre para uno de sus capítulos, la metalurgia; y desde el año 1825 hasta 1852 vemos que Liebig se multiplica, tratando de arrastrar á los industriales y profesores hacia una perfecta armonia, dictando diferentes químicas, unos años tecnológica, á la que dedica cinco horas por semana, otros años analítica con diez y seis horas, ó agrícola con cuatro horas, ó experimental

con seis horas, ó química pura con doce horas, ó química usual con seis horas; se dedica también á la investigación científica y sostiene polémicas, entre ellas una hoy día célebre con Pasteur, sobre fermentacion alcohólica.

En la actualidad la enseñanza de la química tecnológica en Alemania tiene lugar en:

Las universidades.

Las altas escuelas técnicas.

Las escuelas profesionales.

Las escuelas de aplicación.

Sólo consideraremos las universidades y las altas escuelas técnicas, que son las que dan la instrucción superior.

## LA QUÍMICA TECNOLÓGICA EN LAS UNIVERSIDADES

En la gran mayoría de las universidades alemanas se enseña tecnología química y si en algunas de ellas no se enseña — son las menos y las más chicas, á las que los estudiantes irrespetuosamente llaman *Nestern* — es porque falseando el concepto *universitatis litterarum*, reunión en un conjunto global y armónico de todas las disciplinas tanto de investigación, como de aplicación, hacen gala de *cultivar ciencia pura* dejando á los institutos técnicos la *ciencia aplicada*, lo que significa levantar una valla de separación entre el *wissen*, saber, y el *können*, poder, reñida en absoluto con las necesidades reales de la vida (1).

Es bien cierto que todas no le dedican el mismo número de horas, ni todas tienen institutos ni museos tecnológicos, y dentro de la enseñanza algunas de ellas se especializan con las industrias locales, sirviendo principalmente los intereses de la región; pues, salvo la universidad de Strassburg, que es imperial, todas las demás pertenecen á los diversos estados en que se encuentran.

La antigüedad era para las universidades algo así como un blasón; por esta causa Heidelberg, fundada en 1836, ha sido la más aristocrática, por más que en la última mitad del pasado siglo la de Bonn, á pesar de ser la más moderna, pues fué fundada en 1818, adquirió esta

(1) E. Quesada, *La enseñanza de la historia en las universidades alemanas*, página 246.

característica debido á que se educaron en ella Federico Guillermo III desde 1848 á 1852, y Guillermo II desde 1876 á 1879 cuando eran príncipes herederos, y el mismo kronprinz actual; por eso el refrán dice:

*In Bonn*
*da, sich die Herren von.*
Allá en Bonn,
están los señores *von*.

Todas las universidades tienen bastante autonomía y libertad, y por consiguiente puede llegar al ambicionado título de profesor y á los más altos grados universitarios cualquier persona que verdaderamente tenga méritos para ello; sin embargo, hay mucho de solemne, jerárquico y hasta aristocrático en su organización; así los rectores son *Rector magnificus,* los profesores son *Herrn Profesor,* y á medida que se van distinguiendo en los trabajos científicos, el gobierno los nombra: *Rat,* consejero; *Geheimrat,* consejero secreto; *Wirklicher Geheimrat,* verdadero consejero secreto; *Geheimer Regierungsrat,* consejero secreto del gobierno; *Exzellenz,* excelencia, con la preposición *von* de la nobleza hereditaria; y hasta barón como á Justus *von* Leibig.

## *Gran Ducado de Baden*

En Freiburg *im* Brisgan, ciudad situada al pie de la Selva Negra, desde cuyas colinas y por encima del Rhin se ven los Vosgos, cerca de la estatua del monje Bertoldo Schwarz, á quien le atribuyen la invención de la pólvora, en la Grossherzogl. Bad. Albert Universitäten, llamada así en honor del archiduque Alberto su fundador, se dictan dos cursos de tecnología química, uno de ellos á cargo del profesor ordinario y director del instituto de química doctor Luis Gattermann; y el otro á cargo del profesor extraordinario doctor Conrado Villgerodt, de cuatro horas á la semana cada uno.

En Heidelberg la romántica, ciudad recostada entre castaños en el paradisiaco valle del Neckar, ciudad que seduce al forastero por su hermosura y convida al estudio y á la meditación por la tranquilidad, es frecuente encontrar grupos alegres de estudiantes entre las ruinas de su histórico castillo, el que desde una altura domina toda la vega, tarareando la antigua canción que comienza:

*In Heidelberg*
*da sitzt am Fass der Schwerg*

allá en Heidelberg está sentado el enano junto al barril.

Su universidad le dedica tres horas semanales á tecnología química, enseñanza que está á cargo del profesor ordinario doctor Teodoro Curtius.

*Bayern*

En la ciudad de München que atrae al estudiante por múltiples conceptos, tanto por la reputación de sus profesores, la riqueza de sus museos, la valiosa biblioteca, los bien dotados laboratorios, que le han dado fama de la Atenas germánica, y por la risueña vida de esa encantadora capital de los bávaros, en la ciudad de München, decía, su universidad, la Königl. Bayr. Ludwig Maximilians Universitäten enseña tecnología química en dos cursos: uno de tres horas por semana á cargo del profesor ordinario y director del laboratorio de química aplicada doctor Teodoro Paul, y otro de dos horas á cargo del Privat dozenten doctor Alfredo Heiduschka, quien dicta gran industria química.

En la Königl. Julius Maximilians Universitäten, universidad de la ciudad de Würzburg, una de las ciudades bávaras más típica, más pintoresca, más interesante y más tranquila, cuya escuela de medicina, debido á varios ilustres profesores, entre ellos Virchow, ha adquirido justo renombre, se dicta un curso de tecnología química cuatro veces por semana, á cargo del profesor ordinario doctor Luis Medicus,

En la ciudad de Erlangen se encuentra instalada en el antiguo castillo de los margraves de Brandeburg-Bairenth la Königl. Friedrich Alexander Universitäten, frente á la estatua de Federico Alejandro su fundador; en esta Universidad el profesor ordinario don Max Busch enseña tres veces por semana tecnología química.

*Würtenberg*

Tübingen, ciudad delineada en las pendientes de oteros que descienden al Neckar, está rodeada de viñas y huertas. Es una ciudad exclusivamente universitaria, todas sus industrias: imprentas, librerías, instrumentos de precisión, etc., se refieren á su actividad científica, por sus calles tortuosas, estrechas y obscuras que contrastan

con los suntuosos edificios en que la Königl. Eberlhard-Karls-Universitäten tiene instaladas sus facultades, laboratorios, anfiteatros, clínicas, etc., por sus calles, decía, se pasean los estudiantes como los señores de la comarca y se oyen por todas partes conversaciones de temas científicos.

El laboratorio químico está en el antiguo palacio de los príncipes Würtenberg, edificado en 1535 sobre una montaña que domina la ciudad, en él enseña gran industria química el privat-dozenten Alfredo Kliegt.

### *Mecklenburg-Schwerin*

Frente al palacio del gran duque se eleva el de la Universidad, en piedra y de estilo renacimiento; ésta se enorgullece de haber tenido como profesor á Kepler y de estar en Rostock, la ciudad más importante del Mecklenburg, no obstante lo cual se conserva aún rodeada de bastiones y murallas. En la gran ducal universidad enseña tecnología química el profesor extraordinario doctor R. Heinrich dos veces por semana.

### *Sachsen Weimar*

En la ciudad de Jena de quien, el refrán estudiantil dice:

*Und in Jene*
*lebt sich bene*

y en Jena se vive bien, se levanta el edificio de la nueva universidad, en el lugar que ocupó el antiguo palacio gran ducal, y á su frente tiene la estatua de Juan Fèderico, elector de Sajonia, su fundador. El edificio del magnífico laboratorio de química, está edificado en la Schillerstrasse á pocas cuadras de la universidad.

Los estudios de química aplicada se desarrollan en dos cursos de tres horas á la semana: uno de química técnica á cargo del profesor extraordinario doctor Eduardo Vongerichted, director del Instituto de química técnica y el otro de química àplicada (especialmente substancias alimenticias) á cargo del profesor extraordinario doctor Hermann Mathes.

Jena es también de las ciudades universitarias, por todas partes se ven bustos é inscripciones recordando los personajes que han en-

señado ó estudiado, entre ellos: Goethe, Schiller, etc., y en el jardín botánico un busto del químico Dobereiner.

### *Sachsen*

El refrán estudiantil que dice:

*In Leipzig*
*der Mann beweibt sich*

allá en Leipzig el hombre toma mujer, nos hace ver la vida alegre que llevan los estudiantes de la primera ciudad sajona, su universidad, que es la más célebre, se enorgullece de haber tenido profesores de la talla de Leibnitz y estudiantes de la talla de la de Goethe y Wagner. El edificio principal de la Universidad donde están las cuatro facultades, se halla en pleno centro de la ciudad y en el barrio nuevo, sobre la Liebigstrasse, en una extensión de más de 40 hectáreas se encuentran todos los institutos universitarios, entre ellos el de química.

En esta universidad se dictan dos cursos de tres horas por semana cada uno: á cargo del doctor Carlos Paal, director del Laboratorio de Química aplicada, uno; y el otro á cargo del doctor Bertoldo Rassow, profesor de Tecnología química.

### *Prusia*

La universidad Georgia Augusta — en honor de su fundador el rey Jorge II — vulgarmente llamada de Göttingen, ciudad donde se encuentra, la que fué capital del reino de Westfalia, enseña tecnología química é historia de la tecnología química, la primera cuatro veces por semana por el profesor extraordinario doctor Fernando Fischer y la segunda por un *privat-dozenten.*

En la hermosa, tranquila y vieja ciudad católica de Münster en Westfalia la enseñanza de la tecnología química está á cargo del privat-dozent doctor Alois Bömer, quien la explica en tres horas á la semana.

Bonn, ubicada en las provincias renanas en pleno valle del Rhin, provincias que habían estado bajo la dominación francesa hasta la guerra de la liberación, fué elegida como sitio á propósito para fundar una universidad que germinase el espíritu de las referidas provincias. La Rheinische-Friedrich Wilhelms-Universitäten instalada

en el antiguo castillo de los archiprestes electores de Colonia, fué creada con ese objeto. En ella el profesor extraordinario Carlos Kippenberg enseña química aplicada (especialmente substancias alimenticias) con un horario de tres horas semanales.

En la Universidad de la ciudad de Greifswald, donde los estudiantes son serios y laboriosos, el profesor Carlos von Auwers da un curso de química técnica de una hora por semana. Frente á esta universidad se levanta una pirámide conmemorativa de su fundación, en la que se ven príncipes, profesores y principales alumnos.

En la universidad silesiana de Breslau el profesor ordinario y director del Instituto de química doctor Teodoro Pfeiffer da un curso de química agrícola de cuatro horas á la semana; y el profesor extraordinario doctor Félix Ehrlich da un curso de tecnología química de tres horas por semana.

En la universidad de la vieja Könisberg se dictan dos cursos: uno á cargo del profesor ordinario Alberto Stutzer, de dos horas semanales sobre química técnica; y el otro á cargo del privat-dozenten Pablo Wageler, también de dos horas á la semana, sobre química agrícola y tecnología de las maderas.

*Un nach Berlin*
*Da geh nich hin*

y hacia Berlín allá no vayas, dice la vieja conseja estudiantil, refiriéndose á la vida alegre y fácil que llevan los estudiantes en la capital. La universidad fué fundada por indicación de Humboldt en 1810, y para compensar por la instrucción las pérdidas sufridas en las guerras napoleónicas. Al fundarla el sabio nombrado estableció como su norte *elegir siempre como profesor al primer representante en cada materia*, lema que la universidad ha cumplido casi al pie de la letra, de manera que el nombramiento de profesor de la universidad de Berlín es el reconocimiento del triunfo de una carrera científica, si bien hay algunos sabios que no aceptan la cátedra en Berlín: sea por patriotismo regional ó porque en las universidades de provincia, situadas en las pequeñas ciudades tan llenas de encanto, de que anteriormente nos hemos ocupado, disponen de más tiempo y de menos distracciones para poder proseguir sus investigaciones científicas, ó porque los gobiernos, para no dejar sacar de sus universidades los profesores de reputación, les aumentan los emolumentos en forma tal, que sobrepasan las tentaciones que les hagan desde Berlín.

En la universidad berlinesa el profesor extraordinario y director

del Instituto de química tecnológica doctor Carlos Wickelhaus dicta un curso de tecnología química con un horario de cuatro horas semanales.

## LA QUÍMICA TECNOLÓGICA EN LAS ALTAS ESCUELAS TÉCNICAS

Las Technischen Hochschule, altas escuelas técnicas ó politécnicos, como le llaman algunos, por más que no tienen nada de parecido, ni en sus planes de estudio, ni en su organización, ni en su finalidad con la creación de Monge, son los institutos que más especialmente se encargan de la instrucción técnica, dependen respectivamente de los estados en que están situados, por eso es que los hay Königlichen, ó sea, real; y Gross Herzontun, ó gran ducal. Su número es de once, repartidos así:

Gran ducado de Baden, uno en Karlsruhe;
Gran ducado de Braunschweig, uno en Braunschweig;
Gran ducado de Hessen, uno en Darmstadt;
Reino de Württenberg, uno en Stuttgart;
Reino de Bayern, uno en München;
Reino de Sachsen, uno en Dresden;
Reino de Prusia, en Charlottenburg, en Danzig, Hannover, Aachen y Breslau.

Todos estos institutos han sido establecidos y dirigidos según el mismo espíritu, con los mismos cuatro años de duración en sus estudios, confieren análogo diploma y dan instrucción semejante, aunque alguno de ellos haga predominar en su enseñanza la especialidad técnica más importante de la región, como ser: explotación metalúrgica y salinas, el de Aachen; la construcción de navíos, el de Danzig; las materias colorantes orgánicas, el de Darmstadt y el de Stuttgart; y explosivos, inflamables y derivados del carbón, el de München.

La enseñanza técnica ha sido objeto de grandes transformaciones en los últimos años, tendientes siempre á acrecentar los progresos de Alemania en el dominio industrial, y sin embargo la opinión pública siempre exigente, no está del todo satisfecha, pues anhela llegar rápidamente al apogeo.

La formación de los químicos para las industrias y el diploma que se les debía dar, fué una cuestión que apasionó, hace más de catorce años, á la Alemania entera.

Con este motivo se practicó una encuesta, en la que intervinieron

los profesores universitarios y los de las altas escuelas técnicas, los industriales, los miembros del Reichstag (adonde fué llevada la cuestión) y hasta el emperador.

El diploma de doctor sólo podía ser otorgado por las universidades, al que se llamaba diploma de doctorado en filosofía, hasta que se instituyó que el *rerum technicarum* debía ser considerado como un doctorado, y Guillermo II acordó á las altas escuelas técnicas, la distinción de poder acordar el título de *doktor ingenieur* que lo escriben abreviadamente delante del nombre : *Dring.*

Las breves notas apuntadas sobre programas, horarios, números de cátedras, diplomas y organización de la enseñanza de la tecnología química en Alemania, con ser breves, muestran su enorme magnitud á nuestro espíritu ahito ante la magna tarea por realizar en este suelo.

# DISQUISICIONES TRIGONOMÉTRICAS

Por ÁNGEL PÉREZ

## I

### SOBRE LAS LÍNEAS Y FUNCIONES VERSAS

#### § 1. *Un olvido científico injustificado*

1. Si la trigonometría moderna ha hecho algunos progresos del punto de vista de la comodidad y rapidez de los cálculos, no por ello debemos condenar al olvido, dejando caer en desuso, adquisiciones meritorias logradas por algunos esclarecidos matemáticos que florecieron en los siglos XVIII y XIX.

Uno de los más dignos de nuestra atención y reconocimiento es, creemos, el insigne marino español don José de Mendoza y Ríos, á quien si por completo no se debe la invención de las llamadas *líneas versas,* sómosle, cuando menos, deudores del *cálculo* y *tabulación* de sus *valores logarítmicos,* así como de la *aplicación* de tales *funciones* á la resolución de numerosos problemas de la *astronomía náutica.*

Como este descubrimiento y sus aplicaciones han caído en *desuso,* acaso porque en la ciencia interviene á veces la moda como en la indumentaria femenina, nos proponemos *resucitar* su hoy casi desconocida *teoría, probar* las *ventajas* de su *empleo* y aun si fuera posible *volverlas á la vida honrosa* de que gozaron por cerca de un siglo, facilitando á los calculadores la resolución de los problemas del *triángulo esférico de posición* y el famoso de la determinación de las longitudes en el mar por las *distancias lunares*, descartadas hace algunos años de

las tablas astronómicas *(Almanaques náuticos, Connaissance des temps)* en gracia á los progresos de la *navegación cronométrica.*

2. Y si las funciones versas yacen hace años en el panteón de la historia matemática, no faltan geómetras agoreros que anuncian igual fin á la *secante* y *cosecante,* á las que juzgan inútil bagaje goniométrico, tan solo digno de perpetua dejación, ya que el *seno,* la *tangente* y sus respectivas *cofunciones* bastan para toda clase de cálculos, como se deduce de las teorías de la *trigonometría general* ó *goniometría.*

3. Nosotros, que no somos simplistas, *romperemos una lanza* en honor de esas dos calumniadas funciones y hemos de probar su derecho á *vida perpetua* en servicio de cuantos por gusto ó profesión se ejercitan en el cálculo.

Y válganos para ello nuestro buen deseo, ya que no tenemos la alta honra de ser matemático, como sería preciso para dar autoridad á nuestros modestos razonamientos.

Y explicada así la finalidad de esta nuestra primera *disquisición,* entremos en materia.

## § 2. *Definición de las líneas y funciones versas*

4. Consideremos la circunferencia ABA′B′A y á partir de A como origen tomemos un arco en el primer cuadrante (de A á B) y tracemos su línea de seno CD. El segmento AD comprendido entre el origen del arco A y el pie del seno D es lo que se llama la línea de *seno verso* del arco $\widehat{AC}=a$.

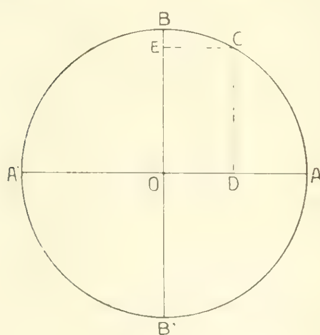


Fig. 1

5. Tomando por origen de los complementos el punto B y por sentido positivo de éstos el BCA ... será $\widehat{BC}$ el complemento del arco $\widehat{AC}$, es decir, que $\widehat{BC}=\frac{\pi}{2}-\widehat{AC}$, y su seno verso (línea de) será BE; pero relativamente al arco $\widehat{AC}$, ese segmento BE se denomina la línea de *coseno verso.* Luego la línea de *coseno verso* del arco $\widehat{AB}=a$ no es otra cosa que la línea de seno verso de su arco complementario $\widehat{BC}=\frac{\pi}{2}-a$.

6. La mitad del segmento AD, es decir, $\frac{AD}{2}$ se llama la *línea de verso* del arco $\widehat{AC}$, y por tanto la línea de verso de un arco $a$ es la mitad de la línea de seno verso del mismo arco $a$, ó simbólicamente

$$\text{línea vers. } a = \frac{1}{2} \text{ línea seno v. } a.$$

7. Análogamente, á la mitad del segmento BE se le llama la *línea de coverso* del arco $\widehat{AC}$, ó simbólicamente, línea de coverso de $\widehat{AC} = \frac{1}{2}$ línea de coseno verso de $\widehat{AC}$.

8. La línea de verso del suplemento del arco $\widehat{AC}$, es decir, la línea de verso del arco A′BC, que es $\frac{A'D}{2}$ se denomina la *línea de subverso* del arco $\widehat{AC}$, ó simbólicamente, línea de subverso de $\widehat{AC}$ = línea de verso de $(\pi - \widehat{AC})$.

$$= \frac{1}{2} \text{ línea de seno verso de } (\pi - a).$$

9. Mendoza considera, además, la línea de verso del suplemento del arco de tres cuadrantes, á la que denomina *línea de subcoverso*. Refiriéndonos á la figura, dicha línea para el arco $\widehat{AC} = a$ es $\frac{B'E}{2}$, ó sea simbólicamente, línea de subcoverso del arco $\widehat{AC}$ = línea de verso del arco $B'A'BC = \frac{B'E}{2}$, ó bien, *línea de subcoverso* de $\widehat{AC} = a =$ *línea de verso* de $\left(3\frac{\pi}{2} - a\right)$.

10. Resultan así seis nuevas líneas, la de *seno verso* y *verso*, la de *coseno verso* y *coverso*, la de *subverso* y la de *subcoverso*, que con excepción de las de *seno verso* y *coseno verso*, su invención y cálculo entendemos que pertenecen al eminente astrónomo español. Con las conocidas y más usuales de *seno, coseno, tangente* y *cotangente, secante* y *cosecante* viene á ser *doce*, cuyo logaritmos para todos los grados de la circunferencia entera tabuló nuestro autor, como diremos más adelante.

11. La razón de cada una de las líneas versas al radio elegido para el arco las convierte en funciones, así como esa misma operación convertía en tales á las líneas trigonométricas comunes.

Podremos pués, escribir, representando para abreviar el arco por $a$ y el radio del círculo por R.

$$\text{seno verso de } a = \text{sen v. } a = \frac{AD}{R}; \qquad \text{vers. } a = \frac{\text{sen v. } a}{2} = \frac{AD}{2R}$$

$$\text{coseno verso de } a = \text{cos v. } a = \frac{BE}{R}; \qquad \text{cover. } a = \frac{\text{cos v. } a}{2} = \frac{BE}{2R}$$

$$\text{subverso de } a = \text{subv. } a = \frac{A'D}{2R}$$

$$\text{subcoverso de } a = \text{subcov. } a = \frac{B'E}{2R}.$$

El modo más sencillo de introducir el radio en la expresión de las funciones trigonométricas es suponer éste igual á la unidad. En tal hipótesis, las anteriores funciones para el arco $a$ son :

$$\text{sen v. } a = AD, \quad \text{vers. } a = \frac{AD}{2}; \quad \text{cos v. } a = BE, \quad \text{cov. } a = \frac{BE}{2}$$

$$\text{subv. } a = \frac{A'D}{2} \qquad \text{subcov. } a = \frac{B'E}{2}.$$

12. Conviene buscar y representar estas funciones para un arco cualquiera; y como ya las hemos hallado para un árco cuyo extremo libre termina en el primer cuadrante; las investigaremos ahora en arcos que terminen en el segundo, tercero ó cuarto cuadrantes, y aun para arcos mayores que la circunferencia entera.

Queda sobreentendido que la circunferencia ABA'BA la suponemos trazada con un radio igual á la unidad.

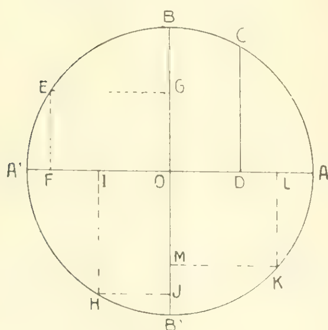


Fig. 2

Para el arco $\overparen{ABE}$ que termina en el segundo cuadrante, AF es su *seno verso;* $\frac{AF}{2}$ su *verso;* BG su *coseno verso;* $\frac{BG}{2}$ su *coverso;* $\frac{A'F}{2}$ su *subverso* y $\frac{B'G}{2}$ su *subcoverso.*

Para el arco $\overparen{ABA'H}$ que termina en el tercer cuadrante, es AI el *seno verso,* $\frac{AI}{2}$ el *verso,* BJ el *coseno*

*verso,* puesto que BJ es el *seno verso* del arco $\overset{\frown}{BEH}$ complementario del $\overset{\frown}{ABA'H}$; $\frac{BJ}{2}$ es el *coverso;* $\frac{A'I}{2}$ es el *subverso,* puesto que es $\frac{A'I}{2}$ el *verso* del arco $\overset{\frown}{HA'}$ suplementario del $\overset{\frown}{ABA'H}$; y por último $\frac{B'J}{2}$ es el *subcoverso,* puesto que este valor es el verso del arco $\overset{\frown}{B'H}$ suplemento á tres cuadrantes del arco $\overset{\frown}{ABA'H}$.

Para el arco $\overset{\frown}{ABA'B'K}$ que termina en el cuarto cuadrante, es AL el *seno verso;* $\frac{AL}{2}$ el *verso;* BM el *coseno verso,* puesto que BM es el *seno verso* del arco complementario $\overset{\frown}{BA'B'K}$ del propuesto, y $\frac{BM}{2}$ su *coverso.* El *subverso* del mismo arco $\overset{\frown}{ABA'B'K}$ es $\frac{A'L}{2}$ · puesto que $\frac{A'L}{2}$ es el *verso* del arco $\overset{\frown}{A'B'K}$ suplementario del arco dado; $\frac{B'M}{2}$ es el *subcoverso* de éste, puesto que es *verso* del arco $\overset{\frown}{B'K}$ suplemento á tres cuadrantes del arco examinado.

13. Es evidente que, añadiendo un número cualquiera de circunferencias positivas á un arco dado, el arco primitivo y el aumentado tienen iguales extremos, de modo que sus funciones goniométricas no variarán.

14. Si el arco es negativo, sus funciones trigonométricas serán las mismas que las del arco positivo que tenga los mismos extremos de aquél.

Así las funciones goniométricas del arco negativo $\overset{\frown}{AK}$ serán idénticas á las del arco positivo $\overset{\frown}{ABA'B'K}$; las del arco negativo $\overset{\frown}{AB'H}$ son las mismas que las del positivo $\overset{\frown}{ABA'H}$. Las del negativo $\overset{\frown}{AB'A'E}$ son iguales á las del positivo $\overset{\frown}{ABE}$; y por último, las del negativo $\overset{\frown}{AB'A'BC}$ son congruentes con las del positivo de iguales extremos $\overset{\frown}{AC}$.

Si el arco negativo ó positivo es mayor de una circunferencia, sus funciones goniométricas serán las del arco que resulte, restando del dado todas las circunferencias que contuviere.

### § 3. *Funciones versas de un arco negativo en términos de las correspondientes al mismo arco positivo*

14. La simple inspección de las figuras anteriores muestra ya que el *seno verso,* el *verso* y el *subverso* de un arco negativo son idénticos en valor y signo al *seno verso, verso* y *subverso* del mismo arco positivo.

Puede afirmarse además, que las funciones versas de un arco cualquiera son siempre positivas, lo que es de gran valor y utilidad en el cálculo por medio de estas líneas.

Por otra parte, siempre podemos hacer que los *senos versos* y *versos* sean contados *desde el origen* sobre el diámetro horizontal hacia la *izquierda,* es decir, en el sentido AOA'; que los *subversos* lo sean sobre el mismo diámetro á partir del otro extremo A' hacia la *derecha;* que los *cosenos versos* y *coversos* sean contados desde el extremo superior B del diámetro vertical hacia *abajo,* y que los *subcoversos* lo sean desde el extremo *inferior* del mismo diámetro vertical hacia *arriba.*

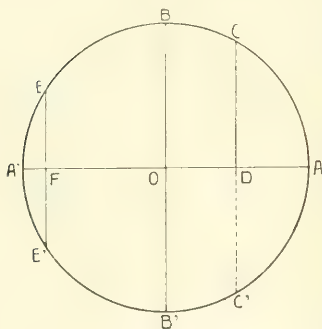


Fig. 3

1ª Así, el *seno verso* del arco negativo AC' es igual en valor y signo al del arco positivo igual AC. El seno verso del arco negativo AC'E' es idéntico al del arco positivo ABE de igual valor, puesto que para ambos está representado por AF, etc.

Análogamente, el *verso* del arco negativo AB'E'A'E, es el mismo que el del arco positivo de la misma graduación ABEA'E', pues ambos versos están representados por el mismo segmento $\frac{AF}{2}$. Infiérese de ésto que podemos cambiar el signo del arco correspondiente á un *seno verso* ó á un *verso,* sin alterar el signo de la respectiva función. Por tanto,

$$\text{sen vers. } (a-b-c) = \text{sen vers. } (b+c-a)$$

y

$$\text{vers. } (p-q+r) = \text{vers. } (q-p-r).$$

2ª No siendo el *subverso* de un arco sino el *verso* del arco suplementario, es evidente que el subverso de un arco negativo es igual al subverso del arco positivo de igual amplitud ó graduación.

Así,

$$\text{subv. } \overset{\frown}{AC'} = \text{sub. } \overset{\frown}{AC} = \frac{A'D}{2}$$

$$\text{subv. } \overset{\frown}{AB'E'} = \text{subv. } \overset{\frown}{ABE} = \frac{A'F}{2}$$

$$\text{sub. } AB'E'A'E = \text{subv. } ABEA'E' = \frac{A'F}{2}$$

y por tanto, podremos cambiar el signo del arco sin alterar el de la función. Por la cual,

$$\text{subv. } (a - b - c) = \text{subv. } (b + c - a).$$

3ª El *coseno verso de un arco negativo,* es igual al duplo del *subcoverso* del mismo arco tomado positivamente.

$$\text{cos v. } (\overset{\frown}{AC'}) = \text{sen v. } (BCAC') = BG'$$

$$\text{subcov. } (\overset{\frown}{AC}) = \text{ver. } (B'A'BC) = \frac{B'G}{2}$$

Fig. 4

$$2 \text{ subcov. } (\overset{\frown}{AC}) = 2 \text{ vers. } (B'A'BC) = B'G$$

pero $B'G = BG'$, por ser $BG = B'G'$ por proyecciones de arcos iguales $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{B'C'}$ sobre el diámetro vertical, luego

$$\text{cos v. } (-a) = 2 \text{ subcov. } (a).$$

Según esta proposición resulta evidente que:

4ª El *coverso* de un arco negativo, es igual al *subcoverso* del mismo arco tomado positivamente.

Basta recordar que el *coverso* es la mitad del *coseno verso.* Luego

$$\text{cos v. } (34°) = 2 \text{ subcov. } 34°$$

$$\text{cov. } (-43°) = \text{subcov. } (43°).$$

5ª El *subcoverso de un arco negativo* es igual al *coverso del mismo arco, tomado positivamente.*

$$\text{Subcov. } (-\overset{\frown}{AC'}) = \text{subcov. } (-a) = \text{vers. } \left[3 \cdot \frac{\pi}{2} - (-a)\right] =$$

$$= \text{vers. } \left(3\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{vers. } (\overset{\frown}{C'ABA'B'}) = \frac{B'G'}{2}$$

$$\text{cov.}\ (\widehat{AC}=a)=\frac{1}{2}\text{cos v.}\ (\widehat{AC}=a)=\frac{BG}{2}.$$

Pero $\frac{B'G'}{2}=\frac{BG}{2}$ por ser ambos segmentos semiproyecciones de los arcos iguales B'C', BC ambos de valor $\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$.

### § 4. *Funciones versas de dos arcos complementarios*

15. En todo arco cuyo complemento es positivo, las funciones ó cofunciones de dicho arco son iguales en magnitud y signo á las cofunciones ó funciones respectivamente de su arco complementario.

La verdad de esta proposición deriva de las definiciones de las funciones versas y de lo ya probado sobre las relaciones que ligan á las de los arcos positivos y negativos de igual graduación.

Así,

$$\text{sen v.}\ (90°-a)=\text{sen v.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{cos v.}\ (a) \quad (1)$$

$$\text{cos v.}\ (90°-a)=\text{cos v.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{sen v.}\ (a) \quad (2)$$

$$\text{vers.}\ (90°-a)=\text{ver.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{cov.}\ (a) \quad (3)$$

$$\text{subv.}\ (90°-a)=\text{subv.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{subv.}\ \widehat{BC}=\frac{B'E}{2}$$

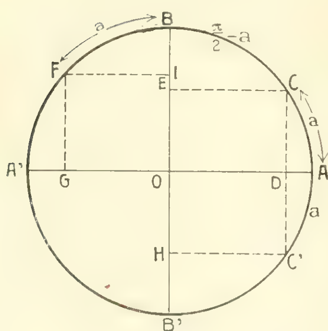



Fig. 5

Pero

$$\frac{B'E}{2}=\text{subcov.}\ (\widehat{AC}=a),$$

luego:

$$\text{subv.}\ (90°-a)=\text{subcov.}\ (a) \quad (4)$$

$$\text{subcov.}\ (90°-a)=$$
$$=\text{subcov.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\frac{A'D}{2}.$$

Pero

$$\frac{A'D}{2}=\text{subv.}\ (a),$$

luego:

$$\text{subcov.}\ (90°-a)=\text{subcov.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{subv.}\ (a) \quad (5)$$

16. Para los arcos cuyo complemento es negativo, tenemos:

$$\text{sen v. } (90^\circ + a) = \text{sen v. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{cos v. } (-a),$$

pero según el párrafo tercero,

$$\text{cos v. } (-a) = 2 \text{ subcov. } (a),$$

luego:

$$\text{sen v. } (90^\circ + a) = \text{sen v. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{cos v. } (-a) = 2 \text{ subcov. } (a) \quad (1)$$

$$\text{cos v. } (90^\circ + a) = \text{cos v. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{sen v. } (-a) = \text{sen v. } (a) \ (\S\ 3^\circ) \quad (2)$$

$$\text{ver. } (90^\circ + a) = \text{ver. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{cov. } (-a) = \text{subcov. } (a) \ (\S\ 3^\circ) \quad (3)$$

$$\text{cov. } (90^\circ + a) = \text{cov. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{vers. } (-a) = \text{ver. } (a) \ (\S^\circ\ 3^\circ) \quad (4)$$

$$\text{subv. } (90^\circ + a) = \text{subv. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{A'G}{2}.$$

Pero $\frac{A'G}{2} = \frac{B'H}{2}$, porque tanto A′G como B′H son proyecciones de arcos de igual valor absoluto $\widehat{FA'} = \frac{\pi}{2} - a$ y $B'C' = \frac{\pi}{2} - a$ sobre diámetros respectivamente perpendiculares á los arcos en los orígenes A′, B′ de éstos; pero $\frac{B'H}{2}$ es el subcov. de $(-a)$, luego subv. $\left(\frac{\pi}{2} + a\right) =$ subcov. $(-a)$ y como (§ 3°) subcov. $(-a) =$ cov. $(a)$ es finalmente

$$\text{subv. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{subcov. } (-a) = \text{cov. } (a) \quad (5)$$

$$\text{subcov. } (90^\circ + a) = \text{subcov. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{subcov. } \widehat{ABF} = \frac{B'I}{2}.$$

Pero $\frac{B'I}{2} = \frac{A'D}{2}$. porque B′I es el diámetro menos BI, proyección del arco $a$, y A′D es también el diámetro menos, AD proyección del arco $a$, luego sus respectivas mitades serán iguales, pero $\frac{A'D}{2}$ es el subv. $(-a)$ y esto es igual á subv. $a$, luego

$$\text{subcov. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{subv. } (-a) = \text{subv. } (a). \quad (6)$$

17. Tendremos, haciendo aplicaciones:

$$\text{ver. } 37^\circ = \text{cov. } (90^\circ - 37^\circ) = \text{cov. } 53^\circ$$
$$\text{cov. } 37^\circ = \text{ver. } (90^\circ - 37^\circ) = \text{ver. } 53^\circ$$
$$\text{subv. } (90^\circ - 35^\circ) = \text{subcov. } 35^\circ$$
$$\text{subcov. } (90^\circ - 43^\circ) = \text{subv. } 43^\circ$$

18.
$$\text{ver. } (90^\circ + 12^\circ) = \text{cov. } (-12^\circ) = \text{subcov. } 12'$$
$$\text{cov. } (90^\circ + 87^\circ) = \text{ver. } (-87^\circ) = \text{vers. } (87^\circ)$$
$$\text{subv. } (90^\circ + 342^\circ) = \text{subv. } 432^\circ = \text{subv. } (72^\circ)$$
$$\text{subv. } (90^\circ + 342^\circ) = \text{subcov. } (-342^\circ) = \text{cov. } 342^\circ$$
$$\text{subcov. } (90^\circ + 517^\circ) = \text{subcov. } 607^\circ = \text{subcov. } 247^\circ =$$
$$= \text{ver. } (270^\circ - 247^\circ) = \text{v. } 23^\circ$$
$$\text{subcov. } (90^\circ + 517^\circ) = \text{subv.} (-517^\circ) = \text{subv.} (517^\circ) =$$
$$= \text{subv. } (157\ ) = \text{v. } 23$$

## § 5. *Funciones versas de dos arcos suplementarios*

19. Sean dos arcos suplementarios $a$ y $\pi - a$; por lo ya visto al tratar de las líneas versas correspondientes á dos arcos complementarios y á las relaciones entre las de arcos positivos y negativos podremos deducir las respectivas entre aquellos arcos.

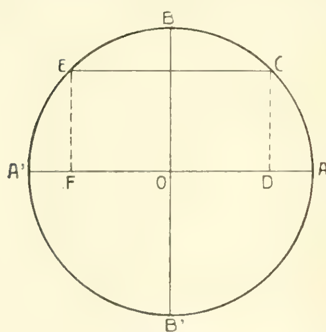


Fig. 6

Tendremos:

1ª
$$\text{sen v. } (\pi - a) =$$
$$= \text{sen v. } \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] =$$
$$= \text{cos v. } \left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = (\S\ 3^\circ)$$
$$= 2 \text{ subcov. } \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2 \text{ subv. } (a) \quad (\S\ 4^\circ)$$

2ª
$$\text{cos v. } (\pi - a) = \text{cos v. } \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] =$$
$$= \text{sen v} \left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = \text{sen v. } \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{cos v. } a.$$

3ª
$$\text{cov. } (\pi - a) = \text{cov. } \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = \text{ver. } \left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] =$$
$$= \text{ver. } \left[\frac{\pi}{2} - a\right] = \text{cov. } a$$

4ª $$\text{vers.}\ (\pi-a)=\text{ver.}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=$$
$$=\text{cov.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=\text{subcov.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{subv.}\ a$$

5ª $$\text{subv.}\ (\pi-a)=\text{subv.}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=$$
$$=\text{subcov.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=\text{cov.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{ver.}\ (a)$$

6ª $$\text{subcov.}\ (\pi-a)=\text{subcov.}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=$$
$$=\text{subv.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=\text{subv.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{subcov.}\ a.$$

20. Estas relaciones pueden patentizarse geométricamente.

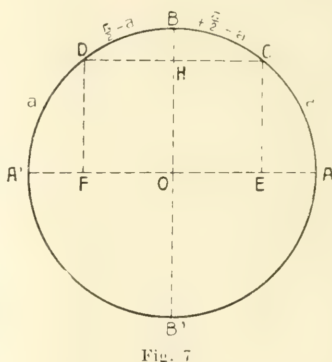


Fig. 7

1ª El seno verso de $(\pi-a)$ está representado por el segmento AF. El arco BD contado desde el origen de los complementos y en el sentido negativo de éstos, es el arco $-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$. El coseno verso de este arco negativo, debe ser, por definición, el seno verso del arco ABD, y éste es efectivamente AF, de aquí sacamos que

$$\text{sen v.}\ (\pi-a)=\text{sen v.}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=\text{cos v.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right].$$

Si tomamos como origen de arcos el punto B (origen de los complementarios) y por sentido positivo el BCA ... el *subcoverso* de $\left(BC=\frac{\pi}{2}-a\right)$ debe ser, por definición, el *verso* del suplemento á tres cuadrantes, es decir, el *verso* del arco CAB'A' ó del igual A'B'AC que es $\frac{A'E}{2}$; luego $A'E=2$ subcov. $\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$; pero $A'E=AF$, puesto que AE y A'F son iguales por senos versos del mismo arco $a$, representado por $\widehat{AC}$ á la derecha y por $\widehat{A'D}$ á la izquierda, luego

$$\text{cos v.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]=2\ \text{subcov.}\left(\frac{\pi}{2}-a\right).$$

2ª $$\text{Cos v. } (\pi - a) = \text{cos v.} \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] =$$

$$= \text{sen v.} \left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = \text{sen v.} \left[\frac{\pi}{2} - a\right] = \text{cos v. } a$$

(propiedad idéntica á la de los senos de dos arcos suplementarios).

En efecto, el cos v. de $(\pi - a)$ es el cos v. de $\overparen{ABD}$ que es el *sen v.* de $\overparen{BD}$ ó de $-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, por definición, y que está representado por BH; y como el seno verso del arco negativo $-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ es el mismo que el del arco positivo $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, y este *seno verso* equivale al *coseno verso* de $a$, figurado por el mismo segmento BH, la igualdad segunda es de palmaria evidencia.

3ª $$\text{Vers. } (\pi - a) = \text{vers.} \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] =$$

$$= \text{cov.} \left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = \text{subcov.} \left[\frac{\pi}{2} - a\right] = \text{subv. } (a)$$

En efecto, vers. $(\pi - a)$ es el verso del arco $\overparen{ACD}$ representado por $\frac{AF}{2}$. Pero como el arco $(\pi - a)$ puede escribirse $\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right]$; su *verso,* equivale, por definición, al *coverso* de su arco complementario $-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, representado en la figura por $\overparen{BD}$; este coverso es el verso del arco $\overparen{ACD}$, y por tanto está representado por $\frac{AF}{2}$. Si el arco igual y de signo contrario á $-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ es $\overparen{BC}$, el *subcoverso* de ese arco, es el *verso* del suplementario á $3\frac{\pi}{2}$ (por definición) y está representado el arco por $\overparen{A'B'AC}$ y el segmento por $\frac{A'E}{2}$, que al propio tiempo es la representación del *subverso* del arco $a$. Ahora bien, $\frac{AF}{2}$ y $\frac{A'E}{2}$ son evidentemente iguales, como se probó en la primera de este párrafo V, luego la tercera proposición queda demostrada.

4ª $$\text{Cov.}\ (\pi - a) = \text{cov.}\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] =$$

$$= \text{ver.}\left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = \text{ver.}\left[\frac{\pi}{2} - a\right] = \text{cov.}\ a$$

(propiedad idéntica á las de los senos de los arcos suplementarios).

La paralela CD al diámetro AA' determina los arcos iguales $\widehat{AC} = a$, $\widehat{A'D} = a$, y así, $\widehat{ACD} = \pi - a$ cuyo *coverso*, es el *verso* del complemento $-\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \widehat{BD}$, que es idéntico al *verso* de $\widehat{BC} = \left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, representado por $\frac{BH}{2}$ · que es evidentemente el *coverso* del arco $\widehat{AC} = a$.

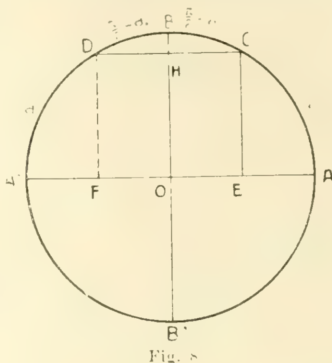


Fig. 8

5ª $$\text{Subverso}\ (\pi - a) = \text{subv.}\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] =$$

$$= \text{subcov.}\left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = \text{cov.}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{vers.}\ a.$$

En la figura 8 se advierte que el subv. $[\widehat{ACD} = (\pi - a)]$ es $\frac{A'F}{2}$ · El arco negativo $-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ tiene por suplemento á $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ el arco cuyo valor absoluto es A'B'ABD, cuyo *verso*, llamado *subcoverso* del $\widehat{BD} = -\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ está representado por $\frac{A'F}{2}$ · El *coverso* de $\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \widehat{BC}\right]$ es el *verso* de su complemento $a = \widehat{AC}$, que es $\frac{AE}{2}$; pero AE y A'F son segmentos iguales, por ser proyecciones de los arcos iguales $\widehat{A'D}$ y $\widehat{AC}$ y simétricos respecto á BB', sobre el diámetro del origen; luego es evidente la igualdad que estamos comprobando.

6ª $$\text{Subcoverso}\ (\pi - a) = \text{subcov.}\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] =$$

$$= \text{subv.}\left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = \text{subv.}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{subcov.}\ (a).$$

El subcov. de $(\pi - a) =$ subcov. $\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right]$ es el subcoverso del arco $\widehat{ABD}$ de la figura, que por definición, es el *verso* del arco B'A'D suplemento á $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ y representado por el segmento $\frac{B'H}{2}$. El *subverso* de $-\left(\frac{\pi}{2} - a\right) =$ *subv.* de $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, porque las funciones versas de los arcos negativos son iguales en valor y signo á las del mismo nombre de los arcos positivos; ese subv. de $\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \widehat{BC}\right]$ tiene por representación geométrica el segmento $\frac{B'H}{2}$, que conviene igualmente al *subcoverso* de $(a = AC)$, lo que justifica la sexta igualdad.

21. Muestran las relaciones 2ª, 4ª y 6ª que el *coseno verso*, el *coverso* y el *subcoverso* de dos arcos suplementarios son iguales y del mismo signo.

### § 6. *Líneas y funciones versas de dos arcos cuyos extremos libres están sobre el mismo diámetro*

22. Sea ABA'B'A una circunferencia de radio igual á la unidad; $\widehat{AC} = a$ un arco cualquiera, COE el diámetro que pasa por su extremo libre C; el arco AC y el $\widehat{ACBE}$ valen respectivamente $a$ y $\pi - a$, trazando sus líneas de *seno* y *coseno* y las demás que indica la figura 9, tendremos, llevando en cuenta la doctrina de los párrafos anteriores que:

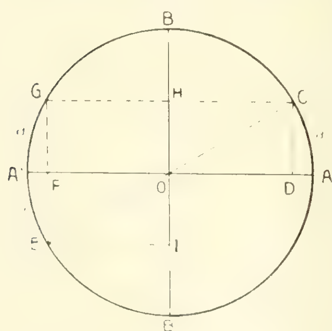


Fig. 9

1° $\quad$ sen v. $(\pi + a) =$ sen v. $(\pi - a) =$

$$= 2 \text{ subv. } (a) = 2 \text{ subcov. } \left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

2° $\quad$ cos v. $(\pi + a) =$ cos v. $\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + a\right)\right] =$

$$= \text{sen v. } \left[-\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\right] = \text{sen v. } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{cos v. } (-a) = 2 \text{ subcov. } (a)$$

3° $\text{vers.}\,(\pi+a)=\text{vers.}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=$

$=\text{cov.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=\text{subcov.}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\text{subv.}\,(-a)=\text{subv.}\,a$

4° $\text{cov.}\,(\pi+a)=\text{cov.}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=$

$=\text{ver.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=\text{ver.}\left[\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=\text{cov.}\,(-a)=\text{subcov.}(a)$

5° $\text{subv.}\,(\pi+a)=\text{subv.}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=$

$=\text{subcov.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=\text{cov.}\left[\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=\text{ver.}\,(-a)=\text{ver.}\,(a).$

También se deduce de la figura que el subv. $(\pi+a)=$ subv. $(\pi-a)$.

6° $\text{subcov.}\,(\pi+a)=\text{subcov.}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=$

$=\text{subv.}\left[-\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\right]=\text{subv.}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\text{subcov.}\,(-a)=\text{cov.}\,a.$

23. Es fácil comprobar en la figura adjunta estas propiedades.

1ª En efecto, el seno verso de $[(\pi+a)=\widehat{ABA'E}]$ es AF, y ese mismo segmento conviene al seno verso $[(\pi-a)=\widehat{ABG}]$. El *subverso* de $(a=\widehat{AC})$ es $\frac{A'D}{2}$, luego 2 subv. $a=A'D$, pero este segmento es evidentemente igual á AF, por tanto, sen v. $(\pi-a)=2$ subv. $a$. El *subcoverso* de $\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$, es decir, de $\widehat{BC}$, (origen en B) es el verso del arco $\widehat{CAB'EA'}$, por definición, que es $\frac{A'D}{2}$, cuyo duplo es $A'D=AF$, y en tal virtud queda patentizada la primera proposición.

La 2ª se comprueba de un modo semejante. (Véase la fig. 10.)

Si $\widehat{AC}$ es el arco $a$, el $\widehat{ABA'D}$ es el arco $(\pi+a,)$ cuyo *coseno verso*, es el *seno verso* del arco complementario negativo $-\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\widehat{BA'D}$, que se representa en la figura 10, por BE, segmento que conviene también al arco positivo de igual graduación $\widehat{DA'B}$ ó $\widehat{BAF}$. Pero el

*coseno verso* del arco $(-a = \widehat{AF})$ es también BE. El duplo del subcoverso de $a = \widehat{AC}$, que es el *seno verso* del arco $\widehat{CBA'B'}$, por definición, está representado por B'H, segmento igual á BE, pues que cada uno difiere del diámetro BB' en las cantidades iguales BH, B'E, proyecciones sobre BB' de los arcos iguales y simétricos respecto á $\widehat{AA'}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{B'F}$ de valor $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, luego queda evidenciada la segunda proposición.

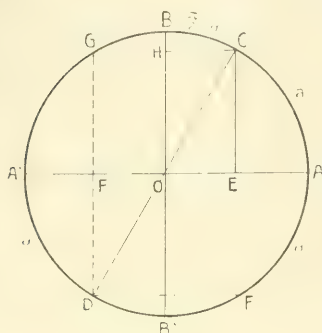


Fig. 10

La 3ª dice en la figura 10 que el vers. $(\pi + a) = \frac{AF}{2}$ conviene también al arco $\widehat{ACG} = \pi - a)$. El *coverso* de $\left[-\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \widehat{BA'D}\right]$ arco negativo, es (§ 3º-4º) igual al *subcoverso* del arco positivo de igual valor $\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$, y por 5ª del párrafo 4º, ese *subcoverso* es igual al *subverso* de $(-a)$ ó al subv. $(a)$, § 3º-2ª) y queda comprobada la tercera proposición.

4ª El *coverso* de $(\pi + a)$ podemos deducirlo del *coseno verso* de $(\pi + a)$, y puesto que éste resultó igual á 2 subcov. $(a)$, aquel será equivalente á *subcov.* $(a)$.

5ª De la figura sacamos que el *subverso* de $(\pi + a)$ es igual al subv. $(\pi - a)$, representado por el segmento $\frac{A'F}{2}$; pero $\frac{AE}{2}$ es un segmento igual que corresponde al *verso* de $a$, luego el 5º teorema queda demostrado.

6ª El *subcoverso* de $(\pi + a)$, es decir, el verso del arco $\widehat{B'D}$, suplemento á *tres* cuadrantes del arco propuesto $\widehat{ABA'D}$, está representado en la figura por $\frac{B'E}{2}$ segmento que conviene á la expresión del *subverso* de $\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ ó sea de $\widehat{BA'D}$; pero el segmento igual $\frac{BH}{2}$ conviene al *coverso* de $a$, luego la 6ª igualdad es legítima.

## § 7. *Relaciones entre las funciones goniométricas de un mismo arco*

24. Se sabe que la definición analítica de las funciones circulares comunes para un arco cualquiera $a$ en que el radio es R, es:

$$\text{sen } a = \frac{\text{l. sen. } a}{R} \qquad (1)$$

$$\cos a = \frac{\text{l. cos } a}{R} \qquad (2)$$

$$\text{tg } a = \frac{\text{l. tg } a}{R} \qquad (3)$$

$$\text{cotg } a = \frac{\text{l. cotg } a}{R} \qquad (4)$$

$$\text{sec. } a = \frac{\text{l. sec. } a}{R} \qquad (5)$$

$$\text{cosec. } a = \frac{\text{l. cosec. } a}{R}. \qquad (6)$$

en que *l.* es abreviatura de la palabra línea.

Cuando el radio se supone igual á la unidad (1), dichas definiciones convienen lo mismo á las líneas trigonométricas que á las respectivas funciones.

Es sabido también que

$$\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a} \qquad (3')$$

$$\text{cotg } a = \frac{\cos a}{\text{sen } a} \qquad (4')$$

$$\text{sec. } a = \frac{1}{\cos a} \qquad (5')$$

$$\text{cosec. } a = \frac{1}{\text{sen } a} \qquad (6')$$

para $R = 1$.

25. Las líneas y funciones versas pueden expresarse en términos del radio y del seno ó coseno del mismo arco al igual de las otras funciones circulares.

Fijándonos, por ejemplo, en un arco $a$ del primer cuadrante y suponiendo su radio $R = 1$, el *seno verso* de $\widehat{AC} = a$ es $AD = OA = 1 - \cos a$, será pues (véase la fig. 11),

$$\text{sen v. } a = 1 - \cos a \qquad (1)$$

$$\cos \text{ v. } a = \text{BE} = \text{OB} - \text{OE} = \text{OB} - \text{CD} = 1 - \text{sen } a$$

por tanto,

$$\cos \text{ v. } a = 1 - \text{sen } a \qquad (2)$$

$$\text{ver. } a = \frac{1}{2} \text{ sen v. } a = \frac{1 - \cos a}{2} \qquad (3)$$

$$\text{cov. } a = \frac{1}{2} \cos \text{ v. } a = \frac{1 - \text{sen } a}{2} \qquad (4)$$

$$\text{subv. } a = \frac{\text{A'D}}{2} = \frac{\text{A'O} + \text{OD}}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}; \quad \text{subv. } a = \frac{1 + \cos a}{2} \qquad (5)$$

$$\text{subcov. } a = \frac{\text{B'E}}{2} = \frac{\text{B'O} + \text{OE}}{2} = \frac{1 + \text{sen } a}{2}; \quad \text{subcov. } a = \frac{1 + \text{sen } a}{2} \qquad (6)$$

La forma de estas expresiones debe mantenerse para cualquiera que sea el arco denotado con $a$.

En efecto, si el arco termina en el *segundo cuadrante* su *seno* es positivo y su *coseno* negativo, de modo que las expresiones de su *coseno verso*, *coverso* y *subcoverso* no cambiarán de forma, siendo, si llamamos $b$ el arco $\widehat{\text{ABF}}$:

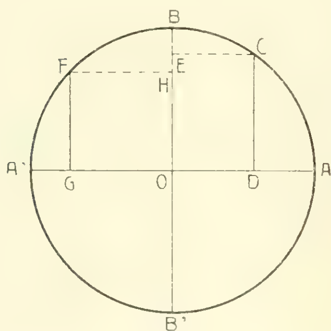


Fig. 11

$$\cos \text{ v. } b = 1 - \text{ sen } b \qquad (2')$$

$$\text{cov. } b = \frac{1 - \text{sen } b}{2} \qquad (4')$$

$$\text{subcov. } b = \frac{1 + \text{sen } b}{2} \qquad (6')$$

mientras que el *seno verso, verso* y *subverso* en que entra el coseno, cambiarán de signo; mas si admitimos, como es necesario, que el *coseno,* etc., es una cantidad algebraica, podemos escribir aquellas funciones de modo que se respete la forma primitiva y se exprese el verdadero valor que asumen en el nuevo supuesto.

Así, el

$$\text{sen v. } b = \text{AG} = \text{AO} + \text{OG} = \text{AO} - (-\text{OG}) = 1 - (-\cos b);$$

$$\text{sen v. } b = 1(-)(-\cos b) \qquad (1')$$

Es claro que,

$$\text{vers. } b = \frac{1}{2}(\text{AO} + \text{OG}) = \frac{1 - (-\cos b)}{2};$$

$$\text{subv. } b = \frac{A'G}{2} = \frac{A'O - OG}{2} = \frac{A'O + (-OG)}{2} =$$

$$= \frac{1 - (\cos b)}{2} = \frac{1 + (-\cos b)}{2}$$

Con razonamientos semejantes se probaría la validez de las fórmulas para arcos terminados en el tercero ó cuarto cuadrante, etc.

26. Las doce ecuaciones distintas y compatibles que cifran las relaciones entre las líneas trigonométricas de un mismo arco, y el radio supuesto $=1$, sirven para resolver el problema de: *Dada una función circular, hallar en términos de ella todas las demás.*

Nos limitaremos á expresar las líneas versas en función de la tangente, como ejercicio.

Recordemos que

$$\text{sen } a = \frac{\text{tg } a}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}, \qquad \cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}$$

y por tanto:

$$\text{sen v. } a = 1 - \cos a = 1 - \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}};$$

$$\cos \text{v. } a = 1 - \text{sen } a = 1 - \frac{\text{tg } a}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}.$$

$$\text{ver. } a = \frac{1}{2}(1 - \cos a) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}\right];$$

$$\text{cov. } a = \frac{1}{2}\cos \text{v. } a = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\text{tg } a}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}\right].$$

$$\text{subv. } a = \frac{1+\cos a}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}\right);$$

$$\text{subcov. } a = \frac{1}{2}(1 + \text{sen } a) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\text{tg } a}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}\right].$$

Si el arco $a$ es conocido, no hay ambigüedad en los valores de las líneas versas correspondientes, así como tampoco la habrá, si se conoce el cuadrante en que termina el arco; pero si sólo se conoce su tangente, cada función versa corresponderá á dos arcos, el $a$ y el $180° + a$.

27. *Restablecimiento del radio en las fórmulas.* — Es práctica corriente calcular las fórmulas en que intervienen las funciones circulares por medio de sus logaritmos. Hay tablas que asignan al logaritmo de la función circular, *seno, coseno, tangente, seno verso, subverso,* ... etc.,

su verdadero valor, evitando los logaritmos completamente negativos, que serían incómodos, por otros iguales de característica negativa y mantisa positiva; pero otras muchas tablas evitan hasta estos últimos logaritmos, haciendo el radio igual á $10^{10}$ partes. Como las fórmulas que hemos visto hasta ahora se han hallado en el supuesto de ser el radio, *uno,* debemos ver en qué se convertirían si el radio del círculo á que se refieren es R. Este problema se llama *restablecimiento del radio,* y como es sabido, basta para ello dividir la función por R (cada una de las que entren en la fórmula) ó, más sencillamente, hacer la fórmula homogénea.

Verificándolo así, obtenemos, para las funciones versas:

$$\text{sen v. } a = \text{R}(-)\cos a \tag{1}$$

$$\cos \text{v. } a = \text{R}(-)\text{sen } a \tag{2}$$

$$\text{vers. } a = \frac{\text{R}(-)\cos a}{2} \tag{3}$$

$$\text{cov. } a = \frac{\text{R}(-)\text{sen } a}{2} \tag{4}$$

$$\text{subv. } a = \frac{\text{R}(+)\cos a}{2} \tag{5}$$

$$\text{subcov. } a = \frac{\text{R}(+)\text{sen } a}{2} \tag{6}$$

### § 8. *Valores de las funciones versas de algunos arcos particulares*

28. *Arco* de 0 .

$$\text{sen}\,0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \text{sen v.}\,0^\circ = 1 - \cos 0^\circ = 1 - 1 = 0, \quad \text{vers.}\,0^\circ = 0$$

$$\text{cosen. v. } 0^\circ = 1 - \text{sen } 0^\circ = 1 - 0 = 1; \qquad \text{cov. } 0^\circ = \frac{1}{2}\cos \text{v. } 0^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{subv. } 0^\circ = \frac{1 + \cos 0^\circ}{2} = \frac{1+1}{2} = 1;$$

$$\text{subcov. } 0^\circ = \frac{1 + \text{sen } 0^\circ}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

29. *Arco* de 30°.

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{1}{2}\text{ cuerda de } 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{sen v. } 30° = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}; \qquad \text{cos v. } 30° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{vers. } 30° = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right]; \qquad \text{cov. } 30° = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{subv. } 30° = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}; \qquad \text{subcov. } 30° = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

30. *Arco* de 45°.

$$\text{sen } 45° = \text{cos } 45° = \frac{1}{2} \text{ cuerda de } 90° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{sen v. } 45° = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}; \qquad \text{cos v. } 45° = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{vers. } 45° = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \qquad \text{cov. } 45° = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{subv. } 45° = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}; \text{subcov. } 45° = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

31. *Arco* de 60.

$$\text{sen } 60° = \frac{1}{2} \text{ cuerda de } 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \text{cos } 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen v. } 60° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \qquad \text{cos v. } 60° = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{vers. } 60° = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4}; \qquad \text{cov. } 60° = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{subv. } 60° = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 + 1}{4} = \frac{3}{4}; \qquad \text{subcov. } 60° = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

32. *Arco* de 90 .

$$\text{sen } 90° = 1, \qquad \text{cos } 90° = 0$$

$$\text{sen v. } 90° = 1 - \text{cos } 90° = 1 - 0 = 1, \qquad \text{cos v. } 90° = 1 - 1 = 0$$

$$\text{ver. } 90° = \frac{1}{2} \qquad \text{cov. } 90° = 0$$

$$\text{subv. } 90° = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}; \qquad \text{subcov. } 90° = \frac{1 + 1}{2}\frac{2}{2} = 1.$$

33. *Arco* de 120°.

$$\text{sen } 120° = \cos(-30°) = \cos 30° = \text{sen } 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 120° = \text{sen}(-30°) = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen v. } 120° = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$\cos \text{ v. } 120° = 1 - \left(+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ver. } 120° = \frac{3}{4} \qquad \text{cov. } 120° = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{subv. } 120° = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}; \qquad \text{subcov. } 120° = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

34. *Arco* de 135°.

$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45°; \qquad \cos 135° = -\cos 45° = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{sen v. } 135° = 1 - \cos 135° = 1 - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \text{ v. } 135° = 1 - \text{sen } 135° = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{vers. } 135° = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \qquad \text{cov. } 135° = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{subv. } 135° = \frac{1+\cos 135°}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{subcov. } 135° = \frac{1+\text{sen } 135°}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

35. *Arco* de 150°.

$$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}; \qquad \cos 150° = -\text{sen } 60° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{sen v. } 150° = 1 - \cos 150° = 1 - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos \text{ v. } 150° = 1 - \text{sen } 150° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{vers. } 150 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}; \qquad \text{cov. } 150^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\text{subv. } 150 = \frac{1+\cos 150^\circ}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4};$$

$$\text{subcov. } 150^\circ = \frac{1+\text{sen } 150^\circ}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

36. *Arco* de 180°.

$$\text{sen } 180^\circ = 0; \qquad \cos 180^\circ = -1$$

$$\text{sen v. } 180^\circ = 1 - \cos 180^\circ = 2; \qquad \cos \text{ v. } 180^\circ = 1 - \text{sen } 180^\circ = 1$$

$$\text{vers. } 180^\circ = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{cov. } 180^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{subv. } 180^\circ = \frac{1+\cos 180^\circ}{2} = \frac{1-1}{2} = 0;$$

$$\text{subcov. } 180^\circ = \frac{1+\text{sen } 180^\circ}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

*Arco* de 270°.

$$\text{sen } 270^\circ = -1. \qquad \cos 270^\circ = 0$$

$$\text{sen v. } 270^\circ = 1 - \cos 270^\circ = 1;$$

$$\text{cosen v. } 270 = 1 - \text{sen } 270^\circ = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{vers. } 270^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{cov. } 270^\circ = 1$$

$$\text{subv. } 270^\circ = \frac{1+\cos 270^\circ}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{subcov. } 270^\circ = \frac{1+\text{sen } 270^\circ}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

38. *Arco* de 360°.

$$\text{sen } 360^\circ = 0 \qquad \cos 360^\circ = 1$$

$$\text{sen v. } 360^\circ = 1 - \cos 360^\circ = 1 - 1 = 0;$$

$$\cos \text{ v. } 360^\circ = 1 - \text{sen } 360^\circ = 1 - 0 = 1$$

$$\text{ver. } 360^\circ = 0 \qquad \text{cov. } 360^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{subv. } 360^\circ = \frac{1+\cos 360^\circ}{2} = \frac{1+1}{2} = 1;$$

$$\text{subcov. } 360^\circ = \frac{1 + \text{sen } 360^\circ}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como se sabe calcular los senos y cosenos de otros varios arcos intermedios, no habría dificultad en hallar las funciones versas correspondientes á esos nuevos arcos.

### § 9. *Otras relaciones entre las funciones versas y las comunes*

39. Hemos visto que la expresión general del *seno verso* de un arco ó ángulo A, es

$$\text{sen v. } A = 1 - \cos A \qquad (a)$$

Pero la trigonometría enseña que

$$1 - \cos A = 2 \,\text{sen}^2 \frac{1}{2} A \qquad (b)$$

luego

$$\text{sen v. } A = 2 \,\text{sen}^2 \frac{1}{2} A \qquad (1)$$

y como

$$\text{ver. } A = \frac{1}{2} \text{sen v. } A,$$

será también,

$$\text{ver. } A = \text{sen}^2 \frac{1}{2} A \qquad (2)$$

Sabemos asimismo que

$$\cos \text{v. } A = 1 - \text{sen } A \qquad (c)$$

y como

$$\text{sen } A = \cos (90^\circ - A)$$

será:

$$\cos \text{v. } A = 1 - \cos (90^\circ - A). \qquad (d)$$

Si aquí aplicamos la fórmula (*b*) se tendrá sucesivamente:

$$\cos \text{v. } A = 2 \,\text{sen}^2 \frac{1}{2} (90^\circ - A) = 2 \,\text{sen}^2 \left[ 45^\circ - \frac{A}{2} \right]. \qquad (3)$$

De aquí sacamos que

$$\text{cov. } A = \text{sen}^2 \left[ 45^\circ - \frac{A}{2} \right]. \qquad (4)$$

Se vió también que

$$\text{subv. } A = \frac{1 + \cos A}{2} \qquad (d)$$

y como la goniometría prueba que

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A, \qquad (e)$$

se obtiene de estas dos expresiones

$$\text{subv. } A = \cos^2 . \frac{1}{2} A. \qquad (5)$$

*(Continuará.)*

SUR LA

# PROSPALANGIA PLATENSIS (N. GEN., N. SP.) (HYMÉN.)

ET SA BIOLOGIE

PAR JEAN BRÈTHES

---

La découverte de la biologie d'un animal, si minime soit-il, est toujours d'une grande utilité. Parfois elle fixe sur la biologie d'un groupe entier, parfois moins, mais en tout cas elle permet d'en déduire l'importance économique de cet animal.

Ç'a donc été avec une vive satisfaction qu'ayant observé des hyménoptères voleter autour d'un amas de fumier et ayant soupçonné leur parasitisme, je recueillis un certain nombre de pupes de Diptères dont j'espérais obtenir des hyménoptères : mes soupçons et espérances n'ont pas été déçus.

Il m'a été ainsi donné de recueillir quelques dizaines de cet hyménoptère, soit à l'état parfait, soit à l'état de nymphe ou de larve.

Dès le premier abord je crus avoir à faire avec un *Proctotrypidae,* car l'aiguillon paraît bien sortir de l'extrémité de l'abdomen. Mais il ne pouvait s'agir de cette famille, car le pronotum est loin de toucher les écailles alaires.

Il m'a fallu rechercher la place qui correspond à cet animal dans les *Chalcididae* dont l'aiguillon saillit de l'abdomen a une plus ou moins grande distance de l'extrémité. Mais on sera bien obligé de reconnaître que cette « plus ou moins grande distance » est parfois bien minime, et qu'en réalité la nature, dans son infinie variété, enlace les types les plus éloignés par des échelons insensibles, en sorte qu'il n'y a pas à proprement parler de hyatus entre les êtres créés.

Dans les *Chalcididae,* ce nouvel hyménoptère vient se placer entre les *Pteromalinae,* tribu des *Spalangiini,* étant le genre *Spalangia* celui à côté duquel ce nouveau genre vient se placer : j'appellerai le nouveau genre *Prospalangia* dont voici la caractéristique :

*Caput oblongum. Mandibulae bidentatae. Palpi bi-articulati (maxillares et labiales). Antennae prope orem sitae, 10-articulatae. Oculi pilosi. Pronotum mesonoto angustius. Abdomen petiolatum. Alae vena subcostali marginali duplo longiore, postmarginali brevissima, stigmali capitata, brevi. Pedes femoribus tibiisque subclavatis, unguibus inermibus, calcaribus 1, 0, 1.*

Type : *P. platensis* Brèthes. La *Spalangia tarsalis* Brèthes doit appartenir aussi à ce genre.

**Prospalangia platensis** Brèthes, n. sp.

♀ *Nigra, paulum viridi-nitens, alis tantulum infumatis, protarsis modice brunneis vix testaceis. Long. corp. : 3-3,5 mm.*

♀ La tête est aussi longue que large (paraissant plus longue), avec des points ombiliqués pilifères assez épais sur le front, plus denses

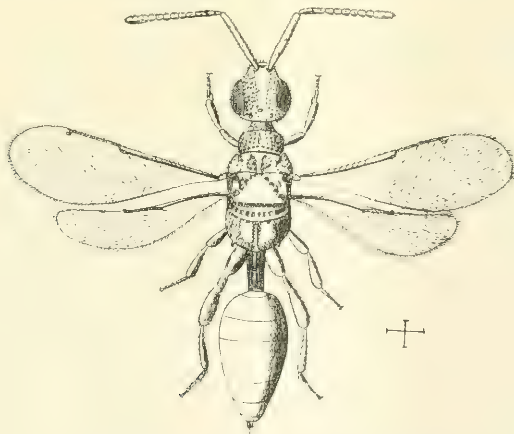


Fig. 1. — *Prospalangia platensis,* augmentée ± 12 diamètres
La croix d'à côté indique la grandeur naturelle

vers les joues, vers la base des antennes et vers le vertex. Un espace triangulaire lisse dont la base est le bord oral et où il est cependant strié transversalement. Le labre a une impression transversale mé-

diane. Les mandibules sont bidentées à l'extrémité. Les antennes situées au bord oral ont 10 articles dont les dimensions sont : 500, 100, 220, 160, 160, 140, 130, 140, 145 et 270 microns. Tous les articles sont cylindriques, à peu près d'égale grosseur avec des poils rai-



Fig. 2. — Tête et antenne gauche de *P. platensis* ♂



Fig. 3. — Parties buccales de *P. platensis*, très augmentées

des obliques et d'autres plus fins arqués dans le sens de la longueur des articles antennaires. Les yeux sont pileux et occupent le bord supéro-latéral de la tête. Le thorax est cylindrique avec le pronotum en forme de collier avec un rebord aigu à son bord antérieur ; sa surface présente des points ombiliqués avec une impression longitudinale en son milieu ; le mésonotum a ses angles latéro-antérieurs légèrement avancés au niveau du pronotum avec des points ombiliqués en deux groupes médians qui laissent une ligne longitudinale lisse ; puis vers les bords ces points sont progressivement plus nombreux. L'écusson est plus long que le mésonotum, transverse, lisse avec deux lignes en Λ qui, du bord postérieur médian du mésonotum, se dirigent vers la base des ailes postérieures. Le bord postérieur de l'écusson a une ligne de fovéoles ; suivent deux autres lignes de fovéoles et parallèles avec celle-là. Le segment médiaire a une épine postérieure de chaque côté et sa surface est densément marquée de points ombiliqués, moins son bord basal lisse qui est divisé par une double file longitudinale de fovéoles. L'abdomen est manifestement pédonculé. Le pédoncule est prismatique, marqué de plusieurs carènes longitudinales avec les interspaces fovéolés. Le reste de l'abdomen est parfaitement lisse, piriforme, légèrement déprimé.

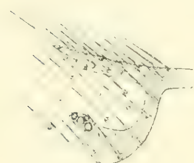


Fig. 4. — Veine stigmale et régions voisines de *P. platensis*.

Les ailes ont la veine sous-costale qui mesure 540 microns, la marginale 260, la postmarginale à peine 20 et la stigmate environ 30 microns. Aux ailes inférieures la veine sous-costale mesure 360 microns et la marginale 200 microns environ.

Les pieds sont normaux, *monotroches,* les fémurs et les tibias un peu claviformes, les éperons antérieurs simples, les intermédiaires remplacés par un cil et les postérieurs également simples. Les ongles sont simples.

♂ Le mâle est semblable à la femelle, s'en distinguant cependant par ses dimensions un peu moindres, et surtout par le premier article du funicule qui est de moitié plus court que dans l'autre sexe.

J'ai trouvé cette curieuse guêpe parasite des pupes de Diptères, soit *Musca domestica* L., soit *Stomoxys calcitrans,* etc., à Général Urquiza, près de Buenos Aires.

## BIOLOGIE DE « PROSPALANGIA PLATENSIS »

Comme je viens de le dire, cette guêpe vit comme parasite des pupes de Diptères.

*Larve.* — La larve (fig. 5) est blanche et se trouve — dans tous les



Fig. 5. — Larve de *P. platensis* du côté ventral



Fig. 6. — Bouche et régions voisines de la larve de *P. platensis*

cas que j'ai observé — non dans l'intérieur de la chrysalide du diptère, sinon sur celle-ci, protégée qu'elle est par l'enveloppe pupale. La figure 7 donnera une idée exacte de la position de la larve de l'hyménoptère. Cette larve est du type ordinaire des larves des hyménoptères et peut atteindre jusqu'à près de 5 millimètres de longueur. En général elle est très déprimée, devant se contenter du maigre espace que peut lui laisser la chrysalide du diptère dans son enveloppe pupale. A mesure cependant qu'elle se fait de l'espace en absorbant le diptère, elle devient de plus en plus rondelette. Sur les bords latéraux de son corps on voit onze verrues bien saillantes qui ne sont autres que les stigmates respiratoires. L'appareil buccal consiste surtout en deux mandibules soutenues par un cadre chitinisé que j'ai représenté par

des hachures (fig. 6). Sur le bord des lèvres supérieure et inférieure on voit quelques papilles peu perceptibles.

*Nymphe* (fig. 7 et 8). — La nymphose a lieu dans la même dépouille

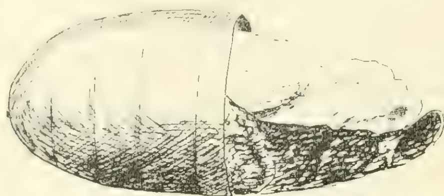


Fig. 7. — Pour montrer la position de la nymphe (ainsi que de la larve) de *Prospalangia platensis* dans la pupe de la mouche

pupale où a vécu la larve. Donc point d'émigration et inutilité du cocon dont s'enveloppent plusieurs hyménoptères. Le produit de la digestion larvaire est rejeté en arrière en une grosse (relativement bien entendu) bourse désormais inutile. D'ailleurs dans la majorité des cas, la larve du *Prospalangia* n'a point fini la ration qui lui était servie. La figure 7 donnera une idée de la position de la nymphe et des restes fripés de la chrysalide du diptère. Au commencement blanche, la nymphe s'assombrit ensuite progressivement : d'abord ce sont les yeux, les ocelles, les fémurs, le pédoncule abdominal, puis les pattes, les premiers tergites et sternites de l'abdomen, les sutures thoraciques, etc. Sur l'enveloppe nymphale on distingue du côté dorsal de petites verrues qui paraissent être au nombre de quatre sur plusieurs des tergites de l'abdomen.

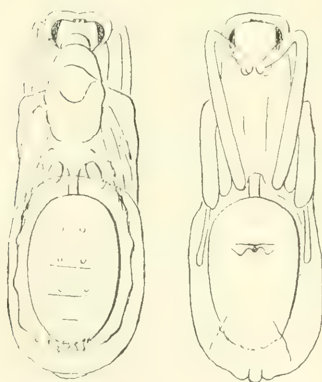


Fig. 8. — Nymphe de *P. platensis* vue du dos à gauche, vue en dessous à droite.

Eveillée mon attention sur le parasitisme de cette guêpe, j'ai recueilli plusieurs pupes de Diptères que j'ai déposées dans un flacon sur un lit de sable humide et à leur tour recouvertes d'une couche d'un demicentimètre de sable. Les premières guêpes qui sont nées se sont mises bientôt à la besogne. Elles se chargent elles-mêmes de creuser le sable pour atteindre les pupes. Je crois donc que cette guêpe n'est point parasite des larves de diptères sinon de leurs

pupes; d'ailleurs les larves diptères, par leurs mouvements musculeux, se soustrairaient rapidement je crois à l'aiguillon du chasseur.

Comme un seul parasite de *Prospalangia* se développe dans chaque pupe de diptère, je n'osais d'abord croire à la valeur réellement économique de son parasitisme.

Cependant les faits se sont chargés de me renseigner à son sujet.

Je recueillis donc une certaine quantité de pupes de diptères que je laissai huit jours dans un bocal de sable humide comme je l'ai indiqué précédemment.

Au bout de ces 8 jours, 10 hyménoptères parfaits étaient sortis, tandis que deux diptères (les deux étaient *Stomoxys calcitrans)* seulement avaient éclos. Je croyais qu'en attendant davantage, les résultats seraient plus ou moins proportionnels; je voulus cependant reconnaître en quel état restaient les pupes non développées.

J'y trouvai 16 pupes avec *Prospalangia* à l'état de nymphe, 3 pupes avec *Prospalangia* dont la larve était morte, 8 pupes où les diptères étaient sains et seraient probablement venus à bout, 6 pupes avec Diptères morts et 3 pupes où la putréfaction ne permettait pas de décider si cet état était dû au parasitisme ou à d'autres causes.

Bref il y avait :

10 pupes d'où étaient sorties les *Prospalangia*.

16 pupes avec *Prospalangia* en nymphe.

3 pupes avec *Prospalangia* en nymphe morte.

2 pupes d'où étaient sortis les diptères.

8 pupes avec diptères à développement normal.

6 pupes avec diptères morts.

3 pupes à contenu informe.

Il y avait donc 29 pupes parasitées sur 48, ce qui donne un pourcentage assez élevé de 60 pour cent environ. Cependant si nous remarquons que durant la nymphose des insectes, il y en a toujours un certain nombre qui meurent et que par conséquent sur cent pupes de diptères nous pouvons *a priori* établir qu'il n'en viendra point cent diptères, il nous est permis dans le cas actuel d'établir que 29 pupes ont été parasitées sur un total de 39 qui sans le fait du parasitisme auraient parfait leur développement. Dans ce cas-ci, le pourcentage du parasitisme de *Prospalangia* s'élève à 74 pour cent.

Certes nous arrivons à un résultat que nous étions loin de soupçonner.

Si nos maisons pendant l'été se trouvent envahies par des nuées de mouches, d'autant plus à craindre que nous ignorons les microbes

qu'elles transportent dans leurs pattes et leur trompe, quelles nuées autrement importantes nous devrions souffrir sans l'action bienfaisante de la *Prospalangia platensis* qui en a fait disparaître les trois quarts !

Il y aurait peut-être lieu de tenter des efforts pour la multiplication de cette guêpe bienfaisante; les travaux du Bureau d'entomologie des États-Unis pourraient servir de guide à ce sujet.

# BIBLIOGRAFÍA

**Lecciones de geometría descriptiva**, arregladas a los programas de las escuelas industriales de la Nación y de las escuelas normales nacionales, por VIRGILIO RAFFINETTI, profesor diplomado de enseñanza secundaria, catedrático en la Universidad nacional de La Plata. *Proyecciones de Monge.* Parte I. Buenos Aires. Imprenta de Coni Hermanos. 1915.

El injeniero Virgilio Raffinetti nos presenta en este volumen, de 216 páginas i 13 amplias láminas fuera de testo, la primera parte de las lecciones de jeometría descritiva que dicta en la escuela industrial i en la normal de la Nación.

Su publicación está precedida de dos juicios favorables : el del profesor de igual materia en la Universidad de La Plata, injeniero Agustín Delgado, i el del decano de la Facultad de ciencias exactas, de la misma universidad, injeniero Nicolás Besio Moreno. Esto podría eximirnos de dar nuestra opinión al respecto; pero como es propio de nuestros *Anales* hacer conocer los esfuerzos intelectuales del profesorado nacional, único incentivo que en jeneral obtienen los que, sin más aliciente que las inefables satisfacciones del estudio, pasan al través del mercantilismo jeneral, teniendo por norte el cumplimiento del deber pedagógico i por finalidad contribuir al progreso de la cultura nacional, infundiendo en sus alumnos el fruto de sus desvelos intelectuales, cumplimos con el grato deber de esponer nuestro modesto dictamen respecto de esta interesante publicación científica.

Uno de los medios de facilitar al estudiante el aprovechamiento de las lecciones impartidas por su profesor, es precisamente la publicación de dicha enseñanza, evitando al alumno las pérdidas de tiempo que importa la consulta de obras, casi en absoluto estranjeras, i que, si en el fondo concuerdan con la enseñanza del profesor, en el método, en la forma, suelen discrepar i, consecuentemente, dificultar el estudio al escolar.

¡ Si lo sabremos nosotros que tuvimos que estudiar sin libros que — salvo raras escepciones — concordaran con las lecciones que recibíamos, especialmente del sabio doctor Speluzzi !

La sola publicación de sus lecciones importa ya para el injeniero Raffinetti un timbre de honor, que justifica el sincero aplauso de todos i el agradecimiento no

sólo de sus alumnos, sino que también los que rendimos culto al altruísmo, a la laboriosidad i al saber.

Pasemos a la obra.

El profesor Virgilio Raffinetti ha planeado su obra en esta forma :

I. Representación del punto, líneas i planos; II. Problemas sobre rectas i planos; III. Perpendicularidad e intersección de rectas i planos; IV. Ángulos de rectas i planos; V. Cambio de los planos de proyección; VI. Jiro de figuras; VII. Abatimiento de planos i figuras planas; VIII. Representación de poliedros: IX. Secciones planas de los poliedros; X. Curvas i tanjentes, superficies i planos tanjentes; XI. Superficies desarrollables i sus planos tanjentes.

Acompañan a las diversas secciones problemas i ejercicios, que tan útiles son para consolidar la comprensión teórica en los estudiantes.

Las trece planchas, que constituyen un pequeño atlas, contienen 101 figuras mui claras, a pesar de su trazo que pudo ser ventajosamente más sutil. Esta es una de las buenas condiciones que debe ofrecer una obra sobre jeometría descritiva, pues la materia, que en sí no reviste una gran dificultad científica, puede hacerse difícil por falta de claridad en los trazados. El alumno principiante, inesperto aún, se da pronto cuenta de la confusión de los dibujos hechos sin cuidado, que conducen indefectiblemente a resultados erróneos. Es lo mismo que pasa en los trazados de la grafostática.

En cuanto al método, el profesor Raffinetti lo establece : sigue el de las proyecciones de Monje el ilustre matemático que tuvo el talento de reunir en un cuerpo de doctrina el caudal disperso, fruto de tanto jeómetra, i enseñarlo en sus fundamentales lecciones, creando así la Jeometría descritiva; como más tarde otro sabio, el profesor Culmann, metodizó las construcciones gráficas de la composición i descomposición de las fuerzas, creando la estática gráfica, que tan grandes servicios presta a la mecánica aplicada.

Otro punto esencial en el profesor es la claridad en la esposición, la cual depende de una metódica progresión i de una prudente concisión, sin caer en el laconismo, causa de confusión para el alumno; pues ya de por sí, como dijimos, esta enseñanza obliga a largas esplicaciones i da lugar a nomenclaturas complicadas que, especialmente al principio, perturban la mente del estudiante. I esto en Raffinetti es una condición ingénita, que ya habíamos notado en sus otras publicaciones, i que hemos confirmado con la lectura de su trabajo.

Raffinetti se espresa bien, su estilo es atrayente porque se preocupa de pulirlo; dice lo necesario, sus demostraciones son claras, convincentes.

En cuanto al plan, nada podemos objetar, pues ha escrito un curso elemental, que encuadra en los límites establecidos por los programas de las escuelas industriales i normales, a las que va destinado, i que, a nuestro juicio, ha llenado cumplidamente. Con todo creemos deber reservar el juicio definitivo para cuando aparezca la segunda parte de sus lecciones, que no dudamos será, por su carácter de aplicación técnica, más interesante aun que esta primera, fundamental, destinada a impartir los conocimientos teóricos necesarios.

En resumen, opinamos que el injeniero Raffinetti ha hecho obra jenerosa al publicar sus lecciones i que con ella ratifica nuestra buena opinión sobre su clara inteligencia i su laboriosidad profesional.

Antes de concluír, tratándose de un intelectual como el profesor Virgilio Raffinetti que en sus producciones no sólo se preocupa del *fondo* — que es casi todo

— sino que también de la *forma*, que completa el todo, voi a hacer pocas observaciones, para él impertinentes, relativas a algunas voces técnicas que demanda esta ciencia.

La malhadada opinión de la Academia de la lengua, desconociendo que su verdadera misión lexicográfica está en determinar oportunamente i dar cabida en su diccionario, más que a las voces vulgares de todos conocidas, a las técnicas, científicas i artísticas, que con el continuo progreso de la sabiduría humana, debido en gran parte a los países de habla diversa a la española, surjen a la universal consideración de los estudiosos, es causa de que la lengua castellana se trasforme en una moderna babel.

En la jeometría descritiva, son pocas estas palabras : las limitaré en lo que hace a mi objeto a las dos siguientes : Monge, el fundador de esta nueva disciplina jeométrica, lláma *épure* el dibujo que resulta de *rebattre* el plano vertical de proyección sobre el horizontal, dando así las proyecciones horizontales i verticales en un solo plano, separadas por la línea de tierra, vale decir por la recta determinada por la intersección de ambos planos.

Pues bien, hemos visto en muchos, en casi todos los casos, españolizar el *épure*, que quiere decir *montea, diseño,* por *epurado,* que nada significa, o, peor aún, por *depurado,* que es un disparate garrafal, porque con el abatimiento nada se *depura : épure* corresponde a la voz *trazado,* voz castiza tanto más apropiada cuanto que la armazón jeométrica de las proyecciones es realmente cuestión de *trazas.* I aún, si se quiere, lo que sin embargo importa aplicar un nombre jenérico a un caso dado, puede llamarse *gráfico,* como usan algunos. Por otra parte, han vertido al castellano las voces *rabattre* i *rabattement*, por *rebatir* i *rebatimiento,* que implica *resistencia,* en vez de emplear las voces *abatir* i *abatimiento,* que indican acción i efecto de tumbar sobre un plano horizontal algo que estaba vertical, que es precisamente lo que ocurre con los planos de proyección.

El profesor Raffinetti, emplea la voz « rebatimiento », teniendo en su favor los mismos matemáticos peninsulares, que comúnmente la usan, por lo que seguramente quedará como voz técnica castellana, sin que por ello deje de ser irrazonable.

I basta.

Reciba el profesor V. Raffinetti nuestros sinceros parabienes, i prosiga en su misión de labor, que le granjeará cada vez más el aprecio de los intelectuales en jeneral i de sus amigos en particular.

S. E. Barabino.

**IV Congreso científico americano**, celebrado en Santiago de Chile del 25 de diciembre de 1908 al 5 de enero de 1909. *Reseña jeneral* de su organización, actos solemnes, resultados jenerales del congreso, visitas, escursiones, etc., por Eduardo Poirier, secretario jeneral del mismo. Santiago de Chile, 1915.

Acaba de distribuirse a los adherentes el último volumen de las publicaciones relativas a las actuaciones del memorable congreso científico que las naciones americanas celebraron fraternalmente en la simpática capital de la república trasandina, del 25 de diciembre de 1908 al 5 de enero de 1909, i que pone feliz término a la ardua, mui ardua labor realizada por el digno secretario jeneral de dicho congreso, doctor don Eduardo Poirier.

Veintitrés volúmenes constituyen el archivo científico de aquel certamen de

la intelectualidad de ambas Américas, correspondiendo un volumen con 15 trabajos a las matemáticas puras i aplicadas; dos volúmenes a las ciencias físico-químicas, con 22 i 28 trabajos respectivamente; tres volúmenes a las ciencias naturales antropolójicas i etnolójicas, con 40 trabajos; dos volúmenes a la injeniería, con 31 trabajos; dos volúmenes a las ciencias médicas e hijiene con 83 trabajos; un volumen a las ciencias jurídicas con 13 trabajos; cinco volúmenes a las ciencias sociales con 86 trabajos, más un volumen especial *Chile en 1908* del doctor Eduardo Poirier, obra de aliento de la que nos hemos ocupado oportunamente con alguna amplitud en *La Nación;* dos volúmenes a las ciencias pedagójicas i filosóficas con un apéndice, el himno al IV congreso científico, letra del mismo señor Poirier, música del maestro E. Soro; i dos volúmenes a la agronomía i zootecnia, con 48 trabajos. En total, *450 trabajos.* Por último, un volumen de *Reseña jeneral,* índice de la labor acumulada en este congreso, su organización, actos solemnes, resultados jenerales del congreso, visitas, escursiones, etc.

Creemos escusado manifestar que la contribución científica arjentina ha hecho honor a nuestro país en jeneral i a nuestros estudiosos en particular, como caballerescamente lo han reconocido los demás congresales, especialmente los chilenos, quienes no se concretaron a tomar en cuenta nuestra mentalidad nacional, sino que nos colmaron de amistosas atenciones, inolvidables para los delegados arjentinos que tuvimos la suerte de asistir, a las que se agregaron las de la sociedad i del gobierno de la progresista república hermana.

Ahora bien, creemos innecesario repetir lo que otrora dijimos respecto de estos certámenes internacionales, en los cuales los doctos de los países interventores se comunican amistosamente sus vistas científicas, fundadas en el estudio i la esperimentación, a la vez que crean vínculos sociales que contribuyen a fundamentar el recíproco aprecio, base de una fraternidad internacional sincera i provechosa; i lo creemos innecesario por cuanto hoi el hecho constituye un axioma social.

En el Congreso científico americano celebrado en Chile, como en el del centenario realizado en Buenos Aires en 1910, ha quedado cimentada por lo menos una cosa: que los países de la américa hispana van avanzando con brío en la anchurosa vía de los conocimientos humanos, precedidos por la poderosa hermana del norte, cuyos hombres más eminentes así lo han reconocido con honrada franqueza, alentándolos a perseverar e intensificar el culto del libro i las esperimentaciones del laboratorio.

Los 24 grandes volúmenes publicados por la secretaría del IV Congreso científico americano constituyen una verdadera enciclopedia científica sobre los problemas de mayor importancia práctica en los países interventores, escrita por un grupo numeroso de sus respectivos hombres de ciencia. Los naturalistas con su tesis sobre la jea, la flora, la fauna, la paleontolojía i antropolojía americanas; los arqueólogos con el folklore, los restos del arte indíjena; los injenieros con la técnica de la ciencia de las construcciones civiles, hidráulicas i mecánicas; los médicos con el estudio de los morbos humanos, de su terapéutica i de su profilaxis hijiénica; los agrónomos con el análisis de los diversos productos de la agricultura americana, su cultivo, su cosecha i sus aplicaciones a la alimentación o a la industria; en fin, todas las ramas de la mentalidad humana tienen su figuración en esta biblioteca de trabajos americanos.

Al mérito intrínseco de la publicación debemos agregar el esfuerzo de labor personal, realmente plausible del doctor Poirier i de sus colaboradores, pues en sólo cinco años han editado 24 volúmenes con cerca de 10.000 pájinas de composición nutrida i exornadas con numerosas láminas, planos, cuadros, retratos, etc.

Al felicitar a los promotores, organizadores i realizadores del IV Congreso latino americano, corresponde también rendir el debido homenaje al gobierno chileno, el cual, no sólo patrocinó moral i materialmente tan lucido certamen, sino que también proveyó sin tacañería los fondos requeridos para que, sin pérdida de tiempo, se cumpliera el compromiso contraído con los señores adherentes, de publicar i remitirles los trabajos presentados al mismo, como es de práctica en todos los congresos celebrados por las naciones cultas.

La nación chilena ha invertido en este certamen la suma de 569.327,78 pesos, de los cuales 329.000 destinados a la publicación de los trabajos presentados al mismo.

Acto mui digno de ser imitado por los demás gobiernos.

S. E. Barabino.

**Anuario del Instituto geográfico militar**, tercer volumen, correspondiente al año 1914. Buenos Aires. Talleres gráficos del mismo Instituto.

En un grueso volumen, formato mayor, de 275 pájinas, exornado con 23 fototipias relativas a los puntos trigonométricos i señales; ocho láminas relativas a los trabajos jeodésicos realizados por el Instituto jeográfico en la República, hasta fines de 1914; a los reconocimientos previos de la triangulación de primero i segundo orden en la provincia de Santa Fe; a la nivelación de precisión de la misma provincia; al *punto fijo* altimétrico en la estación Ceres del Ferrocarril central arjentino; a las triangulaciones de primero, segundo, tercero i cuarto orden del territorio del Neuquén; a la *base* jeodésica establecida en Mar del Plata; al plano de levantamiento realizado en el sur de la provincia de Corrientes; al plano del levantamiento con la plancheta en varios puntos de la República; al mapa demostrativo de los trabajos de triangulación i levantamiento de la capital i sus alrededores; i, además, con once tablas de elementos jeodésicos definitivos, referentes a catorce lonjitudes determinadas en los años 1907-1908, en el litoral arjentino. También ilustran este volumen cuatro mui interesantes mapas indicando los grandes trabajos jeodésicos realizados en la Rusia europea i asiática.

Teníamos una deuda pendiente con el Instituto jeográfico militar, pues por razones inútil ya de esponer, pero entre las cuales figuraba la de haber declinado la dirección de estos *Anales*, no nos ocupamos, como lo prometimos, de los anuarios publicados por nuestra laboriosa repartición jeográfico militar.

Lo hacemos hoi, con doble motivo, puesto que acabamos de recibir el tercer volumen del *Anuario* de dicho instituto, correspondiente al año 1914.

Pero, ante todo, perdónesenos una corta digresión que, sin embargo, no creemos fuera de lugar.

El arduo problema de alta jeodesia que importan la triangulación i nivelación de precisión de toda la República, no es de aquellos que pueden realizarse en poco tiempo, ni con deficiencia de personal, ni escasez de dinero.

Necesita del apoyo del gobierno de la Nación, moral i material, vale decir, que se le provea los medios necesarios para la ejecución de un plan completo de triangulación del país, tanto en personal científico, como en instrumentos de precisión, estaciones jeodésicas, material de señales, oficinas gráficas, etc., etc.

El Instituto jeográfico militar dispone de buenos elementos, pero escasos, tanto en personal como en útiles, i tendrá que emplear mucho tiempo para poder completar la red trigonométrica del país, aun limitándola a los triángulos máximos, dejando para más tarde la determinación de los de segundo, tercero i cuarto orden, tanto más si se tiene en cuenta la enorme estensión de la República, la distancia que aun separa las poblaciones i la ninguna ayuda que éstas, en jeneral, es decir, salvo los centros urbanos, pueden ofrecer a las comisiones técnicas para el desempeño de su misión científica.

I, sin embargo, esta operación jeodésica, que nosotros mismos proponíamos ya en 1888 (1), por la dificultad que hallábamos para correlacionar los diversos trabajos de hidrografía fluvial i marítima, los trazados ferroviarios, las posiciones jeográficas planialtimétricas de las diversas construcciones realizadas o por realizar; esta operación, decíamos, es de capital importancia para el país, no sólo para el estudio de las obras públicas, especialmente viales, sino que también para el conocimiento de sus cuencas hidrográficas, de su hipsometría i distancia de puntos de importancia, datos éstos de capital interés para los planes militares del Estado.

Por otra parte, apoyando en las proyecciones jeográficas ó corográficas, que importan una planimetría de precisión, las simplemente topográficas, locales, detalladas ó espeditas, no es necesario demostrar, por obvio, la ventaja de la mayor exactitud del levantamiento de *relleno* que ellas constituyen, dando así una fisiografía del terreno levantado, con referencias precisas i sin acumulación de errores.

Agréguese la inmensa ventaja que ofrece para la división parcelaria del país, con puntos i orientaciones fijos, que asegure a los propietarios de tierras la exacta situación de sus fundos, invariablemente deslindados, i se verá que la red triangular importa la normalización de la división territorial, que hasta hoi se presenta enredada con superposiciones, falsos rumbos, áreas erradas, por exceso o defecto, lo que constituye un semillero de pleitos, de que dan fe los archivos de nuestros tribunales.

Uno de los casos más sujerentes de la ventaja que reportarían las provincias i, por ende, la Nación, si una triangulación i nivelación de precisión cubriera su vasta estensión, nos la ofrece la mayor provincia arjentina. Si Buenos Aires poseyera su correspondiente red trigonométrica de primero a cuarto orden i la nivelación correspondiente, el problema de las inundaciones ofrecería una más fácil i razonable solución.

Los trabajos de nivelación realizados allí carecen de exactitud i homojeneidad, no sólo porque en no pocas casas ha actuado un personal incompetente, sino que también, porque no hubo un plan preconcebidamente uniforme basado en observaciones astronómicas, de alta jeodesia, que pudiera limitar los errores, i permitir hallarlos i correjirlos.

(1) Véase *Memoria del departamento de Obras públicas de la Nación*. 1888. Sección *Obras hidráulicas*.

I a propósito, creo escusado manifestar que ese gravísimo problema agrario bonaerense no será resuelto — pese a algunos seudos especialistas — sin ese requisito previo, la triangulación, la nivelación i la planimetría de precisión, amén del conocimiento hidrográfico i jeolójico de las respectivas cuencas.

Pero ya es hora de volver al *Anuario.*

El tercer volumen de esta publicación del Instituto jeográfico, del que vamos a ocuparnos someramente, comprende :

1. *Los trabajos del Instituto jeográfico militar,* reseña hecha por el jefe del mismo, coronel Benjamín García Aparicio.

2. *Resultados definitivos* de 14 lonjitudes determinadas en 1907 i 1908 en el litoral arjentino, por el jefe de la sección *Jeodesia,* doctor W. Schulz.

3. Coordenadas jeográficas de algunos puntos del litoral norte de la República.

4. *La segunda conferencia internacional del mapa del mundo al* $\frac{1}{1.000.000}$, por el coronel B. García Aparicio, de la que nos ocupamos por separado.

5. *Cartografía estranjera,* Rusia. Memoria estractada de los trabajos orijinales del estado mayor ruso i del *Anuario Zapiski,* por el coronel B. García Aparicio i el capitán honorario W. von Stecher, trabajo de real importancia técnica por la estensión territorial, que abarca climas mui diversos i ofrece accidentes jeográficos variadísimos, obligando a emplear métodos especiales que pueden constituír una guía para los demás jeodestas en circunstancias análogas.

6. *Institutos jeográficos europeos.* Datos de la organización de los trabajos topográficos militares en los estados europeos, por Vicente Haardt von Hartenthurn, que fué consejero real e imperial en el Instituto jeográfico militar de Viena, i ha poco fallecido.

Estudia la organización de estas reparticiones en Alemania, Austria, Béljica, Bulgaria, Dinamarca, España, Francia, Grecia, Inglaterra, Italia, Montenegro, Países Bajos, Portugal, Rusia, Rumania, Suecia, Noruega, Suiza, Servia i Turquía.

Inútil nos parece indicar la importancia de estos estudios que permiten comparar, juzgar i, por ende, planear convenientemente las bases más racionales para las instituciones conjéneres en cada país.

7. *Transcriciones : Del Landesaufnahme de la República Arjentina,* por el doctor Gast, traducción con preámbulo del doctor Shulz.

8. *Información : La comisión de la carta de la República,* por W. S.

9. *La Sociedad de jeografía de Madrid :* Antecedentes sobre su fundación i actuación hasta la fecha.

De paso, bueno es hacer constar que dicha Sociedad nombró socio honorario correspondiente al señor coronel B. García Aparicio, con fecha 8 de junio del año pasado, en premio de los servicios por él prestados a la ciencia jeográfica.

10. *Bibliografía :* Obras recibidas. Canje.

11. *Biblioteca i mapoteca históricojeográficas de la República Arjentina.*

12. *Publicaciones del Instituto jeográfico militar.*

Se deduce de esta memoria, por lo que respecta a trabajos prácticos, efectuados en el país durante el año 1914, que la superficie provista de puntos trigonométricos de primero a cuarto orden es de 23.400 kilómetros cuadrados, i que el reconocimiento trigonométrico abarca 48.000 kilómetros cuadrados.

Lo que no es poco decir. Sin embargo, ¡ cuánta labor tiene aún por delante el Instituto, para cubrir los cerca de 3.000.000 de kilómetros cuadrados que constituyen la Nación !

Pero es el caso de aplicar el aforismo vulgar de « que poco a poco se hizo el mundo ».

Para andar más lijero se requiriría un personal técnico superlativamente más numeroso i recursos pecuniarios que el Instituto jeográfico militar no posee ; i, peor aún, que hoi por hoi el país no puede proveerle sino en parte.

El año 1914 ha sido mui desfavorable para los trabajos de este jénero, pues las lluvias i los vendavales, fueron frecuentes i violentos, i todos sabemos qué importancia capital tiene sobre las operaciones jeodésicas el estado meteorolójico de la zona que se estudia.

A pesar de ello el Instituto ha proseguido los reconocimientos trigonométricos, la construcción de señales, las nivelacionos de precisión, la medición de ángulos i la colocación de pernos de bronce en los puntos trigonométricos.

Para los trabajos acordados entre la comisión hidrográfica de marina de guerra i el Instituto se midió una *base* en Mar del Plata i se estableció una estación astronómica.

La base mide 16.191$^{m}$8, con una precisión de 1 : 3.170.000, o sea de ± 5$^{mm}$1 para toda la línea; tiene su estremidad E. a 300 metros del mar i dista 15 kilómetros de la ciudad, hacia el NW. Cada estremo de la base ha sido fijado mediante pilares de mampostería. En el de W. se estableció la estación astronómica.

El Instituto terminó también en este año la red de triángulos que liga a Monte Caseros con Posadas, en una estensión de 400 kilómetros ; hizo también un levantamiento espeditivo al sur de Corrientes, al que se refiere uno de los planos ; se levantaron unos 650 kilómetros cuadrados con la plancheta, lo que importa una buena contribución, si se considera, por una parte, el poco personal disponible, i, por la otra, el mal tiempo persistente.

Los levantamientos con la plancheta se refieren a Lomas, Abasto, La Plata, Ringuelet, Delmonle, Ensenada, Pereira, Plátanos, Romero, San Vicente, Glew.

En *cartografía*, el instituto se ha dedicado a perfeccionar sus *hojas* del *mapa mundial*, la renovación de numerosas *planchetas* anticuadas ya, para ponerlas al día, i muchos otros trabajos de real utilidad práctica, en los que se ha aprovechado los nuevos procedimientos que el coronel García Aparicio pudo estudiar, en 1913, en el servicio jeográfico del ejército francés.

En cuanto a los talleres gráficos, mui larga es la lista de los trabajos que ha realizado para que podamos enumerarlos en esta ya larga bibliografía.

Para no cansar a los lectores, termino recomendando a los colegas a quienes interese el tema, la lectura del interesante *Anuario* del Instituto jeográfico militar.

Sacarán de ello placer i provecho.

S. E. BARABINO.

La segunda conferencia internacional del mapa al millonésimo. Informe presentado al ministerio de Relaciones esteriores, por el delegado del gobierno arjentino a dicha conferencia, coronel BENJAMÍN GARCÍA APARICIO, director del Instituto jeográfico militar del estado mayor del ejército, etc., etc. (París,

diciembre 1913.) Talleres gráficos del Instituto geográfico militar. Buenos Aires.

Un opúsculo de 117 pájinas, al que acompañan el retrato del autor, tres fotografías de grupos de delegados, un croquis de mapa de la Arjentina al millonésimo, con su cuadriculado gradual correspondiente, otro análogo referente a Chile, un cuadro con los signos convencionales adaptados para el *mapa mundial*, i una lámina con el complemento de dichos signos convencionales.

El coronel García Aparicio ha reunido en este informe los antecedentes i el orijen del *mapa mundial*; historia sintéticamente la labor de la *Primera conferencia internacional del mapa al millonésimo*, que tuvo lugar en Londres en 1909, a la que concurrieron delegados de Alemania, Austria Hungría, Australia, Canadá, España, Estados Unidos, Francia, Italia i Rusia; hace resaltar la importancia que tuvo la consideración de esta carta en el *X° Congreso internacional jeográfico* celebrado en Roma en abril de 1914, en el cual el coronel García Aparicio, delegado del gobierno arjentino, que se había adherido, a petición del inglés, a la idea del *mapa mundial*, presentó algunas hojas de ensayo.

De paso sea dicho, en este *X° Congreso jeográfico*, se tomaron resoluciones de importancia sobre signos convencionales, accidentes jeográficos, límites, etc.

Como la República Oriental se adhirió también a esta convención, a instancia de la Arjentina, los señores teniente coronel Silvestre Mato, representante de la primera, i el coronel García Aparicio, formularon un *memorandum* con importantes proposiciones relativas a los *signos convencionales* (caligrafía, ferrocarriles, caminos, ríos, telégrafos, límites, bosques, líneas de nivel); sobre las *hojas comunes* a ambas repúblicas, mediante una triangulación internacional; construcción de las hojas con intervención sucesiva de ambas naciones i a espensas de los dos países, etc.

La república de Chile produjo un informe al respecto, formulado por el injeniero Luis Risso Patrón, director de la Oficina de mensura de tierras, acompañándolo con el croquis que mencionamos ya.

El gobierno inglés i el de los Estados Unidos reconocieron lo razonable de las observaciones hechas por los señores García Aparicio, Mato i Risso Patrón.

Se comprende que en Europa, completamente constituída, con sus viejas reparticiones veteranas en este jénero de manifestaciones intelectuales, la labor es más fácil, por su relativa uniformidad; pero a los estados hispanoamericanos, con administraciones incompletas en jeneral, no constituídas aún sobre bases invariables, por su marcha política díscola, cuando no subversiva, si les era fácil adherirse al propósito de constituír un mapa mundial, con un solo lenguaje jeográfico, que puedan todos interpretar, a pesar de la diversidad de idiomas, con el solo examen visual de los mapas nacionales; con una escala única que permita confrontar, comparar los diversos accidentes jeográficos (superficiales, hipsométricos, hidrográficos, etc.), no les resulta tan simple ponerlo en práctica, pues no están todos en condiciones de realizar tan loable aspiración, sin previa preparación técnicoadministrativa, i mediante convenciones entre los mismos.

Es lo que con acertada previsión propuso hace tiempo el coronel García Aparicio: la necesidad de celebrar un congreso jeográfico internacional latinoamericano, que echara las bases de la labor común i propia, para corresponder al

concepto científico de los promotores del *mapa mundial*, concepto al que debieran concurrir Méjico, Centro América, las Antillas, todas las repúblicas sudamericanas i las colonias europeas de las Guayanas.

En seguida, el coronel García Aparicio da cuenta de la *Segunda conferencia internacional* celebrada en París, con asistencia de 57 delegados de 33 naciones, entre las cuales figuraron las americanas Arjentina, Chile, Colombia, Santo Domingo, Ecuador, Guatemala, Méjico i Paraná. También concurrieron China, Japón, Siam, Indostán i Nueva Zelandia.

En esta conferencia presentaron ya algunas naciones ocho *hojas* de rejiones europeas : dos africanas, dos asiáticas, una de norteamérica i tres sudamericanas. Estas tres, de la Arjentina, construídas por nuestro Instituto jeográfico militar. Las de Chile no llegaron en tiempo a París.

En esta *Segunda conferencia* se tomaron resoluciones definitivas sobre « división i designación de las *hojas* » que tendrán 4° de latitud a partir del Ecuador, i 6° de lonjitud a partir del meridiano de Greenwiche, de W. a E.

No podemos detallar más en una nota bibliográfica. En cuanto a la *proyección* admitida es la *policónica modificada*, con meridianos rectilíneos converjentes hacia el central de cada hoja, que será más corto que el efectivo desarrollo del arco, calculado con una formula de Lallemand.

Se modificó las resoluciones de Londres (1ª conferencia) relativas a la representación del terreno *(altibatimetría)*. Fundamentalmente, el mapa será hipsométrico, con curvas de nivel de 100 en 100 metros i gradación de tintas para las sucesivas zonas altimétricas. Indicará las *curvas maestras* cada 200, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 4000 metros, etc.

Los relieves no susceptibles de ser representados por las curvas se *rasguearán* o *esfumarán*. Dejamos otros detalles para ser lo más breve posible.

Se tomaron también resoluciones sobre *ortografía i trascrición de nombres, repartición de hojas* i *cuestiones internacionales;* i — cosa mui importante — a pedido de la delegación inglesa, se creó en Southampton una Oficina central permanente del *Mapa del mundo al millonésimo*, a la que ya se adhirió nuestro gobierno.

Como se ve, el delegado arjentino ha tenido una actuación descollante en esta convención universal, en la que el nombre de la Arjentina ha quedado grabado con caracteres cubitales. Podemos, pues, permitirnos felicitar sin reticencias al coronel Benjamín García Aparicio, por la misión que ha cumplido con tanta dedicación como competencia.

S. E. BARABINO.

Anales del Museo nacional de historia natural de Buenos Aires, tomo XXVI, con 26 láminas i 92 figuras en el testo. Buenos Aires. Imprenta Coni hermanos. 1915.

Hemos recibido el tomo vijésimosesto de los *Anales*, correspondiente al año 1914.

Es un grueso volumen de más de 500 pájinas, formato mayor, constituído por los siguientes trabajos del personal técnico del museo :

*El nuevo edificio del Museo nacional de historia natural*, con 4 láminas, por Ánjel Gallardo.

*Sobre dos peces macrúridos de las costas de la provincia de Buenos Aires*, con 4 láminas i una figura, por F. Lahille.

*Contribución a la craneolojía de las primitivas poblaciones de la Patagonia*, con 31 cuadros, por Carlos A. Morelli.

*Notes sur quelques dolichodérines argentines*, por J. Brèthes.

*Description d'un nouveau syrphidae de la République Argentine*, por J. Brèthes.

*Nota sobre el meteorito carbonoso de Nogoyá*, con 4 figuras, por E. Herrero Ducloux.

*Funghi nonnulli senegalenses et canarienses*, con 6 figuras, por C. Spegazzini.

*Proyecto de reorganización del Museo provincial de Córdoba*, con 2 cuadros, por A. Gancedo (hijo).

*Apuntes cecidiolójicos*, por Ana Manganaro.

*Description de six Cécidomidae* (dipt.) *de Buenos Aires*, con 6 figuras, por J. Brèthes.

*Nota sobre hemípteros del Chaco de Santiago del Estero*, por J. R. de la Torre Bueno i Thorne.

*Les parassites végétaux des plantes cultivées en Argentine et dans les régions limitrophes*, con 6 figuras, por L. Hauman-Merck.

*Notes d'erpétologie*, con 1 lámina, por P. Serié.

*Sur les formes sexuelles de deux Dolichodérines*, con 4 figuras, por J. Brèthes.

*Contribution à l'étude des Pepsis*, con 2 láminas en colores i 1 mapa, por J. Brèthes.

*Apuntes sobre las lampreas arjentinas i los acraniotas*, con 2 láminas i 9 figuras, por F. Lahille.

*Los asuntos decorativos bíblicos en los objetos de ceremonial pagano payaguá*, con 2 láminas i 15 figuras, por F. F. Outes.

*El jénero Tatochila* (Butl.). *Lo que sabemos i lo que ignoramos de él*, con 1 figura i un cuadro, por E. Giacomelli.

*Nuevas investigaciones jeolójicas i antropolójicas en el litoral marítimo sur de la provincia dv Buenos Aires*, por la Dirección.

*El fémur de Miramar*. Una prueba más de la presencia del hombre en el terciario de la República Arjentina, por C. Ameghino.

*Laboulbeniali ritrovate nelle collezzioni di alcuni musei italiani*, por C. Spegazzini.

Estas memorias han aparecido, en el orden indicado, en el transcurso del año pasado.

La lectura del título de la primera memoria relativa al proyecto de nuevo edificio para nuestro Museo nacional, nos causó verdadero placer.

Al fin ! pensamos. Ya era hora que desapareciera esa verdadera vergüenza que deshonra á la capital arjentina. Nos referíamos al edificio donde vejeta i se atrofia el gran museo de historia natural que poseemos; a ese conglomerado de valiosísimas piezas que abarcan desde la jea, la flora i la fauna arcaicas hasta las de la época actual, apiñadas en los sótanos, en los pisos i hasta en la azotea del viejo edificio colonial, de la esquina Alsina i Perú, pobremente restaurado hace medio siglo o más, solo en su fachada principal.

Se trata de un decrépito edificio, amenazante ruina.

El malogrado sabio Florentino Ameghino, siendo director del Museo, jestionó año tras año, ante los poderes públicos, el traslado del mismo a otro local, si-

quiera fuera provisionalmente, para salvar las colecciones i los fósiles que constituyen su riqueza.

Muchas fueron las promesas, que se las llevó el viento de la despreocupación oficial para todo lo que no sea política. I el pobre Ameghino nos confiaba su profunda pena por la certeza que tenía ya de que le arrebataría la muerte sin haber conseguido ver realizado el proyecto de instalar un nuevo museo, que, a la vez, salvara sus valiosas colecciones e hiciese lucir sus grandes riquezas naturales.

¡ I desgraciadamente fué verdad!

La muerte tronçó la vida de aquel sabio, tan jenial como modesto, sin que pudiera tener el consuelo de ver cumplidas sus aspiraciones de patriota i de naturalista : las de dotar a la Capital con un museo modelo.

El doctor Gallardo, actual director, apenas se hizo cargo del establecimiento, se puso empeñosamente en acción para conseguir lo que fué indiferentemente prometido a su predecesor.

Las cosas parecían bien encaminadas; consiguió por lo menos que le fuera asignado el solar en que debía erigirse el nuevo edificio público ; la Dirección general de arquitectura proyectó el edificio, en realidad insuficiente, hecho disculpable por el estado del erario; pero que podrá ser ensanchado más tarde.

Nuevas demoras injustificadas condujeron al doctor Gallardo al estremo de renunciar su elevado cargo; pero las jestiones del gobierno le obligaron a retirar la renuncia, mediante la formal promesa de llevar a la práctica la construcción del edificio indicado.

Han vuelto a correr algunos meses i sólo falta para que el nuevo museo surja bello, elegante i cómodo, que ... lo construyan. ¡ Sólo falta que se entreguen los fondos prometidos por el Poder ejecutivo !...

El doctor Gallardo es aun joven, pero nos asalta una duda : ¿conseguirá ver realizados sus deseos, que también fueron los de Ameghino ?

El tiempo lo dirá.

En tanto siga nuestro museo, el gran museo paleontolójico de la Capital, inutilizado en el reducido espacio disponible, con peligro de que las viejas bóvedas seculares cubran con sus ruinas las valiosas colecciones que constituyen su rico acervo ; i continúe cerrado para el público, con el *falso cartel* que indica estar clausurado por... *¡ mudanza !*

Es verdad que la situación del erario es crítica, lo que no quita que, en previsión de « problemáticos peligros internacionales », gastemos sendos millones de pesos oro en la compra de naves, armas i municiones ; no negamos la tirantez de la situación económica del país, pero sí afirmamos que con cercenar una bicoca en cada partida, especialmente a los famosos subsidios a corporaciones relijiosas o no, i, sobre todo, a tanta injustificada pensión, podrá hallar el gobierno el medio de llenar una necesidad tan sentida.

Al fin no es una suma tan grande, ni se invertirá en un solo año. Así, pues, lo que se requiere es que el Poder ejecutivo se avoque el asunto i proceda a solucionarlo con buena voluntad.

Doctor Gallardo, no ceje en sus loables jestiones : la ciencia i la decencia nacionales reclaman un nuevo edificio para Museo nacional.

El actual ministro, doctor Cullen, le ha de apoyar.

S. E. Barabino.

**Revista del Jardín zoolójico de Buenos Aires.** Publicación auspiciada por la Intendencia municipal. Director, Clemente Onelli. Época II, año XI, número 41.

La interesante revista trimestral, que podríamos llamar « el órgano del Jardín zoolójico de la Capital », trae en su último número los siguientes trabajos :

*Idiosincrasias de los pensionistas del Jardín zoolójico*, por el señor Onelli.

*Pigmentos amarillos i negros en células nerviosas del mono*, por el profesor doctor Chr. Jakob.

*La fauna porteña*, por C. Onelli.

*Un caso teratolójico interesante* (ternero con dos cabezas), por el profesor doctor Chr. Jakob.

*Anacronismos de la secreción láctea*, por C. Onelli.

*El cinturón periurbano de bosques i praderas naturales, es una necesidad hijiénica, pedagójica i estética para Buenos Aires i sus niños.* (Trabajo aceptado por unanimidad en el Congreso del niño), por el doctor Chr. Jakob.

*Ojo, pichincheros!* por C. Onelli.

*La fauna i las alturas*, por C. Onelli.

*El vocabulario de un chimpancé*, por Georges Gladden. (Del *Outlook* de N. Y.)

*El guanaco ante el tribunal de la inquisición*, por C. Onelli.

*Disipando errores.* (Los cisnes que cantan. Los pelícanos que se destripan. La lechuza i el caburei. El escuerzo), por C. Onelli.

*El teruteru, emblema de los boys-scouts*, por C. Onelli.

*Sobre tambos modelos*, por C. Onelli.

*Los animales en la paz y en la guerra.* Conferencia dada en la Sociedad Sarmiento, protectora de animales, por C. Onelli.

*Las bananas porteñas.*

El renombre del doctor Jakob en las ciencias biolójicas, basta por sí solo para dar importancia a la *Revista zoolójica* que dirije el señor Onelli, colaborador eficiente del primero. Pero es que nuestro laborioso director del Jardín es un gran cultor del *utile dulci*, i hermana acertadamente las observaciones científicas, fisiosicolójicas, hechas sobre sus pensionistas, con la forma amena, de un gracejo siempre oportuno i sujerente. Por esto la *Revista del Jardín zoolójico* se lee toda con gusto i aprovechamiento.

S. E. Barabino.

**Revista chilena de historia natural.** Año XIX. Enero-abril 1915.

Hemos recibido las entregas 1 i 2 de esta conocida revista de ciencias naturales, que fundara en Chile, hace 19 años ya, el infatigable naturalista chileno profesor Carlos E. Porter, i que desde entonces viene redactando i dirijiendo con una competencia i constancia que hacen mui simpática su personalidad científica.

La revista se inicia este año bajo un ropaje más elegante en la forma i con materiales de indiscutible interés, láminas policromas, etc.

El índice lo comprueba :

1. La Redacción, *A nuestros lectores.*

2. E. Lahille, *Apuntes sobre unos peces chilenos.*

3. C. E. Porter, *Galería de naturalistas de Chile* (continuación).

4. Juan Brèthes, *Descripción de un nuevo jénero i de una nueva especie de Ptillidae* (= Trichopterigidae de Chile).

5. C. E. Porter, *Los helasteridae de Chile.*

6. A. Horst, *Observaciones sobre la biolojía de la Tetilla hydrocotylifolia* D. C.

7. J. Thériot, *Sur quelques mousses récueillies au Chili,* par le professeur Ch. E. Porter.

8. C. E. Porter, *Materiales para la fauna carcinolójica de Chile : X. El jénero pilumnoides.*

9. C. Silva F., *Un nuevo microlepidóptero chileno que causa perjuicios a las papas.*

10. Víctor Delfino, *Biolojía. Las trasplantaciones de los órganos, el cultivo de los tejidos i los automatismos viscerales.*

11. Crónica, correspondencia, novedades científicas, bibliografía, etc.

Como se ve, figuran entre los siete autores de trabajos publicados en la *Revista* del profesor Porter, tres de naturalistas arjentinos, rasgo simpático de confraternidad intelectual internacional.

En la crónica, con el retrato del doctor E. L. Holmberg, trascribe lo publicado en la revista *Physis* relativo a la jubilación del viejo profesor i al diploma de doctor *honoris causa,* que la Facultad arjentina de ciencias exactas, físicas i naturales otorgó al sabio jubilado, en premio a los méritos contraídos por su acción proficua como naturalista i maestro.

S. E. Barabino.

# ÍNDICE GENERAL

DE LAS

# MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO SEPTUAGÉSIMONONO



## BIBLIOGRAFÍA



## SOCIOS HONORARIOS

Dr. Juan J. J. Kyle
Ing. J. Mendizábal Tamborrel. — Dr. Estanislao S. Zeballos
Enrique Ferri. — Dr. Eduardo L. Holmberg. -- Ing. Guillermo Marconi. — Dr. Walther Nerns

## SOCIOS CORRESPONDIENTES

| | |
|---|---|
| Aguilar, Rafael | Méjico. |
| Arteaga, Rodolfo de | Montevideo. |
| Alfonso Paulino | Sgo. de Chile. |
| Ballvé, Horacio | I. de Año N. |
| Bodenbender, Guillermo | Córdoba. |
| Bolívar, Ignacio | Madrid. |
| Bertoni, Moisés | P. Bertoni (P.). |
| Bailey, Willis | Washingtón. |
| Bruce, William | Edimburgo. |
| Carvalho, José Carlos | Río Janeiro. |
| Corti, José S. | Mendoza. |
| Corthell, Elmer | New York. |
| Delage, Yves | París. |
| Fuenzalida, José del C. | Sgo. de Chile. |
| Fontana, Luis Jorge | San Juan. |
| Guignard, León | París. |
| Guimarâes, Rodolfo | Amadora (P.). |
| Gez, J. W. | Corrientes. |
| Gjertsen Hjalmar Fredrik | Noruega. |
| Kinart, Fernando | Amberes. |
| Lafone Quevedo, Samuel A. | La Plata. |
| Lillo, Miguel | Tucumán. |
| Luiggi, Luis | Roma. |
| Lugo, Américo | Santo Domingo. |
| Lorin, Henri | Bordeos. |
| Larrabure y Unánue Eugenio | Lima. |
| Morandi, Luis | Villa Colón (U). |
| Moore, Clarence | Filadelfía. |
| Moretti, Cayetano | Milán. |
| Martinenche, Ernesto | París. |
| Moore, John B. | Nueva York. |
| Montané, Luis | Habana. |
| Medina, José Toribio | Sgo. de Chile. |
| Montessus de Ballore | Sgo. de Chile. |
| Nordenskjiold, Otto | Gothemburgo. |
| Nilsen Fhowal | Noruega. |
| Paterno, Manuel | Palermo (It.). |
| Patrón, Pablo | Lima. |
| Porter, Carlos E. | Valparaíso. |
| Pena, Carlos M. de | Montevideo. |
| Poirier, Eduardo | Sgo. de Chile. |
| Pérez Verdia, Luis | Méjico. |
| Prestrud Christian | Noruega. |
| Reid, Walter F. | Londres. |
| Risso Patrón, Luis | Sgo. de Chile. |
| Reiche, Carlos | Sgo. de Chile. |
| Scalabrini, Pedro | Corrientes. |
| Sklodonska, Curie | París. |
| Spegazzini, Carlos | La Plata. |
| Shepherd, Williams R. | Colum. Univer. Nueva York. |
| Tobar, Carlos R. | Quito. |
| Torres Quevedo, Leonardo | Madrid. |
| Uhle, Max | Lima. |
| Villareal, Federico | Lima. |
| Von Ihering, Hermán | San Paulo (B) |
| Volterra, Vito | Roma. |

## SOCIOS ACTIVOS

Acevedo Ramos, R. de.
Adamoli, Pedro A.
Adamoli, Santos S.
Adano, Manuel.
Aguirre, Eduardo.
Aguirre, Pedro.
Alberdi, Francisco.
Albert, Francisco.
Aldunate, Julio C.
Almanza, Felipe G.
Alvarez, Fernando.
Alvarez Raul.
Alvarez, Agustin J.
Amadeo, Tomás.
Amoretti, Alejandro.
Anasagasti. Horacio.
Ambrosetti, Juan B.
Añon Suarez, Vicente.
Angelis, Virgilio de.
Angli, Geronimo.
Aranguren, Juan F.
Aráoz, Alfaro Gregorio.
Arata, Pedro N.
Araya, Agustín.
Arigós, Máximo.
Arce, Manuel J.
Arcansol, Adolfo.
Arditi, Horacio.
Arroyo, Franklin.
Atarez, Guillermo.
Aubone, Carlos.
Avila, Alberto.
Ayerza, Rómulo.
Aztiria, Ignacio.
Aztiz, Julio M.
Babacci, Juan.
Bado, Atilio A
Bade, Fritz.
Bachmann, Alois.
Ballester, Rodolfo E.
Baldi, Jacinto.
Barabino, Santiago E.

Barilari, Mariano S.
Barzi, Federico P.
Barrera, Raúl.
Battilana, Pedro.
Baudrix, Manuel C.
Bazán, Pedro.
Bernaola, Víctor J.
Bell, Carlos H.
Bergara, Ulises.
Besio Moreno, Nicolás.
Bialet Laprida, Amado.
Bianchedi, Rómulo.
Biraben, Federico.
Bolognini, Héctor.
Bordenave, Pablo E.
Bosch, Benito S.
Bosch, Eliseo P.
Bosch, Jorge E.
Bosisio, Anecto.
Bonanni, Cayetano.
Bonneu Ibero, León M.
Bonarelli, Guido.
Bosque y Reyes, F.
Botto, Armando P.
Brané, Eugenio.
Breyer Trant, Adolfo.
Breyer Trant, Alberto.
Brian, Santiago.
Briano, Juan. A.
Brindani, Medardo.
Bruch, Carlos.
Broggi, Hugo.
Buadá y Morant, Antonio.
Bunge, Carlos.
Buschiazzo, Juan A.
Bustamante, José L.
Butty, Enrique.
Calvo, Edelmiro.
Cáceres, Dionisio.
Cagnoni, Juan M.
Calcagno, Oreste.
Camus, Nicolás.
Canale, Umberto.
Canonica, Mauricio.
Cano, Roberto.
Cantón, Lorenzo.
Carabelli, Juan José.
Carniglia, José.
Carranza, Marcelo.
Cardoso, Ramón.
Carbonell, José.
Carossino, Jacinto T.
Carboneschi, Carlos L.
Cartavio, Angel R.
Castellanos, Carlos T.
Castro, Vicente.
Carette, Eduardo.
Castro, Eduardo B.
Claypole, Jorge.
Cerri, César.
Cilley, Luis P.
Cynalewski, E. S.
Civit, Julio Nilo.
Chanourdie, Enrique.
Chapiroff, Nicolás de.
Chaudet, Augusto.
Chiappe, Leopoldo J.
Chueca, Tomás A.
Clara, Angel.
Clérice, Eduardo E.
Cobos, Francisco.
Cock, Guillermo.
Collet, Carlos.
Comin, José.
Contin, Diego T. R.
Compte, Riqué Julio.
Correa Morales, Elina G. A. de.
Cornejo, Nolasco F.
Cornejo, Abel F.
Corvalán, Manuel S.
Coronel, Policarpo.
Corti, Emilio A.
Courtois, U.
Cremona, Andrés.
Cremona, Víctor.
Crinin, Demetrio.
Cuomo, Miguel.
Curutchet, Pedro.
Damianovich, Horacio.
Darquier, Juan A.
Dassen, Claro C.
Dates, Germán.
Debenedetti, José.
Debenedetti, Salvador.
Dellepiane, Luis J.
Deletang, Luis.
Demarchi, Torcuato T. A.
Demarchi, Marco.
Demarchi, Alfredo (hijo).
Delgado, Fausto.
Delgado, Agustín.
Doello Jurado, Martín.
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dorado, Enrique.
Douce, Raimundo.
Dolder, Julio.
Doyle, Juan.
Duhau, Luis.
Dubois, Alfredo F.
Ducros, Pablo.
Duncán, Carlos D.
Durrieu, Mauricio.
Durán, José C.
Edo, Juan Manuel.
Eguia, Máximo.
Eppens, Gustavo.
Elordi, Juan J.
Escudero, W. E.
Esteban, Francisco.
Esteves, Luis P.
Etcheverry, Angel.
Faverio, Fernando.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández, Poblet A.
Fernández, Daniel.
Fernández Basualdo, Gerardo.
Ferreyra, Miguel.
Flores, Emilio M.
Flores, Agustina J.
Fornati, Vicente.
Frank, Paul.
French, Alfredo.
Friedel, Alfredo.
Fumagalli, Arnaldo.
Frumento, Antonio R.
Gainza, Alberto de.
Galtero, Alfredo.
Gallardo, Angel.
Gallardo, Carlos R.
Gallino, Adolfo.
Gándara, Federico W.
Garbet, Adolfo.
Garat, Justo V.
García, Carlos A.
García, Jesús M.
Gatti, Julio J.
Gentilini, Pascual.
Gerardi, Donato.
Geyer, Carlos,
Ghigliazza, Sebastián.
Giménez, Angel M.
Girado, Francisco J.
Girado, Alejandro.
Girondo, Juan.
Girado, José I.
Girondo, Rafael.
Godoy, Sebastian.
Gonzáles, Arturo.
González, Juan B.
González Luján, Nicolás.

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

---

DIRECTOR : DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH

---

TOMO LXXX

Segundo semestre de 1915

---

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS
684 — CALLE PERU — 684

1915

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

---

DIRECTOR : DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH

JULIO-AGOSTO 1915. — ENTREGAS I-II. — TOMO LXXX

ÍNDICE



BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS
684 — CALLE PERÚ — 684

1915

---

## ADVERTENCIA

Los colaboradores de los *Anales*, que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos deben solicitarlo por escrito a la Dirección, la que le dará el tramite reglamentario. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con los editores señores Coni hermanos.

Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas.

Los manuscritos, correspondencia, etc., deben enviarse a la Dirección **Cevallos, 269**.

*Cada colaborador es personalmente responsable de la tesis que sustenta en sus escritos.*

**La Dirección.**

---

## PUNTOS Y PRECIOS DE SUBSCRIPCIÓN

**Local de la Sociedad, Cevallos 269, y principales librerías**

| | Pesos moneda nacional |
|---|---|
| Por mes | 1.00 |
| Por año | 12.00 |
| Número atrasado | 2.00 |
| — para los socios | 1.00 |

LA SUBSCRIPCIÓN SE PAGA ADELANTADA

**El local social permanece abierto de 3 á 7 y de 8 á 12 pasado meridiano**

# LA RADIACIÓN Y LA TEORÍA DE LOS «QUANTA»

POR CAMILO MEYER

---

## INTRODUCCIÓN

1. **Teoría cinética de los gases y estadística.** — Sabemos como las nuevas teorías eléctricas han revolucionado en una forma inesperada los mismos fundamentos de la mecánica, que, hace unos veinte años, parecían inconmutables y de una solidez á toda prueba. La teoría eléctrica de Hendrick Lorentz tuvo por efecto de transformar la mecánica newtoniana en otra nueva que tiene por fundamento el principio de relatividad y admite que ningún móvil es susceptible de adquirir una velocidad superior á la de la luz, que la masa no es constante, sino que depende de la velocidad y del ángulo formado por la dirección de ésta con la orientación de la fuerza, y por último, que es imposible determinar experimentalmente si un cuerpo está en reposo, en movimiento absoluto ó en movimiento relativo con respecto al éter.

Ahora bien, además de esta mecánica inesperada que consideraban como novísima los físicos, y como audaciosa la mayor parte de ellos, aparecen ahora conceptos aun más nuevos é inesperados que triunfan en este *record* de la osadía, sin pretender por esto derrocarla, sino completarla añadiéndole otros principios cuyas consecuencias resultan sin antecedentes en la filosofía natural.

En efecto, ya no se trata sólo de modificar las ecuaciones diferenciales de la dinámica, sino de saber si las leyes del movimiento po-

drán aun expresarse por ecuaciones diferenciales cualquiera sea la forma de éstas.

Desde Newton, un principio dominaba á toda la ciencia: el estado del Universo no podía depender, en una época dada, sino de su estado inmediatamente anterior: todas las variaciones en la naturaleza habían de verificarse dentro de un proceso continuo; este principio había sido afirmado por las doctrinas más antiguas y su expresión se resumía en las palabras: *natura non facit saltus.* Ahora bien, este mismo principio se halla muy en peligro, pues la cuestión planteada consiste en saber si no tenemos que introducir en las leyes naturales *discontinuidades esenciales,* susceptibles de influír hasta nuestros instrumentos de medición.

Para darse cuenta cabal de este punto de vista tan nuevo como inesperado, hemos de partir de la teoría cinética de los gases; sabemos que son formados éstos de moléculas que se mueven en todas las direcciones con grandes velocidades. Sus trayectorias serían rectilíneas si no se verificaran choques entra ellas y también con las paredes del recipiente que las contiene. El azar que preside á estos choques hace que acaba por verificarse una distribución media de las velocidades, tanto en cuanto á sus magnitudes como con respecto á su dirección. Por otra parte, esta distribución tiende á volver á su primera forma tan pronto como experimenta una perturbación, á pesar de la complicación muy grande de los movimientos, de modo que el observador que no puede medir sino promedios, cree observar leyes muy sencillas que resultan del juego de las probabilidades, es decir, que no ve y no puede ver sino un equilibrio *estadístico.* De este modo, las velocidades están repartidas igualmente en todas las direcciones, pues si esta equirrepartición cesara sólo un instante, si por ejemplo las velocidades tendieran á orientarse en una dirección común, en seguida los choques intervendrían para modificarla y devolver al conjunto su estado medio.

Pero el cálculo nos revela algo más en lo que se refiere á la energía: la fuerza viva media que toma cada molécula es proporcional al número de sus *grados de libertad.* En efecto, un cuerpo cualquiera puede tomar un número fijo de movimientos distintos y muy pequeños. Por ejemplo, un punto material puede moverse según las direcciones de tres ejes coordenados, y entonces se dice que goza de tres grados de libertad; una esfera pueda experimentar una traslación según los mismos ejes, ó bien una rotación en torno de cada uno, por esto se dice que tiene seis grados de libertad, pues las seis compo-

nentes de su movimiento, ó sean tres para la velocidad de traslación y tres para la de rotación, pueden ser elegidas cada una arbitrariamente. Para cada elevación de un grado en la temperatura de una molécula-gramo, la energía correspondiente á cada componente absorbe una caloría y resulta así una repartición igual de la energía entre los varios grados de libertad. Pero para una molécula biatómica, supuesta de revolución, sólo dos componentes de rotación son independientes, lo que reduce á cinco el número de los grados de libertad. Es por esto que una molécula de gas monoatómico, como el argón, comparable á un punto material, tiene tres grados de libertad, mientras una molécula de oxígeno tiene cinco. Á estas consideraciones se agrega un teorema conocido con el nombre de ley de *equirrepartición de la energía,* del cual resulta que, si en el equilibrio estadístico una molécula de argón posee á una temperatura dada una fuerza viva igual á tres, una molécula de oxígeno tiene otra igual á cinco, lo que significa que los calores específicos moleculares *á volumen constante* del argón y del oxígeno están en la misma relación que los grados de libertad de sus moléculas.

Observaremos que aquella ley, interpretada como conviene, no es cierta únicamente para los gases, y veremos que Lorentz demostró que ella resulta de la misma forma de las ecuaciones de la dinámica, la cual puede siempre reducirse á la ideada por Hamilton, de modo que si las leyes generales de la dinámica se aplican á los sólidos y líquidos, estos cuerpos son también regidos por la ley de equirrepartición de la energía.

Por otra parte, este resultado está de acuerdo con el principio de Carnot, pues según este segundo fundamento de la termodinámica el universo tiende á un estado final que será definitivo é inmutable.

Esto equivale á decir que el equilibrio estadístico es siempre posible; pues en caso contrario podríamos imaginar la realización del movimiento llamado *perpetuo de segunda especie,* que nos permitiera, por ejemplo, calentar una máquina á vapor con hielo, pues tan frío como sea éste, su temperatura no es la del cero absoluto y por lo tanto contiene cierta cantidad de calor. En efecto, si las leyes del equilibrio estadístico no fueran iguales para todos los cuerpos, por ejemplo, si fueran distintas cuando se ponen en presencia los cuerpos A, B, los cuerpos B, C, ó los cuerpos A, C, se podría, al acercar á veces dos de ellos, á veces otros dos, cambiar continuamente las condiciones de equilibrio, lo que significaría que dichos cuerpos no llegarían

nunca al estado de reposo definitivo, no habiendo por consiguiente ningún equilibrio estadístico real, y el principio de Carnot dejaría de ser cierto.

Podríamos sorprendernos de la feliz coincidencia de que las condiciones de equilibrio estadístico permanecen siempre iguales, cualesquiera sean los cuerpos en presencia. Pero desaparece este misterio cuando nos damos cuenta, como lo expresamos más arriba, de que aquella coincidencia se debe á la aplicación á todos los cuerpos de las leyes generales de la dinámica reductibles á las ecuaciones de Hamilton.

Tal era el estado, hace unos años, de la teoría estadística, siempre confirmada por la experiencia, á pesar de unas cuantas objeciones que ya hacían unos sabios. Por ejemplo, las moléculas y hasta los átomos, no son en la realidad puros puntos materiales, y si tienen dimensiones, habría que ver si podemos asimilarlos á cuerpos rigurosamente rígidos; tan simple como sea la molécula de argón, no se puede decir que se reduce á un verdadero punto material, y entonces ¿por qué no sería una esfera? Y en este caso por qué no giraría y no tendría los seis grados de libertad conforme á la definición? Habría que admitir que los choques quedan sin acción sobre su rotación y no pueden hacerla experimentar deformación ninguna capaz de modificar la traslación de la molécula. Por otra parte, cada rayita del espectro corresponde á un grado de libertad y sabemos que el del oxígeno ofrece mucho más de cinco rayas. Deberíamos entonces considerar que ciertos grados de libertad parecen, en cuanto á la ley de equirrepartición de la energía, no desempeñar ningún papel, lo que daría al problema un aspecto algo misterioso, pues no se puede comprender por qué permanecerían como paralizados mientras no intervengan circunstancias más ó menos peculiares y de carácter excepcional.

2. **La ley de la radiación.** — Desde un principio los físicos no se habían preocupado de resolver estas dificultades, pero dos hechos nuevos revolucionaron de repente las ideas aceptadas: *la ley de la radiación negra* y la *medición de los calores específicos* de los cuerpos sólidos á temperaturas muy bajas ó sea en el aire ó hidrógeno líquidos. Estos calores específicos, en vez de ser sensiblemente constantes, disminuyen rápidamente y acaban por anularse al cero absoluto, lo que significa que el fenómeno se desarrolla como si las moléculas perdiesen grados de libertad al enfriarse, algunas de sus articulaciones quedando paralizadas en las bajas temperaturas.

Se dice que un cuerpo es *perfectamente negro* cuando su coeficiente de absorción es igual á 1, no pudiendo reflejar ninguna radiación. Este cuerpo, llevado á la incandescencia, emite *luz* de todas las longitudes de onda y la intensidad de esta luz varía según una ley dada, en función de la temperatura y longitud de onda. Sobra decir que no es posible la observación directa, por no existir cuerpo real perfectamente negro, pero tenemos á nuestro alcance un procedimiento para subsanar el inconveniente.

Cuando un flúido llena un recinto, la agitación molecular, tanto mayor cuanto más elevada es la temperatura, transmite de un punto á otro las acciones térmicas, y el grado de aquella agitación mide á la temperatura, tan pronto como el equilibrio existe. Ahora bien, sabemos que faltando toda materia intermediaria la temperatura del espacio interno, dentro de un recinto cerrado isótermo, conserva una significación definida. Un termómetro acaba siempre por dar una indicación constante, ó llega siempre á un mismo estado final en un punto de un recinto opaco rodeado por ejemplo de agua hirviente, sea que dicho recinto contenga un flúido cualquiera, ó que se encuentre completamente vacío de toda materia ponderable. En este último caso, la acción experimentada por el termómetro lo alcanza sólo por radiación desde los varios puntos del mismo recinto.

Por otra parte, esta radiación resulta visible ó invisible según la temperatura del recinto, que puede ser una heladera, una estufa ó un horno incandescente. Pero esta visibilidad no tiene importancia ninguna del punto de vista del carácter físico esencial de la radiación que, para el físico, es siempre *luz* y atraviesa el vacío con la velocidad invariable de 300.000 kilómetros por segundo.

Cuando decimos que el recinto está cerrado y opaco, esto significa que ninguna influencia térmica puede ejercerse por radiación entre dos cuerpos, cuyo uno es interno y el otro externo al recinto.

Con esta condición indispensable, un termómetro colocado dentro de éste puede alcanzar y conservar un estado invariable bien definido. Pero no resulta de esto que no se verifica ya nada en la región en la cual se halla el termómetro, pues aquella no deja de recibir las radiaciones que emiten los distintos puntos del recinto. La fijeza de la indicación dada por el termómetro prueba solamente que dicha región no cambia ya de propiedades, ó sea que permanece en un estado estacionario. Hemos de observar que este estado de un espacio atravesado por la luz en todos sentidos constituye realmente un régimen permanente, cuyos cambios son sumamente rápidos y no discernibles

para nuestros sentidos imperfectos, como sucede también con la agitación de un flúido en equilibrio que, sin embargo, es de esencia mucho más grosera.

Por otra parte, no observamos ninguna influencia de la naturaleza, magnitud ó forma del recinto sobre el estado estacionario de la radiación en cada punto, el cual se halla determinado únicamente por la temperatura. Resulta que todas las direcciones que se cruzan en un punto son equivalentes, y se podría colocar lentes ó espejos de todas las maneras posibles dentro de un horno incandescente, la temperatura y el color no se alterarían en ninguna parte, no se formaría ninguna imagen, es decir que la imagen de un punto de la pared no se discerniría por ninguna propiedad de uno cualquiera de los puntos internos al horno. Un ojo que tendría la propiedad de resistir á la temperatura del recinto no podría distinguir ningún objeto, ningún contorno, y su sensación sería la de una iluminación general uniforme.

Otra consecuencia del régimen estacionario consiste en que la densidad de la luz, igual, como se sabe, á la cantidad de energía contenida en la unidad de volumen, tiene, para cada temperatura, un valor bien determinado.

Se llega con bastante facilidád á calcular la densidad de la luz en equilibrio, mediante una ventanilla hecha en la pared; así se puede estudiar la radiación que sale por esta pequeña abertura. En efecto, si es de dimensiones suficientemente reducidas, la perturbación consecuente en la radiación interna es despreciable, lo que significa que la cantidad de luz atravesando el orificio por segundo, es igual á las que hiere durante el mismo tiempo á cualquier otra porción de la pared igual en superficie á la de la ventanilla.

Observamos que ninguna dirección de salida es privilegiada, y si uno mira por la abertura, no puede distinguir en el recinto ningún detalle, teniendo al contrario la impresión de una caverna luminosa que no deja percibir ninguna forma. Sabemos, en efecto, por experiencia que si miramos en un crisol deslumbrante que contiene un metal en fusión, no podemos discernir el nivel del líquido y como lo observa muy acertadamente Jean Perrin, si por lo general no se ve nada dentro de un horno cerrado, esto no sucede solamente á temperaturas bajas.

Por otra parte, á ninguna temperatura se puede alumbrar de una manera sensible el interior de un horno mediante un rayo de luz que procede de afuera á través de una pequeña abertura. La luz, al pene-

trar, se agota muy pronto por reflexiones sucesivas sobre las paredes y no tiene ninguna probabilidad de salir en cantidad apreciable por la ventana muy pequeña, de modo que se puede considerar ésta como *perfectamente negra,* siempre que se admita que el carácter fundamental de un cuerpo negro es de no devolver nada de la luz que recibe. En estas condiciones podemos concebir como, si se colocan frente el uno al otro dos cuerpos negros de los que acabamos de definir á temperaturas T y *t,* cuyo uno actúe como calorímetro, se puede medir el exceso de energía que pasa de la fuente caliente á la fuente fría, sobre la que va de ésta á aquélla, y en efecto, se ha comprobado así que el poder emisivo de un cuerpo negro es proporcional á la *cuarta potencia* de su temperatura absoluta. Esta ley es la de Stefan. Nos enseña cuán rápidamente crece el poder emisivo cuando se calienta la fuente, pues si se duplica la temperatura, esto equivale á multiplicar por 16 la energía irradiada. Por otra parte, esta misma ley ha sido comprobada entre límites extensos de temperatura, desde la del aire líquido hasta la de fusión del fierro, y hoy se la considera por lo general, como sumamente rigurosa.

Hasta aquí todo parece muy plausible, pero vamos á ver que de repente surge una dificultad inesperada.

El número de las moléculas en el recinto es evidentemente finito. aunque muy grande, y no tienen sino un número de grados de libertad también finito. Por otra parte, el éter está dotado de un número infinito de grados de libertad, pues puede vibrar de un número infinito de modos distintos que corresponden á todas las longitudes de onda con las cuales el recinto se encuentra en resonancia. De allí se deduce que, si la ley de aquella repartición de la energía es aplicable al éter, éste habría de apoderarse de toda la energía sin dejar ninguna á la materia.

Sin embargo, podríamos hacer hipótesis para tratar de quitar al éter una parte de su libertad, por ejemplo, imponiéndole uniones que lo pondrían en la imposibilidad de transmitir las ondas de longitud muy corta. Con ésto se llegaría á desechar la contradicción, pero resultaría otra ley que, sin ser absurda, estaría en pugna con la experiencia.

Es la ley de Rayleigh, según la cual la energía irradiada que corresponde á una longitud dada, es proporcional á la temperatura absoluta y, para una temperatura dada, en razón inversa de la cuarta potencia de la longitud de onda.

Ahora bien, la verdadera ley de acuerdo con la experiencia no es

la de Rayleigh, sino la de Planck, en virtud de la cual la radiación es mucho más reducida con las pequeñas longitudes de onda y las bajas temperaturas, de lo que exige aquélla de acuerdo con la equirrepartición de la energía.

3. **Los quanta de energía.** — Para explicar los fenómenos hay que buscar la solución del problema sin modificar los principios de la termodinámica, y por lo pronto, hemos de mantener la posibilidad del equilibrio estadístico, pues sin ella se derrumbaría el principio de Carnot, y es imposible admitir la menor grieta en el edificio de la termodinámica sin dar lugar a un derrumbamiento total.

El físico Jeans trató el primero de conciliarlo todo, suponiendo que lo observable no es el equilibrio estadístico definitivo, sino algo como un equilibrio provisorio. Pero esta hipótesis es poco admisible, pues si no está en pugna con la experiencia porque no prevé nada, ofrece el gran defecto de dejar sin explicación á todas las leyes conocidas, limitándose á no contradecirlas, de modo que éstas se reducirían á ser el efecto de una casualidad oportuna.

Pero Planck, físico prusiano, buscó otra explicación de la ley descubierta por él : se trataría de un verdadero equilibrio que, si no está de acuerdo con la ley de equirrepartición de la energía, lo debe al hecho de que las ecuaciones de Hamilton *no son exactas*. Para hacer concordar la teoría con la experiencia, es menester introducir en dichas ecuaciones una modificación muy rara y audaz.

¿Cómo figurarnos un cuerpo radiante? Sabemos que un resonador de Hertz despide en el éter ondas hertzianas, ó sea luminosas, en el sentido más general de la palabra. Luego se puede considerar un cuerpo incandescente como si contuviera un gran número de pequeños resonadores y, si se calienta el cuerpo, estos resonadores adquieren energía, se ponen á vibrar y por consiguiente á irradiar.

La hipótesis de Planck consiste en suponer que cada resonador no puede adquirir o perder energía sino por *saltos bruscos,* de modo que la cantidad de energía que contiene resulte siempre igual á un múltiplo de otra constante que llama *quantum,* la provisión de energía de un resonador teniendo que componerse siempre de un número entero de *quanta*. Pero esta unidad *indivisible* no es igual para todos los resonadores, siendo su valor en razón inversa de la longitud de onda correspondiente, de modo que los resonadores de corto período no pueden absorber ni emitir energía sino por partes alícuotas gruesas, mientras las de largo período la absorben ó la emiten por partes pequeñas.

Resulta que, como se necesitan grandes esfuerzos para poner en vibración á un resonador de corto período, pues para ello se requiere una cantidad de energía al menos igual á su *quantum* que es grande, hay probabilidad para que los resonadores de aquella clase permanezcan en reposo, sobre todo si la temperatura es baja, y por eso en la radiación negra aparece relativamente poca luz de pequeña longitud de onda.

Confesaremos que, á pesar del carácter raro de la hipótesis de Planck, ésta da cuenta satisfactoria de los hechos experimentales, siempre que admitamos entre la energía del resonador y la radiación correspondiente, la misma relación adoptada en las antiguas teorías, y no se comprende bien la razón que nos obliga á conservar aquella relación cuando suprimimos las demás; pero, dice Poincaré, « hemos de conservar algo, pues en caso contrario, ya no sabríamos sobre qué cimientos podríamos edificar de nuevo ».

Por otra parte, la diminución de los calores específicos con la temperatura que nos lleva al teorema de Nernst, muy discutido hoy, es cierto, se explica también por medio de la misma hipótesis. Cuando baja la temperatura, un gran número de resonadores llegan á tener una energía menor que su *quantum*, y, en vez de vibrar poco, ya no vibran más, de modo que la energía total va disminuyendo más rápidamente que en las teorías antiguas.

4. **Discusión de la hipótesis de Planck.** — El equilibrio estadístico no se puede verificar sino por un intercambio de energía entre los pequeños resonadores, sino, cada uno de ellos conservaría indefinidamente su energía inicial, que puede ser cualquiera, y la repartición final ya no estaría de acuerdo con ninguna ley. Por otra parte, el intercambio no puede realizarse por radiación si los resonadores son fijos y encerrados en un recinto fijo, pues cada uno no emite ni absorbe entonces sino luz de longitud de onda dada, y no puede comunicar energía sino á los demás resonadores de igual período. Pero la objeción desaparece si suponemos al recinto deformable, ó si contiene cuerpos en movimiento. En efecto, al reflejarse en un espejo móvil, la luz cambia de longitud de onda, conforme al principio de Doppler-Fizeau, lo que hace posible el intercambio por radiación.

Pero este intercambio puede verificarse también de otro modo. cuando los resonadores reaccionan mecánicamente los unos sobre los otros, sea directamente, sea como es más probable por medio de átomos móviles y electrones que circulan del uno al otro y llegan a cho-

car con ellos, produciendo un *intercambio por choques*. Ya lo observamos, es preciso que todos los modos de intercambio de energía lleven á las mismas condiciones de equilibrio estadístico, ó sino fallaría el principio de Carnot. Pero es también necesario que se pueda encontrar una explicación satisfactoria de concordancia tan maravillosa, sin atribuirla á un azar algo providencial. Sabemos por otra parte que con la mecánica antigua, la explicación se encontraba en seguida en la universalidad de las ecuaciones de Hamilton negada por Planck.

En el estado actual de nuestros conocimientos, es cierto que se ignoran aun ciertas condiciones del equilibrio al cual puede llevar aquella forma de intercambio. Poincaré había empezado el estudio de los intercambios por radiación, pero una muerte ciega lo sorprendió antes de que pusiera fin á sus cáculos, añadiendo otro motivo más para darnos á comprender la pérdida irreparable que fué su desaparición para la ciencia, pues más que cualquier otro su genio estaba designado para llevar á cabo una obra tan magna.

Sin embargo, hay una condición de equilibrio que nos revelaron los trabajos de Wien y conocida con el nombre de ley de Wien; según esta ley, el producto de la energía de la irradiación por la quinta potencia de la longitud de onda depende sólo del producto de la temperatura por la misma longitud de onda.

Ahora bien, para que la ley de Wien quede compatible con el equilibrio estadístico debido al intercambio por choques, es menester que en éste la energía no pueda variar sino por *quanta* inversamente proporcionarles á la longitud de onda. Podemos decir que esta es la propiedad mecánica de los resonadores de Planck, completamente independiente del principio de Doppler-Fizeau. Pero es difícil comprender en virtud de qué misteriosa armonía preexistente aquellos resonadores fueron dotados de la única propiedad mecánica que era adecuada á la hipótesis. De otro modo, vemos claramente que si el equilibrio estadístico no varía, no es por una razón única y universal, sino en virtud de un conjunto de circunstancias múltiples é independientes.

Observemos de paso que Planck eligió para su teoría una forma de exposición en la cual esta dualidad de los modos de intercambio no está puesta en evidencia sino que queda más bien ocultada, y á Poincaré debemos el haberla evidenciado con la claridad luminosa que caracterizaba su genio.

Pero hay otra dificultad más: un resonador no puede ceder energía á otro sino por múltiplos enteros de su *quantum*. Por otra parte, éste no puede á su vez recibirla sino por múltiplos enteros de su

*quantum* propio que, por lo general, es distinto del primero y hasta inconmensurable con él. Esto, por consiguiente, basta para excluír la posibilidad de un *intercambio directo generalizado,* aunque este se puede verificar por medio de los átomos, si admitimos que la energía de éstos varía de una manera continua.

Por último, tengo que señalar otra dificultad mayor aun: los resonadores han de perder ó absorber bruscamente cada *quantum,* lo que significa que absorben su *quantum* ó no absorben nada. Pero necesitan algún tiempo para ganarlo ó perderlo, pues en caso contrario, no se podrán verificar interferencias, no pudiendo dos *quanta,* emitidos por un mismo resonador á instantes distintos, interferir entre sí porque las dos emisiones constituirían fenómenos independientes. Además, no habría ningún motivo para que el intervalo de tiempo que transcurra entre ellos fuera constante. Muy al contrario, esta constancia sería imposible, pues el intervalo ha de ser mayor cuando la luz es débil que no cuando resulta más intensa. Sin embargo, se podría sostener que el intervalo es constante, pero que cada emisión puede comprender varios *quanta,* dependiendo en este caso la intensidad del número de los *quanta* emitidos juntos. Mas esta hipótesis resulta también inaceptable, pues el intervalo ha de ser pequeño con respecto á un período dado, para que todo se verifique de acuerdo con las observaciones de interferencias, y el valor del *quantum* está dado por la misma fórmula de Planck. Resultaría un mínimo de intensidad posible de luz y, si se calcula este mínimo, se encuentra un valor superior á ciertas emisiones comprobadas experimentalmente.

Admitiremos, pues, que cada *quantum* interfiere con sí mismo y para ello es menester que una vez puesto en la forma de vibraciones luminosas del éter, se parta en varias fracciones, estando algunas atrasadas con respecto á otras de distintas longitudes de onda y, por lo tanto. no emitidas sincrónicamente.

Ahora bien, los resultados del análisis anterior parece que constituyen en conjunto una contradicción invencible; sin embargo, quizá se puede subsanarla mediante el raciocinio siguiente.

Imaginemos un sistema formado con un número dado de excitadores de Hertz todas iguales. Cada uno está cargado por una fuente distinta de electricidad y, tan pronto como la carga alcanza un valor fijo, se produce la chispa y empieza la emisión, sin que nada pueda detenerla hasta que el excitador se halle del todo descargado. Luego tiene que perder su *quantum* íntegro ó no perder nada, siendo éste la cantidad de energía que corresponde al potencial explosivo. Pero di-

cho *quantum* no se pierde bruscamente; cada emisión tiene cierta duración y las ondas emitidas son susceptibles de interferencias regulares.

5. **Los quanta de acción.** — Confieso que la explicación de Planck es bastante seductora, si la consideramos desde un punto de vista especial. En efecto, hace ya unos cuantos años que la tendencia del mundo científico se manifiesta claramente atomística: la materia nos parece formada de átomos indivisibles, la electricidad misma ya no es continua, ya no es divisible indefinidamente, sino que se resuelve en electrones todos iguales y de cargas uniformes. Asimismo se tiene el *magneton* ó átomo de magnetismo, y en estas condiciones los *quanta* de Planck nos aparecen como verdaderos átomos de energía. Por desgracia muy pronto la comparación deja de ser exacta. En efecto, un átomo de hidrógeno, por ejemplo, es realmente invariable y conserva siempre la misma masa, cualquiera sea el compuesto de que forma parte como elemento. Del mismo modo los electrones conservan su individualidad á pesar de todas las transformaciones en las cuales intervienen. ¿ Sucede otro tanto con los pretendidos átomos de energía? Por ejemplo tenemos tres *quanta* de energía en un resonador, cuya longitud de onda tiene por valor tres; dicha energía pasa en otro resonador cuya longitud de onda es igual á cinco. Entonces ya no representa tres *quanta*, sino cinco, pues el *quantum* del segundo resonador es menor y, en la transformación, el número de los átomos de energía y la magnitud de cada uno han variado.

Este punto es evidentemente el punto más vulnerable de la teoría de Planck, y por otra parte, habría que explicar por qué el *quantum* de un resonador está en razón inversa de la longitud de onda, y por esto mismo, Planck se ha resuelto á modificar la exposición de sus ideas.

Poincaré, en una de sus últimas memorias, hizo la crítica de esta nueva exposición; manifiesta primero, con la honestidad científica que caracterizaba todas sus polémicas científicas, el temor de que involuntariamente altere el pensamiento de Planck, llegando más allá de lo que se proponía el físico de Berlín, ó bien dejando de poner en evidencia los resultados á los cuales nos llevaba.

« Traduciremos primero, dice el ilustre geómetra, el texto de Planck tan exactamente como sea posible, en forma resumida », y recuerda en seguida que el estudio del equilibrio termodinámico se ha reducido á una cuestión de estadística y probabilidad.

Ahora bien, la probabilidad de una variable continua se determina cuando uno considera dominios elementales independientes, todos de probabilidades iguales. En la dinámica clásica, nos valemos, para hallar aquellos dominios elementales, del teorema fundamental en virtud del cual dos estados físicos, cuyo uno es la consecuencia necesaria del otro, son igualmente probables.

Si en un sistema físico se representa por $q$ á uno de los parámetros, que no son sino coordenadas *generalizadas,* por $p$ el momento correspondiente, el dominio :

$$\int dpdq$$

considerado á un instante cualquiera es *invariante* con respecto al tiempo, según el teorema de Liouville, siempre que $q$ y $p$ varíen conforme á las ecuaciones de Hamilton. Por otra parte, $p$ y $q$ pueden, á un instante dado, tomar todos los valores posibles que no dependen el uno del otro. Resulta que el dominio elemental de probabilidad es infinitamente pequeño y del orden de magnitud del producto $dpdq$. Ahora bien, la nueva hipótesis ha de tener por objeto disminuír la variabilidad de $p$ y $q$ de modo que estas variables no consigan variar sino *por saltos,* ó que se pueda considerarlas como unidas *parcialmente* la una con la otra.

Con esto se consigue reducir el número de los dominios elementales de probabilidad ó, lo que es equivalente, aumentar la extensión de cada uno de ellos. Ahora bien, la hipótesis de los *quanta de accion* consiste precisamente en suponer que los mismos, todos iguales, ya no son infinitamente pequeños, sino finitos, teniéndose para cada uno :

$$\int dpdq = h = \text{const.}$$

Tal es el desarrollo riguroso del pensamiento de Planck. Este físico deduce que el elemento de energía es igual al producto de la frecuencia por el elemento de acción, y si el *quantum* de energía es proporcional á la frecuencia, como ya lo sabemos, esto se debe al hecho de ser el *quantum* de acción una constante universal, un átomo verdadero.

Tratemos, pues, de definir la naturaleza de los dominios elementales de probabilidad. Son *indivisibles,* lo que significa que todo está determinado cuando se tiene la certeza que el hecho observado se

encuentra en uno de ellos. En efecto, si los acontecimientos futuros no fueran con este dato completamente conocidos, si pudieran diferir según que se tratara de una ú otra parte del dominio, éste no sería indivisible del punto de vista de la probabilidad, pues la probabilidad de unos acontecimientos futuros no sería igual en sus distintas partes.

Esto, por consiguiente, se puede enunciar también diciendo que todos los estados del sistema correspondiente á un mismo dominio no pueden discernirse los unos de los otros y constituyen un solo y mismo estado.

De este modo estamos llevados á otro enunciado que debemos á Poincaré, mucho más preciso que el de Planck, aunque de acuerdo con el pensamiento de este sabio y que se puede expresar como sigue: « Un sistema físico no puede tener sino un número finito de estados distintos, y varía del uno al otro sin pasar por una serie continua de otros estados intermediarios. »

Supongamos, por ejemplo, que el estado del sistema considerado dependa de tres parámetros, lo que significa que podemos representarlo geométricamente por un punto del espacio, el conjunto de los puntos representativos de los distintos estados posibles no será entonces el espacio total, ni tampoco una región de éste, como se supone generalmente, sino un gran número de puntos aislados repartidos en el espacio; pero, como resultan muy apretados, nos comunican la ilusión de la continuidad.

Ahora bien, todos estos estados debemos considerarlos como igualmente probables, pues si admitimos el *determinismo,* á cada uno de ellos ha de suceder forzosamente otro de probabilidad idéntica, porque tenemos la certeza que el primero entraña como consecuencia el segundo. De este modo es fácil averiguar que, si tomamos por punto de partida un estado inicial dado, todos los demás que se verificarán aparecen todos igualmente probables, quedando los restantes sólo posibles.

Por otra parte, los puntos aislados no han de ser repartidos en el espacio en una forma cualquiera, sino de modo que, si los observamos con nuestros sentidos imperfectos, se encuentre confirmada nuestra creencia en las ecuaciones de la dinámica y, por lo tanto, en las de Hamilton.

Aclaremos lo que antecede con un ejemplo.

Observamos un líquido, y nuestros sentidos nos incitan primero á creer que se trata de materia continua, pero una experiencia más detenida nos enseña que aquel líquido es incompresible, ó sea que

una fracción cualquiera de él conserva un volumen constante. Después, otras razones nos inducen á pensar que está formado de moléculas muy pequeñas y muy numerosas, aunque su número sea finito. Una vez hecha esta inducción, ya no podemos figurarnos una distribución cualquiera de aquellas moléculas, pues en virtud de la incompresibilidad, hemos de admitir que dos pequeños volúmenes iguales contienen números iguales de partículas.

En cuanto á la repartición de los estados posibles, Planck tiene que someterse á una restricción análoga, que expresa por las ecuaciones que constituyen el fundamento de su teoría. Poincaré, respecto á lo que antecede, manifiesta que se podría también imaginar hipótesis mixtas y admitir que el sistema físico depende sólo de tres parámetros, pudiendo así ser representado su estado por un punto del espacio. El conjunto de los puntos representativos de los estados posibles podría así no ser ni una región del espacio ni un enjambre de puntos aislados, pues sería admisible suponer también que se compone de un gran número de pequeñas superficies ó curvas distintas y aisladas, admitiendo, por ejemplo, que uno de los puntos materiales del sistema puede recorrer sólo algunas de aquellas curvas ó superficies, pero en una forma continua, menos cuando salta de una trayectoría á otra por la influencia de los puntos vecinos, como en el caso de los resonadores de que nos ocupamos más arriba. También se podría admitir que el estado de la materia ponderable sea susceptible de variar de un modo discontinuo con un número finito de estados posibles, mientras el estado del éter variaría continuamente, y, según Poincaré, todas estas hipótesis estarían de acuerdo con el pensamiento de Planck. Sin embargo, es probable que la primera solución, la más directa, ha de parecer preferible á la mayor parte de los físicos.

Sin embargo, hay que fijarnos en las consecuencias. En efecto, todo esto es aplicable á un sistema cualquiera aislado y por lo tanto al universo, lo que significa que la vía láctea, por ejemplo, tendría también que pasar bruscamente de un estado á otro, mientras permanecería inmóvil entre dos saltos, y los instantes, durante los cuales se detendría en un mismo estado, ya no se podrían discernir el uno del otro, de modo que el tiempo á su vez experimentaría variaciones discontinuas, lo que nos llevaría al concepto de otro átomo, el *átomo de tiempo*.

6. **La nueva teoría de Planck y las ideas de Sommerfeld.** — Volvamos ahora á la teoría de la radiación, que dió lugar á que Planck

ideara una modificación á sus primitivos conceptos. Según el nuevo punto de vista del físico prusiano, la emisión de la luz se verificaría bruscamente por *quanta*, pero la absorción quedaría continua. De este modo se propuso vencer la dificultad siguiente. La luz llega á cada resonador en una forma continua, pero si no puede absorberse sino por *quanta* aislados, es preciso que la energía se acumule en un recinto que resulta algo como la antecámara del resonador, hasta que se encuentre en cantidad suficiente para conseguir el acceso. Ahora bien, Planck no se dió cuenta de que, si con su teoría nueva desaparece la dificultad, no por esto deja de necesitarse una sala de espera para la energía emitida, si la antecámara ya no hace falta para la absorbida, pues el éter no puede transmitirla sino por fracciones sumamente pequeñas; así resulta de la modificación una ventaja más bien aparente que real.

En la nueva teoría, los resonadores conservan un residuo de energía hasta en el cero absoluto, y si se adopta la hipótesis, habrá que modificar la relación entre la energía del cuerpo radiante y la intensidad de la radiación. Ésta ya no es proporcional á la energía, sino al exceso de la energía sobre el residuo que subsiste al cero absoluto. Por esto mismo, según Poincaré, la hipótesis resulta poco satisfactoria, y el gran geómetra observa que Planck habla sólo de la emisión y absorción, suponiendo fijo el resonador. No alude ni al intercambio de energía por choques, ni al principio de Doppler-Fizeau. En estas condiciones, no habría tendencia á un estado final, y la demostración, mediante la cual se pretende dar á conocerlo se reduciría á un puro engaño. Además, el físico de Berlín no opina con respecto á la cuestión de si los intercambios por choques son continuos como la absorción ó discontinuos como la emisión, y si uno aplica la teoría general de los intercambios por choques, ya no vuelve á encontrar los resultados de la teoría de Planck. En resumen, según Poincaré, cuya opinión es evidentemente de gran importancia en el debate, sería preferible adoptar las primeras ideas del sabio prusiano.

Sommerfeld, por otra parte, propuso una teoría que tuvo la pretensión de ligar con la de Planck, aunque el único lazo que las una consiste en el hecho de que la letra $h$ figura en las dos fórmulas, mientras se da el mismo nombre de *quantum de acción* á las dos cosas, muy diferentes por cierto, que representa dicha letra. Según este sabio, el choque de los electrones no obedece, ni mucho menos, á las leyes que rigen á los de los cuerpos complejos que conocemos y son accesibles á la experiencia.

Sommerfield admite que un electrón, al encontrar un obstáculo, se detiene *tanto más pronto cuanto mayor es su velocidad.* Si esta ley se aplicara á los trenes de ferrocarril, el problema tan delicado del freno se nos presentaría en una forma del todo nueva.

La misma hipótesis se aplica á la producción de los rayos de Röntgen: los rayos catódicos son electrones en movimiento, que se detienen cuando encuentran el antecatodo, provocando esta detención brusca vibraciones del éter que engendran los rayos X. Ahora bien, la teoría de Sommerfeld explica por qué estos rayos resultan tanto más penetrantes cuanto mayor es la velocidad de los catódicos, pues cuando aumenta ésta, la detención resulta más repentina y, por consiguiente, la perturbación del éter más intensa y breve.

7. **Conclusión.** — En resumen, las teorías antiguas, que parecían hace poco dar cuenta satisfactoria de todos los fenómenos conocidos, han encontrado de repente un obstáculo inesperado, en tal forma que pareció inevitable la necesidad de introducir modificaciones radicales. Desde luego ocurrió á Plank formular una hipótesis tan rara y extraña que cada sabio sintió la tentación de buscar todos los medios que permitieran excluirla, pero por desgracia no se pudieron encontrar. Este fracaso no impide que la nueva teoría dé lugar á un sinnúmero de dificultades, entre las cuales hay muchas muy reales que no se pueden explicar por la tendencia de nuestro espíritu á protestar inconscientemente contra todo cambio en nuestros hábitos inveterados. Por el momento, es imposible prever el resultado final, ni saber si se podrá hallar otra explicación del todo distinta y también si los fundadores de la nueva teoría llegarán un día á vencer los obstáculos que aun se oponen á su aceptación por los espíritus más ponderados sin ninguna de las restricciones que hoy parecen imprescindibles. El problema que se plantea es el siguiente: ¿reinará la discontinuidad en el universo físico, quedando definitivo su triunfo, ó bien acabaremos por discernir que tal discontinuidad no es sino aparente y oculta una serie de procesos continuos? El hombre que, el primero, ha observado un choque, tuvo la convicción de que se trataba de un fenómeno discontinuo, y sin embargo, ya sabemos que no vió más que el efecto de cambios de velocidad muy rápidos, pero realmente continuos.

Á pesar de las dudas muy serias y críticas que provoca la teoría de la radiación basada sobre la hipótesis de los quanta, no se puede negarle la importancia que se merece, pues es la única que, en el es-

tado de nuestros conocimientos actuales, permite dar cuenta de hechos nuevos inexplicables para la dinámica antigua, y su aparición en el escenario científico nos proporciona horizontes dilatados más ó menos probables, pero susceptibles de despertar la atención de los que tienen interés por el progreso de las ciencias físicas. Por esto mismo no debemos despreciarla y, al contrario, dedicarle toda nuestra atención.

Su base fundamental consiste en consideraciones de orden estadístico, cuyas primeras manifestaciones se sentaron en la teoría cinética de los gases de Maxwell; por otra parte, interviene también la radiación. Por esto, creo conveniente dividir esta monografía en dos partes principales. En la primera estudiaré la teoría estadística y la de la radiación, dando principio á aquella con la teoría cinética de Maxwell y Boltzmann y la del calor específico, para llegar así al principio de la equirrepartición de la energía que nos llevará en seguida el concepto de la radiación ideado por Jeans y Lord Rayleigh y á la ley enunciada por este último sabio. Ya sentadas estas bases, empezaré al desarrollo de la crítica de la teoría de Rayleigh desde el punto de vista de las ideas de Lorentz y trataré de poner en evidencia cuan poco de acuerdo resulta con los hechos experimentales.

En cuanto á la segunda parte, la reservo al estudio de la teoría de Planck, á la de los calores específicos de Einstein y á la extensión de la hipótesis de los *quanta* que debemos á Sommerfeld.

Por último, me propongo estudiar las varias aplicaciones de la teoría de Planck hechas por Nernst á unos problemas físicoquímicos y también á la hipótesis de los magnetones de Langevin.

Mi propósito no es dar aquí una exposición completa de aquellas teorías, sino un resumen general en forma suficiente para que mis lectores adquieran una noción precisa de las nuevas ideas, cuyo destino quizas será revolucionar completamente los principios de la filosofía natural que, antes, habían resistido victoriosamente mientras se verificaban los progresos más prodigiosos.

# PRIMERA PARTE

## LA TEORÍA ESTADÍSTICA Y LA RADIACIÓN

## CAPÍTULO I

### TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES PERFECTOS

8. **Noción de probabilidad.** — Imaginemos un sistema mecánico cualquiera cuyo estado depende de un gran número de variables independientes, y, para ello, podemos tomar un ejemplo sencillo ó sea un polvo formado de partículas blancas y negras y encerrado en un frasco de vidrio. Supongamos que, en el estado inicial, los granitos blancos y negros se hallan por separado en dos capas, la una sobre la otra, y comuniquemos al frasco movimientos irregulares completamente arbitrarios. En seguida observaremos que se verifica poco á poco una mezcla de los dos polvos, y en un tiempo relativamente corto, la substancia ofrecerá un aspecto gris uniforme que ya no se modificará en adelante.

La explicación del fenómeno es muy sencilla si uno tiene en cuenta las probabilidades. En efecto, para todo sistema, existe una forma media *más probable* que las otras y tanto más probable cuanto más complicado resulta el sistema.

Supongamos que se pueda discernir individualmente cada una de las partículas que forman el polvo encerrado en el frasco. Una configuración cualquiera, en la cual cada granito ocupa una posición perfectamente determinada, no es ni más ni menos probable que otra, en la cual todos los granitos blancos están en el fondo del frasco y los negros arriba. Pero las configuraciones que dan una mezcla íntima de los polvos y dan lugar á un *aspecto medio gris* son mucho más numerosas que las que corresponden á una separación perfecta de los dos colores ó sea una región blanca y otra negra.

La diferencia entre aquellas probabilidades de los varios estados aumenta á medida que crece la complexidad del sistema. Por ejemplo, si en el frasco tenemos sólo tres ó cuatro granitos de cada color, y si

observamos durante mucho tiempo sus posiciones relativas, mientras comunicamos al frasco pequeños movimientos cualesquiera, notaremos que de vez en cuando se verifica una separación completa de los polvos blanco y negro. Pero cuando aumenta el número de los granitos, las separaciones se vuelven cada vez más raras y acaban muy pronto por no verificarse durante una experiencia, aunque el tiempo transcurrido sea muy largo.

Admitamos, por ejemplo, que en el frasco se hallen 10 gramos de cada color, comunicándoles un choque por segundo de modo que, cada vez, se modifique el arreglo de los mismos. Mediante fórmulas elementales muy conocidas, se calcula fácilmente que la separación completa de los polvos negro y blanco no se verificará sino una vez por cada período de:

$$\frac{20!}{10!\,10!} = 2.10^5 \text{ segundos,}$$

ó sea una vez por dos días y siete horas.

Si hay 20 granos de cada color, los polvos no se van á separar sino después de:

$$\frac{40!}{20!\,20!} = 10^{11} \text{ segundos,}$$

ó sea una vez por 3000 años. Si por último, hay 100 granos de cada clase, ya no se puede prever la separación sino después del enorme período de $10^{51}$ años.

Ahora bien, si consideramos el número de moléculas contenidas en un centímetro cúbico de materia, la probabilidad que se verifique un fenómeno excepcional en oposición con el principio de Carnot resultaría de un orden de pequeñez mucho mayor, y es esta consideración que nos tranquiliza respecto á la fijeza de aquel principio fundamental.

Observemos que todo lo que antecede, aplicable á las configuraciones dentro de un volumen dado, se aplica también con todo rigor á las velocidades ó energías cuando se supone conocida la energía total del sistema considerado.

9. **Definición de la presión de un gas en función de la velocidad de sus moléculas.** — Un gas puro se compone de moléculas en movimiento que todas tienen la misma masa $m$. Acciones notables no se pueden ejercer entre dos de ellas, sino cuando su distancia se vuelve, en

razón del movimiento, menor que cierto valor límite, el cual, para los gases perfectos, es despreciable con respecto á los caminos recorridos por las mismas, mientras quedan sometidas á acciones que se pueden considerar como insensibles.

Conforme á la ley de Avogadro se puede calcular los valores relativos de la masa $m$ para los distintos gases. Si cada unidad de volúmen contiene un promedio de N moléculas, la densidad $\rho$ del gas es dada por la relación:

$$\rho = \mathrm{N}m.$$

Ahora bien, según la ley de Avogadro N y, por lo tanto, $\frac{\rho}{m}$ son constantes para todos los gases sometidos á la misma presión y temperatura; resulta que $m$ es proporcional á la masa de una molécula gramo. Por otra parte, se llama *coeficientes moleculares* ó *atómicos* á los números que están entre sí como las masas de estos elementos materiales tomados en gases diferentes, y *molécula gramo o átomo gramo* á las masas de estos cuerpos designadas por los mismos coeficientes numéricos, cuando estos expresan gramos.

En la teoría cinética de los gases, hay que definir primero la presión $p$ en función de la *velocidad media* de las moléculas.

Supongamos que estas obedecen á todas las leyes de la dinámica, por ejemplo que en los choques que se verifican entre ellas ó con las paredes, los principios de la conservación de la fuerza viva y del movimiento del centro de gravedad quedan vigentes. En cuanto á las moléculas, admitiremos, lo que es en contra de todas las teorías más modernas, que son pequeñas esferas perfectamente elásticas é infinitamente poco deformables, suponiendo que las paredes del recipiente están formadas por planos lisos, también perfectamente elásticos.

Imaginemos, pues, un recipiente de volumen V lleno de gas; sobre las paredes las moléculas se reflejan como pelotas elásticas. Sea AB una porción de la pared de superficie $\sigma$, y elijamos por eje de las $x$ un eje normal á ésta, dirigido positivamente de dentro por afuera. La presión sobre $\sigma$ no varía evidentemente si se supone atrás un pequeño cilindro normal de base igual á $\sigma$, en el cual este elemento sería móvil paralelamente á su plano, como un pistón empujado allí por el choque de las moléculas.

Si se ejerce desde el exterior una fuerza P en el sentido de las $x$ negativas, se podría elegirla de modo que hiciera equilibrio al choque de las moléculas.

Durante un tiempo muy pequeño $dt$, puede suceder que unas moléculas lleguen á chocar con el pistón y ejerzan sobre éste fuerza que llamaremos $q_1$, $q_2$, $q_3$... Sea M la masa del pistón, U su velocidad en el sentido de las $x$ positivas, se tendrá durante el tiempo $dt$ en virtud del teorema del incremento de la cantidad de movimiento igual al impulso:

$$\mathrm{M}d\mathrm{U} = \mathrm{M}\frac{d\mathrm{U}}{dt}dt = (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots - \mathrm{P})dt$$

de donde:

$$\mathrm{M}(\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0) = -\mathrm{P}t + \sum\int_0^t q\,dt.$$

Para que P sea igual á la presión del gas, es preciso que el pistón no experimente ningún desplazamiento apreciable, lo que equivale á escribir:

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_0 = 0$$

de donde:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{t}\sum\int_0^t q\,dt \qquad (1)$$

abarcando la suma á todas las integrales tomadas con respecto á $q_1, q_2, q_3$...

Resulta de la relación (1) que la presión es igual al valor medio de la suma de todas las pequeñas presiones que se ejercen sobre el pistón por parte de las moléculas que chocan con él á instantes distintos, y ahora tenemos que calcular la integral para uno de los choques que experimenta el pistón por parte de una molécula durante el tiempo $t$.

Sea $m$ la masa de la molécula, $u$ la componente de su velocidad según el eje $ox$. El choque empieza á la época $t_1$ y termina á la época $(t_1 + \tau)$. Antes de la época $t_1$, la molécula no ejerce sobre el pistón ninguna acción y lo mismo sucede después de la época $(t_1 + \tau)$. Luego se tiene:

$$\int_0^t q\,dt = \int_{t_1}^{t_1+\tau} q\,dt.$$

Durante el choque, la fuerza que ejerce la molécula sobre el pistón, en virtud del principio de reacción, es igual y de sentido opuesto á la que ejerce el pistón sobre la molécula; se tiene, pues, según el teorema del incremento de la cantidad de movimiento:

$$m\frac{du}{dt}dt = -q\,dt,$$

y si designamos por $\xi$ la componente de la velocidad de la molécula según *ox* antes del choque, se volverá después del choque igual á $-\xi$ y se tendrá:

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} q dt = 2m\xi$$

lo que da, si se repite la misma operación con todas las moléculas que chocan con la pared, en virtud de la relación (1):

$$P = \frac{2}{t}\sum m\xi, \tag{2}$$

comprendiendo la suma á todas las moléculas que llegan á la pared durante el tiempo $t$.

La teoría cinótica de los gases nos enseña que, aún cuando se supone en el recipiente un gas homogéneo, es imposible que todas sus moléculas tengan al propio tiempo la misma velocidad. Con el fin de no salir del caso más general, supongamos que el recipiente contiene moléculas de distintas clases que vienen a rebotar sobre las paredes como pelotas elásticas.

Sean $n_1$V moléculas de masa $m_1$ y velocidad $c_1$, cuyas componentes según los tres ejes coordenados son $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, y admitamos que se encuentran repartidas uniformemente en el volumen V del recipiente, de modo que haya $n_1$ de ellas en la unidad de volumen. De igual modo, habría $n_2$V moléculas de masa $m_2$ y velocidad $c_2$, las componentes de esta siendo $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$, etc., hasta la clase de rango $i$, para la cual se tendría $n_i V_i$ $m_i$, $c_i$ ($\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$).

El estado del gas contenido en el recipiente ha de permanecer estacionario durante el tiempo $t$, lo que significa que si durante un tiempo $\tau$, unas cuantas de las $n_1$V moléculas pierden sus componentes de velocidad $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, con motivo de los choques con otras ó con las paredes, un número igual de otras moléculas tienen que tomar á su vez, por los choques, estas mismas componentes de velocidad.

Ahora hay que determinar cuantas de las $n_1$V moléculas llegan al pistón durante el tiempo $t$.

Observemos por lo pronto que, durante un tiempo muy pequeño $dt$, todas las moléculas recorren un espacio $c_1 dt$ en una dirección tal que las proyecciones del camino recorrido sean $\xi_1 dt$, $\eta_1 dt$, $\zeta_1 dt$. Si $\xi_1$ es negativa, las moléculas correspondientes no llegan al pistón, pero si $\xi_1$ es positiva, podemos, en el recipiente imaginar un cilindro oblicuo

de base $\sigma$ igual á la sección del pistón, y de generatrices paralelas é iguales á $c_1 dt$. Las de nuestras moléculas que se encontraban en este cilindro al principio del instante $dt$, y sólo ellas, podrán encontrar al pistón durante el mismo instante. Sea $d\nu$ el número de estas moléculas; las $n_1 V$ se encuentran por lo general repartidas uniformemente en todo el recipiente, y esta distribución uniforme media se prolonga hasta la vecindad de la pared, pues las que chocan con ésta se reflejan como si tal pared no existiera y más allá se extendiese el mismo gas. Resulta que $n_1 V$ es á $d\nu$ como V es al volumen del cilindro oblicuo, siendo este igual á $\sigma\xi_1 dt$; luego se tiene :

$$\frac{d\nu}{n_1 V} = \frac{\sigma\xi_1 dt}{V}$$

de donde

$$d\nu = n_1 \sigma \xi_1 dt. \qquad (3)$$

De este modo, si el estado del gas permanece estacionario durante el tiempo $t$, habrá $n_1\sigma\xi_1 t$ de nuestras $n_1 V$ moléculas que llegarán al pistón, siendo la masa de ellas uniformemente igual á $m_1$ y, antes del choque, la componente de velocidad normal á $\sigma$ igual á $\xi_1$. Resulta que la suma $\Sigma m\xi$, cantidad de movimiento de la relación (2), tiene por valor :

$$\sigma t n_1 m_1 \xi_1^2,$$

y si se repite el mismo razonamiento con todas las clases de moléculas, se tendrá :

$$P = \frac{2\sigma}{t}\Sigma t n_i m_i \xi_i^2 = 2\sigma \Sigma n_i m_i \xi_i^2,$$

de donde, para la presión $p$ referida á la unidad de superficie de la pared, é igual á $\frac{P}{\sigma}$ :

$$p = 2\Sigma n_i m_i \xi_i^2,$$

siendo $\xi_i$ positiva, y debiendo la suma abarcar á todas las clases de moléculas contenidas en el recipiente, cuya componente de velocidad $\xi$ es positiva.

Observemos que la fórmula es también aplicable cuando $\sigma$ es infinitamente pequeña, ó sea cuando la pared no presente en ninguna parte elemento plano finito.

Ahora bien, hemos de admitir que hay tantas moléculas que se des-

plazan en el sentido positivo como en el sentido negativo, luego la expresión :

$$\Sigma m_i n_i \xi_i^2$$

para las moléculas cuya $\xi$ es negativa ha de tener el mismo valor dado por la expresión que corresponde á las con $\xi$ positiva, y tendremos :

$$p = \Sigma n_i m_i \xi_i^2 \qquad (4)$$

sin distinción de signo para $\xi_i$, teniendo $i$ que tomar en la suma todos los valores entre 1 é $i$.

10. **Valores medios.** — Admitamos ahora que cierta magnitud $g$ tenga para $n_1$ moléculas el valor $g_1$, para $n_2$ moléculas el valor $g_2$, y así sucesivamente, podemos escribir :

$$\bar{g} = \frac{\Sigma n_i g}{n}$$

y designar esta expresión con el nombre de *valor medio* de $g$, siendo $n = \Sigma n_i$ el número total de las moléculas.

Con este convenio podemos escribir también :

$$p = n\overline{m\xi^2} \qquad (5)$$

ó bien, si todas las moléculas tienen igual masa :

$$p = nm\overline{\xi^2}.$$

Ahora bien, si el gas tiene iguales propiedades en todas las direcciones, lo que equivale á suponerlo isótropo, se tiene evidentemente :

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2}.$$

Por otra parte, tenemos para cada molécula :

$$c^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

de donde :

$$\overline{c^2} = \overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2}$$

y por consiguiente :

$$\overline{c^2} = 3\overline{\xi^2}$$

$$\overline{\xi^2} = \frac{1}{3}\overline{c^2},$$

y luego :

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{c^2}. \tag{6}$$

Observemos que *nm* es la masa total contenida en la unidad de volumen del gas, igual por consiguiente á su densidad $\rho$, lo que nos autoriza á escribir :

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{c^2} \tag{7}$$

y si $\rho$ y $p$ se pueden determinar experimentalmente, podremos deducir de sus magnitudes el *valor medio del cuadrado de la velocidad.*

Con este método se ha encontrado á 0° para el valor de $\sqrt{\overline{c^2}}$ :

| | |
|---|---|
| Oxígeno ........................ | 461 $\frac{m}{seg.}$ |
| Nitrógeno........................ | 492 » |
| Hidrógeno ........................ | 1844 » |

$\sqrt{\overline{c^2}}$ expresa la velocidad cuyo cuadrado sería igual al promedio de los cuadrados de las velocidades de las moléculas, ó sea la velocidad con la cual habrían de desplazarse todas las moléculas para engendrar en el gas la presión que ejerce sí, teniendo una velocidad uniforme, se desplazaran simétricamente en todas las direcciones del espacio. El valor es, por otra parte, del mismo orden de magnitud que la velocidad media de una molécula y no se diferencia de ésta sino en un factor númerico.

Por otra parte, ya tenemos la fórmula empírica conocida :

$$\rho = \rho_0 p \frac{273}{T}$$

en la cual $\rho_0$ es la densidad del gas que corresponde á una presión igual á 1 dyne por centímetro cuadrado y á la temperatura absoluta 273, de donde sacamos :

$$\overline{c^2} = \frac{3}{\rho_0}\frac{T}{273} \tag{8}$$

Esta fórmula determina completamente para un gas perfecto el valor de $c^2$, sin que eso permita deducir ninguna consecuencia con res-

pecto á los valores peculiares de $c$, puesto que la relación anterior se verifica *cualquiera sea la ley de repartición de las velocidades*, y precisamente tenemos ahora que ocuparnos de esta cuestión.

11. **Puntos de velocidad y choques de la especie definida.** — Supongamos que en un recipiente se encuentre encerrado un gas cuyas moléculas sean todas iguales. Además admitamos que actúan en sus choques mutuos como pelotas perfectamente elásticas. Aunque se suponga que tengan todas velocidades iniciales iguales, estas no van á quedar iguales después de un choque.

Consideremos, por ejemplo, una molécula cuya velocidad se apartaría poco de la línea de los centros, teniendo la molécula con la cual tropieza una velocidad poco diferente de la perpendicular á la primera. Después del choque, la molécula chocante tomará una velocidad poco diferente de cero, y la otra una más ó menos $\sqrt{2}$ veces mayor. En razón de los choques siguientes, si el número de las moléculas es muy grande, se tendrá todas las velocidades posibles desde cero hasta un valor notablemente mayor que el valor común inicial de las velocidades de todas las moléculas. Se trata de saber cómo se reparten estas distintas velocidades en el estado final del gas, ó, en resumidas cuentas, de determinar la ley de repartición de las mismas.

Para conseguirlo, tenemos que considerar un caso más general y admitir, por ejemplo, que tenemos dos clases de moléculas en el recipiente.

Cada molécula de la primera especie tiene la masa $m_1$ y cada una de la segunda la masa $m_2$, y para abreviar designaremos cada clase de moléculas por estos símbolos $m_1$ y $m_2$. Para representar la repartición de las velocidades de las moléculas $m_1$ á una época dada $t$, tracemos desde el origen de las coordenadas tantas rectas como hay moléculas $m_1$ en la unidad de volumen, cada una de ellas siendo paralela é igual á la velocidad de la molécula correspondiente. Designamos también para abreviar por *punto de velocidad* de cada molécula la extremidad del vector.

Sea ahora, á la época $t$:

$$f_1(\xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1, \quad t)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 \tag{1}$$

el número de las moléculas $m_1$ para las cuales las componentes de velocidad según los tres ejes están comprendidas entre los límites:

$$\xi_1 \quad \text{y} \quad (\xi_1 + d\xi_1), \qquad \eta_1 \quad \text{y} \quad (\eta_1 + d\eta_1), \qquad \zeta_1 \quad \text{y} \quad (\zeta_1 + d\zeta_1). \tag{2}$$

Para estas moléculas, el *punto de velocidad* está situado en un paralelepípedo cuyo uno de los vértices tiene por coordenadas $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, y cuyas aristas paralelas á los ejes tienen por longitudes $d\xi_1$, $d\eta_1$, $d\zeta_1$. Designemos por $d\tau$ el volumen de dicho paralelepípedo, igual á $d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$.

Si $d\tau_1$ es un elemento de volumen de forma cualquiera que contenga el punto $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, el número de las moléculas $m_1$, cuyo punto de velocidad está en $d\tau_1$, será igual como antes á :

$$f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t)\, d\tau_1 \tag{3}$$

lo que se averigua si se divide $d\tau$ en paralelepípedos mucho más pequeños. Por otra parte, si la función $f_1$ es dada para una época $t$, la repartición de las velocidades para las moléculas $m_1$ estará conocida también para la misma época.

Análogamente representemos la velocidad de cada molécula $m_2$ por un punto de velocidad y designemos por :

$$F_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, t) d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2 = F_2 d\tau_2 \tag{4}$$

el número de las moléculas $m_2$ cuyas componentes de velocidad están comprendidas entre los límites :

$$\xi_2 \quad \text{y} \quad (\xi_2 + d\xi_2), \qquad \eta_2 \quad \text{y} \quad (\eta_2 + d\eta_2, \qquad \zeta_2 \quad \text{y} \quad (\zeta_2 + d\zeta_2)$$

para los cuales el punto de velocidad se encuentra dentro de un paralelepípedo $d\tau_2$ cualquiera.

Apartemos desde luego la hipótesis de toda fuerza exterior que actuaria sobre el gas, y supongamos las paredes perfectamente lisas y elásticas. Entonces, las moléculas que se reflejan sobre las paredes se desplazarán precisamente como si procedieran de otro gas que resultaría ser algo como la *imagen del primero* en un espejo plano formado por la pared y que tendría una constitución idéntica á la del otro.

Dentro de esta hipótesis, se encuentra el gas en las mismas condiciones en todos los puntos internos al recipiente, y si, en el origen de los tiempos, el número de las moléculas contenidas en la unidad de volumen, cuyas componentes de velocidad están comprendidas entre los límites fijados, fuera igual en promedio en todos los puntos del gas, estas mismas condiciones seguirían observadas á cualquier otra época.

Supondremos, pues, que el número de las moléculas $m_1$ que satisfa-

cen á la misma condición de límites fijos, contenidas en un volumen V cualquiera es proporcional á este volumen é igual por consiguiente á :

$$Vf_1 d\tau_1 :$$

del mismo modo, el número de las moléculas $m_2$ que se encuentran en el volumen V y satisfacen á las mismas condiciones, tiene por expresión :

$$VF_2 d\tau_2.$$

Resulta de estas hipótesis que si las moléculas salen, en razón de sus movimientos de translación, fuera de una región dada del espacio, están substituídas, en régimen medio, por un número igual de otras semejantes que penetran allí procediendo de la vecindad ó vuelven por reflexión experimentada en la pared, de modo que la repartición de las velocidades no se puede modificar sino por choques de las moléculas y nunca en virtud de sus movimientos de traslación.

Consideremos, pues, el choque de una molécula $m_1$ con una molécula $m_2$, y de todos los choques que se verifican en la unidad de volumen durante el tiempo *dt*, consideremos sólo los que satisfacen á las condiciones siguientes :

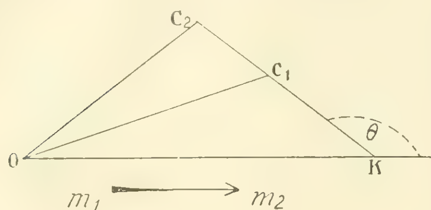
1° Las componentes de la velocidad de la molécula $m_1$ antes del choque son comprendidas entre los límites $\xi_1$ y $(\xi_1 + d\xi_1)$ ya fijados, el punto de velocidad encontrándose por lo tanto dentro del paralelepípedo $d\tau_1$.

2° Los componentes de la velocidad de la molécula $m_2$, antes del choque, están comprendidas entre los límites $\xi_2$ y $(\xi_2 + d\xi_2)$, el punto de velocidad encontrándose, pues, en el elemento $d\tau_2$. Llamaremos, por otra parte, moléculas $m_1$ de la *especie definida* á todas las que satisfagan la primera condición, y moléculas $m_2$ de la *especie definida* á todas las que satisfagan á la segunda.

3° Si construímos una esfera de radio igual á 1 que tenga su centro en el origen, y si en ella recortamos un elemento de superficie $d\sigma$, la recta uniendo al centro de la molécula $m_1$ con el de la molécula $m_2$ tendrá que ser, cuando se verifique el choque, paralela á otra recta que una el origen con un punto cualquiera del elemento $d\sigma$, y llamaré *cono* $d\sigma$ al conjunto de dichas rectas, hallándose la dirección $m_1m_2$ dentro de este cono.

Por último y para abreviar, designaré con el nombre de *choques de la especie definida* á los que se verifiquen entre moléculas que satisfagan á las tres condiciones anteriores, y buscaré el número $d\nu$ de choques de esta clase que han de efectuarse en la unidad de volumen durante el tiempo *dt*.

Sean $o$ el origen, $c_1$ y $c_2$ los puntos de velocidad de las dos moléculas $m_1$ y $m_2$ antes del choque. Los vectores $oc_1$ y $oc_2$ representan sus velocidades en magnitud y dirección. El punto $c_1$ ha de encontrarse en el paralelepípedo $d\tau_1$ y el punto $c_2$ en el paralelepípedo $d\tau_2$. Ahora bien, sea $o$K un vector igual á la unidad y cuya dirección es paralela á la recta de los centros $m_1m_2$ cuando se verifica el choque; el punto K ha de hallarse en el elemento de superficie $d\sigma$ de la esfera de radio igual á 1 y de centro $o$. La distancia :




$$c_2c_1 = g$$

representará en magnitud y dirección la velocidad *relativa* de la molécula $m_1$ con respecto á la $m_2$ antes del choque, pues sus proyecciones en los ejes son :

$$\xi_2 - \xi_1, \qquad \eta_2 - \eta_1, \qquad \zeta_2 - \zeta_1$$

Por otra parte, la frecuencia de los choques no puede depender sino de las velocidades relativas, y, por esto, se puede buscar el número de los *choques de la especie definida* suponiéndose las moléculas $m_2$ de la misma especie en estado de reposo y las $m_1$ animadas de una velocidad $g$.

Supongamos que á cada una de estas últimas esté ligada una esfera de radio $r$ cuyo centro coincida siempre con el de la molécula, siendo $r$ igual á la suma de los radios de las moléculas $m_1$ y $m_2$. Cada vez que la superficie de una de estas esferas alcanza el centro de una moléculo $m_2$, hay choque entre una molécula $m_1$ y otra $m_2$.

Tracemos ahora por el centro de cada esfera $r$ un cono igual al cono $d\sigma$ é igualmente colocado ; recortará sobre la esfera $r$ un elemento de superficie $r^2d\sigma$.

Estando todas las esferas $r$ ligadas con las moléculas correspondientes, todos los elementos $r^2d\sigma$, durante un tiempo $dt$, recorren un camino $gdt$ con respecto á las moléculas $m_2$ de la especie definida. Un choque de la misma especie se verifica cada vez que un elemento $r^2d\sigma$ encuentra el centro de una molécula $m_2$ de la misma especie, lo que por supuesto no es posible sino con la condición que el ángulo $\theta$ formado por las direcciones $c_1c_2$ y $o$K sea *agudo*. Cada uno de los elementos recorre, en su movimiento relativo respecto á la molécula $m_2$

considerada, un cilindro oblicuo de la base $r^2 d\sigma$ y altura $g$ cos $\theta dt$.

Ahora bien, habiendo en la unidad de volumen, como lo sabemos, $f_1 d\tau_1$ moléculas $m_1$ de la especie definida, todos los cilindros oblicuos engendrados de este modo por los elementos $r^2 d\sigma$ representan un volumen total:

$$\Phi = f_1 d\tau_1 r^2 g \cos \theta d\sigma dt. \qquad (1)$$

Todas las moléculas $m_2$ de la especie definida que se hallan en dicho volumen $\Phi$ se encontrarán durante el tiempo $dt$ con uno de estos elementos de superficie $r^2 d\sigma$, y el número $d\nu$ de los choques de la especie definida que se verifiquen en la unidad de volumen durante el mismo tiempo $dt$ será igual al número de los centros de moléculas $m_2$ de la misma especie que se hallen al principio del instante $dt$ en el volumen $\Phi$. Por lo tanto, si representamos este número por $Z_\Phi$, podremos escribir:

$$Z_\Phi = \Phi F_2 d\tau_2. \qquad (2)$$

Supondré, con Maxwell y Boltzmann, en todo lo que sigue, que el movimiento carece de *organización* de conjunto ó molecular y permanece en este estado indefinidamente.

Expliquemos el sentido que Boltzmann atribuye á la palabra organización molecular *(geordnete)*.

Desde el punto de vista mecánico, toda disposición de las moléculas en el recipiente es evidentemente posible. Por ejemplo, se puede suponer que unos parámetros que determinan el movimiento de las moléculas tienen, en ciertas regiones del espacio ocupado por el gas, valores medios distintos de los que poseen en otras regiones, y que la presión ó la velocidad media de las moléculas es mayor en una parte del recipiente que no en la otra. Por último, y de un modo general, podemos admitir que una porción del gas se manifieste en otra forma que lo demás. En tal caso se dice que la repartición goza de una *organización de conjunto.*

Ahora bien, nuestras fórmulas anteriores corresponden evidentemente al caso de una repartición sin tal organización *(ungeordnete)*.

Dadas estas explicaciones, podemos escribir:

$$d\nu = Z_\Phi = \Phi F_2 d\tau_2 = f_1 d\tau_1 \; F_2 d\tau_2 \; r^2 g \cos \theta d\sigma dt, \qquad (3)$$

expresión que nos da el número buscado de los choques de la especie definida que se verifican en la unidad de volumen, durante el tiempo $dt$.

Despreciemos los choques de las moléculas que no hacen sino ro-

zarse, cuyo número es evidentemente infinitamente pequeño de orden superior, y entonces cada choque va á modificar, en una cantidad finita, al menos á una de las componentes de la velocidad tanto de una como de otra de las dos moléculas. Luego, cada choque de la especie definida va á reducir en una unidad, tanto el número $f_1 d\tau_1$ de las moléculas $m_1$ contenidas en la unidad de volumen y cuyas componentes de velocidad están comprendidas entre $\xi_1$ y $(\xi_1 + d\xi_1)$ llamadas de la especie definida, como el número $F_2 d\tau_2$ de las moléculas $m_2$ de la misma especie incluídas también en la unidad de volumen.

Para determinar la diminución total $\int d\nu$ que experimenta el número $f_1 d\tau_1$ durante el tiempo $dt$ en razón de todos los choques de las moléculas $m_1$ con las $m_2$, hemos de considerar en la fórmula (3) $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, $d\tau_1$ y $dt$ como constantes, é integrar con respecto á $d\tau_2$ y $d\sigma$ para todos los valores posibles, ó sea con respecto á $d\tau_2$ para todos los elementos de volumen del espacio, y con respecto á $d\sigma$ para todos los elementos de la esfera, á los cuales corresponden valores agudos del ángulo $\theta$, y podemos designar por $\int d\nu$ el resultado de la integración.

Sea pues $dn$ la diminución experimentada por el número $f_1 d\tau_1$ en virtud de los choques convenientes entre las moléculas $m_1$; esta reducción tendrá por expresión otra fórmula del todo análoga, si designamos por $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$ las componentes de la velocidad de otra molécula $m_1$ antes del choque, conservando las demás magnitudes su significación, siempre que se reemplace $m_2$ por $m_1$, la función $F_2$ por $f_2$ y $r$ por el diámetro $s$ de una molécula $m_1$.

Así se tiene:

$$dn = f_1 f_2 \, d\tau_1 d\tau_2 \, s^2 g \cos\theta d\sigma dt \tag{4}$$

expresión en la cual $f_2$ representa por abreviación a la función $f_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, t)$.

Por último, aquí también podemos representar por $\int dn$ la diminución total que experimenta el número $f_1 d\tau_1$ durante el tiempo $dt_1$ en razón de los choques de las moléculas $m_1$ las unas con las otras. Se considera otra vez las cantidades $\xi_1$, $\eta_1$, $dt$ como constantes, habiendo de comprender la integración á todos los valores posibles de $d\tau_2$ y $d\sigma$.

La diminución total que experimenta $f_1 d\tau_1$ durante el tiempo $dt$ tiene pues por expresión:

$$\int d\nu + \int dn.$$

Si el estado del gas es estacionario, este número ha de ser exactamente igual al de las moléculas $m_1$ por unidad de volumen cuya velocidad, al principio del intante $dt$, no satisface á las condiciones de límite entre $\xi_1$ y $(\xi_1 + d\xi_1)$, sino que ha cambiado en virtud de los choques de modo que al fin del instante satisfaga á las mismas, ó sea de las moléculas á las cuales los choques comunican durante el tiempo $dt$, una velocidad comprendida entre los mismos límites. El mismo número, pues, es además igual al incremento total que experimenta $f_1 d\tau_1$ en razón de los choques.

12. **Ley de repartición de las velocidades de Maxwell.** — Para determinar este incremento, buscaremos primero, para uno de los choques de que hablamos, la *velocidad de las dos moléculas después del choque.*

Antes de que se verifique éste, una de las moléculas de masa $m_1$ tiene por componentes de velocidad $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ y la otra de masa $m_2$ las componentes $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$. La recta de los centros $m_1 m_2$ forma en el acto del choque el ángulo $\theta$ con la velocidad relativa de $m_1$ con respecto á $m_2$. El choque se encontrará completamente determinado si conocemos además el ángulo $\omega$ que forma el plano de aquellas dos rectas con un plano dado, por ejemplo el de las velocidades antes del choque.

Sean pues $\xi_1'$, $\eta_1'$, $\zeta_1'$, $\xi_2'$, $\eta_2'$, $\zeta_2'$, las componentes de las velocidades después del choque. Se puede expresarlas por medio de funciones de ocho variables $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$ $\theta$, $\omega$ y se tiene :

$$\xi_1' = \psi_1 (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \theta, \omega)$$
$$\eta_1' = \psi_2 (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \theta, \omega)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Observemos que es muy preferible valernos, para esta determinación, de un procedimiento de construcción geométrica.

Volvamos, pues, á la figura que representa los vectores $oc_1$, $oc_2$ y $oK$, y dividamos el segmento $c_2 c_1$ en otros dos proporcionales á $m_1$ y $m_2$, tendremos :

$$\frac{c_2 s}{c_1 s} = \frac{m_1}{m_2}.$$

El vector *os* representa entonces la velocidad del centro de gravedad del conjunto de las moléculas, pues sus proyecciones en los ejes tienen por valores respectivos:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{m_1\xi_1 + m_2\xi_2}{m_1 + m_2} \\ v &= \frac{m_1\eta_1 + m_2\eta_2}{m_1 + m_2} \\ w &= \frac{m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

que son en efecto las componentes de la velocidad del centro de gravedad.

Pero si el choque no modifica el movimiento de este centro de gravedad, se tiene también:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{m_1\xi_1' + m_2\xi_2'}{m_1 + m_2} \\ v &= \frac{m_1\eta_1' + m_2\eta_2'}{m_1 + m_2} \\ w &= \frac{m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2'}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Por otra parte, del mismo modo que hemos probado que $c_1c_2$ es la velocidad relativa de la molécula $m_1$ con respecto á $m_2$, podríamos demostrar que $sc_1$ y $sc_2$ son, antes del choque, las velocidades de $m_1$ y $m_2$ con respecto al centro de gravedad del sistema.

Las componentes de estas velocidades relativas en la dirección normal a la recta de los centros no cambian después del choque. En la dirección *o*K, siendo las componentes antes del mismo $p_1$ y $p_2$, se transformarán después en $p_1'$ y $p_2'$. Ahora bien, conforme al principio de la conservación del movimiento del centro de gravedad, tendremos:

$$m_1p_1 + m_2p_2 = m_1p_1' + m_2p_2' = 0$$

y según el principio de la conservación de las fuerzas vivas:

$$m_1p_1^2 + m_2p_2^2 = m_1p_1'^2 + m_2p_2'^2 \qquad (4)$$

De estas dos últimas relaciones, se deduce:

$$p_1' = p_1, \qquad p_2' = p_2$$

o bien

$$p_1' = -p_1, \qquad p_2' = -p_2.$$

Observaremos que la segunda solución es la única posible, puesto que las dos moléculas tienen que apartarse la una de la otra después del choque, y por consiguiente las dos componentes de la velocidad relativa con respecto al centro de gravedad, dirigidas según la recta $K_2K_1$ paralelamente a $oK$, han de cambiar de signo.

Ahora tenemos que construír los vectores que representan, después del choque, las velocidades de ambas moléculas en magnitud, dirección y sentido. En el plano de las rectas $K_1K_2$ y $c_2c_1$ tracemos los dos segmentos $sc_1$ y $sc_2''$ iguales respectivamente á $sc_1$ y $sc_2$ é igualmente inclinados sobre $K_1K_2$ del lado opuesto. Las extremidades $c_1'$ y $c_2'$ de estos segmentos serán también las de los vectores buscados $oc_1'$ y $oc_2'$.

Se puede considerar $c_1'$ y $c_2'$ como los puntos de velocidad de las dos moléculas después del choque, y las proyecciones de los vectores sobre los ejes coordenados son los componentes $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ y $\xi_2', \eta_2', \zeta_2'$ de las velocidades de las dos moléculas también después del choque.

En cuanto a los tres puntos $c_2'$, $s$ y $c_1'$, son colineales, y el segmento $c_2'c_1'$ representa la velocidad relativa de la molécula $m_1$ con respecto a la molécula $m_2$ después del choque, y se ve que la longitud es igual a $c_1c_2$, siendo al ángulo que forma con $oK$ igual a $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

No olvidemos que no hemos considerado sino uno solo de los choques de la especie definida, para la determinación de las velocidades después del mismo. Ahora hemos de considerar todos los choques de la misma especie, o sea los para los cuales las condiciones fijadas en el párrafo anterior (11) están satisfechas antes del choque, y buscar entre qué límites estan comprendidas las variables después del mismo.

Como suponemos infinitamente pequeña la duración de éste, la dirección de la recta de los centros queda sin cambio antes y después, y el problema se reduce a encontrar los límites entre los cuales están comprendidas después del choque las componentes $\xi_1', \eta_1', \zeta_1', \xi_2', \eta_2', \zeta_2'$. Los ángulos $\theta$ y $\omega$ han de ser considerados siempre como constantes. Sea, pues, el producto :

$$d\xi_1 . d\eta_1 . d\zeta_1 . d\xi_2 . d\eta_2 . d\zeta_2 \tag{5}$$

tendremos que expresar en función del mismo al otro producto

$$d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_1'\, d\xi_2'\, d\eta_2'\, d\zeta_2'.$$

Para ello, consideremos primero en la expresión (5) como si fueran constantes a las variables $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$, y substituyamos $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ por $u$, $v$, $w$, lo que es fácil valiéndonos de las ecuaciones:

$$u = \frac{m_1\xi_1 + m_2\xi_2}{m_1 + m_2}$$

. . . . . .

. . . . . .

se tiene

$$\left\{\begin{aligned} du &= \frac{m_2 d\xi_2}{m_1 + m_2} \\ dv &= \frac{m_2 d\eta_2}{m_1 + m_2} \\ dw &= \frac{m_2 d\zeta_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right.$$

lo que nos da:

$$\left\{\begin{aligned} d\xi_2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} du \\ d\eta_2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} dv \\ d\zeta_2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} dw \end{aligned}\right.$$

de donde

$$d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)^3 du dv dw$$

y luego

$$d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)^3 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 du dv dw.$$

Reemplacemos ahora $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ por las componentes de velocidad $\xi_1'$, $\eta_1'$, $\zeta_1'$ de la misma molécula $m_1$ después del choque; ya se ve por la figura que, no cambiando $u$, $v$, $w$, el punto $s$ permanece fijo, y como $\theta$ y $\omega$ quedan también constantes, el segmento $K_1K_2$ no experimenta ninguna variación. Luego, el elemento de volumen:

$$d\tau_1' = d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1'$$

no es sino el elemento que describe el punto $c_1$ cuando $s$ y $K_1K_2$ permaneciendo fijos, el punto $c_1$ describe un elemento de volumen dado arbitrariamente :

$$d\tau_1 = d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1,$$

y la perfecta simetría de la figura nos muestra que los elementos se corresponden. Luego se tiene :

$$d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 = d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1'$$

y por consiguiente :

$$d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 = \left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)^3 d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1' du dv dw. \tag{6}$$

Si ahora dejamos $\xi_1'$, $\eta_1'$, $\zeta_1'$ constantes, hemos de introducir en el segundo miembro $\xi_2'$, $\eta_2'$, $\zeta_2'$ en el lugar de *du, dv, dw.*

Pero si se considera $\xi_1'$, $\eta_1'$, $\zeta_1'$ como constantes en las igualdades (2) :

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{m_1\xi_1' + m_2\xi_2'}{m_1+m_2} \\ v &= \frac{m_1\eta_1' + m_2\eta_2'}{m_1+m_2} \\ w &= \frac{m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2'}{m_1+m_2} \end{aligned}\right.$$

se tiene diferenciando :

$$\left\{\begin{aligned} du &= \frac{m_2 d\xi_2'}{m_1+m_2} \\ dv &= \frac{m_2 d\eta_2'}{m_1+m_2} \\ dw &= \frac{m_2 d\zeta_2'}{m_1+m_2} \end{aligned}\right.$$

de donde :

$$du dv dw = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^3 d\xi_2' d\eta_2' d\zeta_2'$$

lo que da, si reemplazamos en la relación (6)

$$d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 = d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1' d\xi_2' d\eta_2' d\zeta_2' \tag{7}$$

ó, lo que es equivalente :

$$d\tau_1 d\tau_2 = d\tau_1' d\tau_2'$$

13. **Choques de la especie contraria.** — Fuera de los choques definidos anteriormente. tenemos que considerar ahora otra especie de choques de una molécula $m_1$ con otra molécula $m_2$, y los designaremos con el nombre de *choques de la especie contraria.* Veamos las condiciones que los caracterizan :

1° *El punto de velocidad* de la molécula $m_1$, antes del choque, ha de encontrarse en el elemento de volumen $d\tau_1'$. El número de las moléculas $m_1$ que están en la unidad de volumen y para las cuales dicha condición está satisfecha es igual al producto $f_1' d\tau_1'$, siendo $f_1'$ el valor que toma la función $f_1$, cuando se substituye en ella $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ por $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$. Así se tiene :

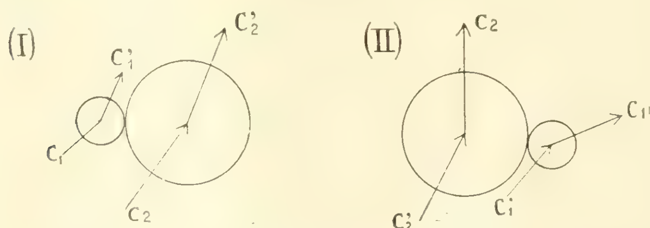
$$f_1' = f_1(\xi_1', \eta_1', \zeta_1') ;$$

2° *El punto de velocidad* de la molécula $m_2$, antes del choque, ha de encontrarse en el elemento de volumen $d\tau_2'$. El número de las moléculas $m_2$, que están en la unidad de volumen y para las cuales dicha condición está satisfecha, es igual al producto $F_2' d\tau_2'$, siendo $F_2'$ el valor que toma la función $F_2$ cuando se substituyen en ella $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ por $\xi_2', \eta_2', \zeta_2'$, lo que da :

$$F_2' = F_2(\xi_2', \eta_2', \zeta_2') :$$

3° La recta de los centros de las dos moléculas, cuando se produce el choque, trazada desde $m_2$ hacia $m_1$, ha de ser paralela á una recta que parte del origen en el cono $d\sigma$.

La figura (I) representa un choque de la especie definida correspon-




diente á la figura esquemática del párrafo anterior, mientras la figura (II) representa un choque de la especie contraria.

Las flechas que van hacia el centro son las velocidades antes del choque, y las que arrancan del mismo son las después del choque.

En todos los choques de la especie contraria, la velocidad relativa de la molécula $m_1$ con respecto á $m_2$, antes del choque, está representada en magnitud y dirección por el segmento $c_2'$ $c_1'$ de la figura esquemática ya aludida. Su magnitud es otra vez $g$, y forma con la recta de los centros (desde $m_1$ á $m_2$) un ángulo otra vez igual á $\theta$, puesto que el sentido de la recta de los centros está también cambiado. Por otra parte, el ángulo $\theta$ por supuesto ha de ser agudo para que el choque sea posible. En cuanto al número de los choques de esta especie contraria que se verifican durante el tiempo $dt$ en la unidad de volumen, es dado por una fórmula del todo análoga á la de la especie definida, ó sea :

$$d\nu'=f_1'F_2'd\tau_1'd\tau_2'r^2g \cos \theta d\sigma dt \tag{1}$$

Se da á estos choques el nombre de choques de la especie contraria, porque dan lugar á una marcha opuesta á la de la especie definida, lo que significa que las velocidades de las dos moléculas, *después del choque,* satisfacen á las condiciones límites á las cuales satisfacían, *antes del choque,* las velocidades correspondientes á las de la especie definida.

En virtud de cada uno de estos choques de la especie contraria, el número $f_1d\tau_1$, como también el número $F_2d\tau_2$, crecen en una unidad.

Para encontrar el incremento total experimentado por $f_1d\tau_1$, en razón de los choques de las moléculas $m_1$ con las moléculas $m_2$ durante el tiempo $dt$, basta substituír en la expresión diferencial (1) $\xi_1'$, $\eta_1'$, $\zeta_1'$, $\xi_2'$, $\eta_2'$, $\zeta_2'$ por sus valores en función de $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$, $\theta$, $\omega$, lo que da, si se tiene en cuanta la igualdad :

$$d\tau_1'd\tau_2'=d\tau_1d\tau_2$$

$$d\nu'=f_1'F_2'd\tau_1d\tau_2r^2g \cos \theta d\sigma dt \tag{2}$$

Aquí hemos de observar que hemos conservado los símbolos $f_1'$, $F_2'$ y $d\sigma$, pero hay que considerar las variables $\xi_1'$, $\eta_1'$, $\zeta_1'$, $\xi_2'$, $\eta_2'$, $\zeta_2'$ como funciones de $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$, $\theta$ y $\omega$, y $d\sigma$ como la diferencial de $\omega$. Se consigue así la relación :

$$d\sigma = \text{sen } \theta d\theta d\omega \tag{3}$$

Por otra parte, en la expresión (2), es preciso considerar $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, $d\tau_1$ y $dt$ como constantes é integrar para todos los valores posibles de $d\tau_2$ y $d\sigma$. De este modo, se expresará todos los choques que se verifican entre una molécula $m_1$ y una molécula $m_2$, en tal forma que, para

la primera molécula, las componentes de velocidad, antes arbitrarias, satisfagan después las condiciones de la especie definida.

La integral $\int d\nu'$ dará pues el incremento de $f_1 d\tau_1$, consecuencia de los choques de las moléculas $m_1$ con las moléculas $m_2$ durante el tiempo $dt$.

Del mismo modo se encontraría, para los choques de las moléculas $m_1$ las unas con las otras, un valor $\int dn'$ mediante la integración de la expresión:

$$dn' = f_1' f_2' d\tau_1 d\tau_2 s^2 g \cos \theta d\sigma dt \qquad (4)$$

en la cual $f_2'$ tiene por valor:

$$f_2' = f_1(\xi_2', \eta_2', \zeta_2').$$

En cuanto á $\xi_1', \eta_1', \zeta_1', \xi_2', \eta_2', \zeta_2'$, son otras funciones de $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \theta$ y $\omega$ que representan las componentes de velocidad después de un choque que satisface á las condiciones iniciales de la especie definida, pero en el cual las dos moléculas tienen la masa $m_1$.

Ahora bien, si restamos del incremento total de $f_1 d\tau_1$ la diminución total también de la misma función, se tiene la variación:

$$df_1 d\tau_1 = \frac{df_1}{dt} d\tau_1 dt$$

que experimenta $f_1 d\tau_1$ durante el tiempo $dt$, lo que da:

$$\frac{df_1}{dt} d\tau_1 dt = \int d\nu' - \int d\nu + \int dn' - \int dn \qquad (5)$$

siendo las variables y los límites del campo de integración iguales en las dos primeras integrales, é iguales también en las dos últimas.

Reemplazando estas integrales por sus valores, se tiene:

$$\frac{df_1}{dt} d\tau_1 dt = \int f_1' F_2' d\tau_1 d\tau_2 r^2 g \cos \theta d\sigma dt - \int f_1 d\tau_1 F_2 d\tau_2 r^2 g \cos \theta d\sigma dt +$$
$$+ \int f_1' f_2' d\tau_1 d\tau_2 s^2 g \cos \theta d\sigma dt - \int f_1 f_2 d\tau_1 d\tau_2 s^2 g \cos \theta d\sigma dt$$

lo que da, después de dividir por $d\tau_1 dt$:

$$\frac{df_1}{dt} = \int (f_1' F_2' - f_1 F_2) r^2 g \cos \theta d\tau_1 d\sigma + \int (f_1' f_2' - f_1 f_2) s^2 g \cos \theta d\tau^2 d\sigma \qquad (6)$$

Del mismo modo se tendría :

$$\frac{dF_2}{dt} = \int (f_1'F_2' - f_1F_2)r^2g \cos \theta d\tau_1 d\sigma +$$

$$+ \int (F_1'F_2' - F_1F_2)s_2^2 g \cos \theta d\tau_1 d\sigma) \qquad (7)$$

siendo $s_2$ el diámetro de una molécula $m_2$.

En esta relación $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$ tienen valores constantes arbitrarios, y tenemos que integrar para todos los valores posibles de $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$. En cuanto á $\xi_1'$, $\eta_1'$, $\zeta_1'$, $\xi_2'$, $\eta_2'$, $\zeta_2'$, para la primera de las dos integrales, son las componentes de velocidad después del choque de la especie definida entre dos moléculas cuya una tiene la masa $m_1$ y la otra la masa $m_2$, y para la segunda integral, son las mismas cantidades, pero respecto á un choque entre dos moléculas de masa $m_2$.

Por último $F_1$ y $F_1'$ representan las expresiones :

$$F_1 = F_2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t)$$

$$F_1' = F_2(\xi_1', \eta_1', \zeta_1', t).$$

Teniendo el estado que permanecer *estacionario,* las derivadas $\frac{df_1}{dt}$ y $\frac{dF_2}{dt}$ son nulas para todos los valores de las variables, lo que no puede verificarse si los paréntesis no son nulos en cada integral, ó sea si no tenemos para todos los choques posibles entre las moléculas $m_1$ ó entre las moléculas $m_2$, y también entre una molécula $m_1$ y una molécula $m_2$ :

$$\left.\begin{array}{l} f_1 f_2 = f_1' f_2' \\ F_1F_2 = F_1'F_2' \\ f_1F_2 = f_1'F_2' \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Siendo por otra parte la probabilidad de los choques de la especie definida, expresada por la relación (3) :

$$d\nu = \Phi F_2 d\tau_2 = f_1 d\tau_1 F_2 d\tau_2 r^2 g \cos \theta d\sigma dt$$

del párrafo 11, y la de los choques de la especie contraria por la relación (1) del presente párrafo :

$$d\nu' = f_1'F_2'd\tau_1'd\tau_2'r^2 g \cos \theta d\sigma dt,$$

la significación general de la última de las relaciones (8) equivale á decir que, cualquiera sea el modo de elegir $d\tau_1$, $d\tau_2$ y $d\sigma$, los choques de la especie definida son tan frecuentes en promedio como los de la especie contraria, ó bien que hay tanta probabilidad para que las moléculas se aparten la una de la otra en ciertas direcciones, y para que se acerquen en las mismas direcciones. Observaremos por otra parte que este hecho está también expresado por las dos primeras relaciones (8) en cuanto á los choques entre moléculas $m_1$ ó entre moléculas $m_2$.

En resumen vemos que el estado de un gas ha de quedar estacionario si hay tantas probalidades para que dos moléculas cualesquiera se aparten después de un choque en una forma dada ó se acerquen en la misma forma.

14. **Resolución de las ecuaciones.** — Tratemos ahora de resolver las ecuaciones (8) del párrafo anterior :

$$\begin{cases} f_1 f_2 = f_1' f_2' \\ F_1 F_2 = F_1' F_2' \\ f_1 F_2 = f_1' F_2' \end{cases}$$

en las cuales se tiene :

$$F_1 = F_2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t)$$

$$F_1' = F_2(\xi_1', \eta_1', \zeta_1', t)$$

$$F_2 = F_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, t)$$

$$f_1' = f_1(\xi_1', \eta_1', \zeta_1', t)$$

$$F_2' = F_2(\xi_2', \eta_2', \zeta_2', t).$$

Boltzmann ha demostrado que las funciones $f_1$ y $F_2$ no dependen sino de la magnitud de la velocidad, y nunca de su dirección. Admitiremos, pues, sin demostración, que ni la forma del recipiente, ni otra circunstancia especial cualquiera, pueden influir sobre la repartición de las velocidades. En estas condiciones, si todas las direcciones del espacio son equivalentes, aquellas funciones han de quedar independientes de la dirección y nó pueden depender sino de la magnitud de las velocidades correspondientes $c_1$ y $c_2$, y designaremos por $c_1'$ y $c_2'$ las velocidades que corresponden á los casos en que las componentes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ están reemplazadas por los mismos símbolos con ápices.

Pongamos, pues, conforme á la observación anterior :

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = e^{\varphi(m_1c_1^2)} \\ F_2 = e^{\Phi(m_2c_2^2)} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} f_1' = e^{\varphi(m_1c_1'^2)} \\ F_2' = e^{\Phi(m_2c_2'^2)} \end{array}\right.$$

y la última de nuestras ecuaciones:

$$f_1F_2 = f_1'F_2'$$

se convertirá en:

$$e^{\varphi(m_1c_1^2)} \cdot e^{\Phi(m_2c_2^2)} = e^{\varphi(m_1c_1'^2)} \cdot e^{\Phi(m_2c_2'^2)},$$

de donde se deduce:

$$\varphi(m_1c_1^2) + \Phi(m_2c_2^2) = \varphi(m_1c_1'^2) + \Phi(m_2c_2'^2). \qquad (1)$$

Observamos que, en virtud de la conservación de la fuerza viva en cada choque, es preciso que se tenga:

$$m_2c_2'^2 = m_1c_1^2 + m_2c_2^2 - m_1c_1'^2$$

de donde:

$$\varphi(m_1c_1^2) + \Phi(m_2c_2^2) = \varphi(m_1c_1'^2) + \Phi(m_1c_1^2 + m_2c_2^2 - m_1c_1'^2). \qquad (2)$$

Los productos $m_1c_1^2$ y $m_2c_2^2$ son evidentemente del todo independientes el uno del otro. En cuanto al producto $m_1c_1'^2$, independiente también de los otros dos, puede tomar todos los valores posibles, desde cero hasta $(m_1c_1^2 + m_2c_2^2)$.

Pongamos pues:

$$x = m_1c_1^2$$

$$y = m_2c_2^2$$

$$z = m_1c_1'^2$$

y substituyendo en la ecuación (2), tendremos:

$$\varphi(x) + \Phi(y) = \varphi(z) + \Phi(x + y - z). \qquad (3)$$

Diferenciemos esta relación sucesivamente con respecto á $x$, $y$, $z$, y tendremos:

$$\varphi'(x) = \Phi_x'(x + y - z)$$

$$\Phi'(y) = \Phi_y'(x+y-z)$$

$$o = \varphi'(z) + \Phi_z'(x+y-z)$$

de donde:

$$\varphi'(z) = -\Phi_z'(x+y-z).$$

Observemos que las tres derivadas:

$$\Phi_x', \qquad \Phi_y', \qquad -\Phi_z'$$

son iguales, de donde:

$$\varphi'(x) = \Phi_x' = \Phi_y' = \varphi'(z).$$

Esta cuádruple igualdad pone de manifiesto que, como el primer miembro no contiene ni $y$ ni $z$, siéndole iguales los tercero y cuarto miembros es menester que las últimas funciones, que por otra parte no pueden contener sino $y$, $z$, no contengan ninguna de estas variables, lo que equivale a decir que son constantes. Las representaremos por $-h$.

Resulta que $\varphi$ y $\Phi$ son funciones lineales de $x$ e $y$; luego podemos dar a $f_1$ y $F_2$ las formas generales siguientes:

$$\begin{cases} f_1 = ae^{-hm_1c_1^2} \\ F_2 = Ae^{-hm_2c_2^2} \end{cases} \tag{5}$$

Ahora si designamos por $dn_{c_1}$ el número de las moléculas $m_1$ contenidas en la unidad de volumen cuya velocidad, *cualquiera sea su dirección,* está comprendida entre $c_1$ y $(c_1 + dc_1)$, aquel número resultará evidentemente igual al de las moléculas cuyo punto de velocidad está comprendido entre dos esferas trazadas desde el origen como centro con $c_1$ y $(c_1 + dc_1)$ por radios. Sabemos, por otra parte, que este espacio ocupa un volumen:

$$d\tau_1 = 4\pi c_1^2 dc_1,$$

y tenemos ya para el mismo, según una fórmula conocida:

$$dn_{c_1} = f_1 d\tau_1$$

de donde:

$$dn_{c_1} = 4\pi ae^{-hm_1c_1^2} . c_1^2 dc_1. \tag{6}$$

Pero las moléculas cuya velocidad está comprendida entre $c_1$ y

$(c_1 + dc_1)$ y determina con una recta fija, tomada por ejemplo por eje de las abscisas, un ángulo comprendido entre $\theta$ y $(\theta + d\theta)$ son idénticas a las cuyo punto de velocidad está ubicado en la región limitada por las dos esferas y las superficies de dos conos que tienen por vértice común el origen, por eje el de las abscisas y cuyas generatrices forman con este eje los ángulos $\theta$ y $(\theta + d\theta)$. Ahora bien, como el volumen de aquella región es:

$$d\tau_1 = 2\pi c_1^2 \operatorname{sen} \theta d\theta dc_1,$$

el número de las moléculas que satisfacen a estas condiciones es dado por la expresión:

$$dn_{c_1\theta} = 2\pi a e^{-hm_1c_1^2} . dc_1 c_1^2 \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{dn_{c_1} \operatorname{sen} \theta d\theta}{2} \cdot \qquad (7)$$

Podemos ahora integrar la expresión (6) para todas las velocidades posibles, y para esto hay que hacer variar $c_1$ desde $o$ hasta $\infty$. Tendremos así el número total de moléculas comprendidas en la unidad de volumen.

Nuestra ecuación es:

$$dn_{c_1} 4\pi a c_1^2 e^{-hm_1c_1^2} . dc_1.$$

lo que significa que es de la forma:

$$dn_{c_1} = 4\pi a x^2 e^{-\alpha x^2} dx,$$

de donde:

$$n_1 = 4\pi a \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

cuyo valor es, según una fórmula conocida:

$$n_1 = 4\pi a \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha^3}}$$

siendo $\alpha$ igual á $hm_1$. Resulta, pues:

$$n_1 = 4\pi a \int_0^\infty c_1^2 e^{-hm_1c_1^2} dc_1 = 4\pi a \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{h^3 m_1^3}} = a \sqrt{\frac{\pi^3}{h^3 m_1^3}} \qquad (8)$$

y de esta relación se puede sacar el valor de $a$.

De este modo se tiene:

$$a = n_1 \sqrt{\frac{h^3 m_1{}^3}{\pi^3}}$$

lo que da, al substituír en (5):

$$f_1 = n_1 \sqrt{\frac{h^3 m_1{}^3}{\pi^3}}\, e^{-hm_1c_1{}^2}, \tag{9}$$

y como el cálculo de A daría necesariamente un resultado simétrico:

$$F_2 = n_2 \sqrt{\frac{h^3 m_2{}^3}{\pi^3}}\, e^{-hm_2c_2{}^2}. \tag{10}$$

Por último, tenemos en virtud de la relación (6):

$$dn_{c_1} = 4n \sqrt{\frac{h^3 m_1{}^3}{\pi^3}}\, e^{-hm_1c_1{}^2} c_1{}^2 dc_1. \tag{11}$$

Multipliquemos ahora el número $dn_{c_1}$ por el cuadrado $c_1{}^2$ de la velocidad de las moléculas cuyo número es $dn_{c_1}$ é integremos para todas las velocidades posibles, dividiendo después por el número total $n_1$ de todas las moléculas contenidas en la unidad de volumen. De este modo vamos á obtener una magnitud que llamaremos el cuadrado medio de las velocidades $\overline{c_1{}^2}$ :

$$\overline{c_1{}^2} = \frac{\int_0^\infty c_1{}^2 dn_{c_1}}{n_1}$$

ó bien:

$$\overline{c_1{}^2} = \frac{\int_0^\infty c_1{}^2 dn_{c_1}}{\int_0^\infty dn_{c_1}} = \frac{\int_0^\infty c_1{}^2 dn_{c_1}}{a\sqrt{\frac{\pi^3}{h^3 m_1{}^3}}}.$$

La integral numeradora tiene por valor:

$$4\pi a c_1{}^4 e^{-hm_1c_1{}^2} dc_1$$

cuya fórmula de resolución es:

$$4\pi a \frac{1.3\sqrt{\pi^3}}{2^3\sqrt{h^5 m_1{}^5}} = 4a\,\frac{1.3\sqrt{\pi^3}}{8\sqrt{h^5 m_1{}^5}}$$

lo que da:

$$\overline{c_1^2} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\pi^3}\sqrt{h^3 m_1^3}}{\sqrt{h^5 m_1^5}\sqrt{\pi^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{h^3 m_1^3}{h^5 m_1^5}} = \frac{3}{2hm_1}. \qquad (12)$$

Del mismo modo, si se multiplica $dn_{c_1}$ por $c_1$ en vez de $c_1^2$, se tiene :

$$\overline{c_1} = \frac{\int_0^\infty c_1 dn_{c_1}}{\int_0^\infty dn_{c_1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi h m_1}} \qquad (13)$$

de donde, elevando al cuadrado :

$$(\overline{c_1})^2 = \frac{4}{\pi h m_1}$$

y por último :

$$\frac{\overline{c_1^2}}{(\overline{c_1})^2} = \frac{3}{2hm_1} \cdot \frac{\pi h m_1}{4} = \frac{3\pi}{8} = 1{,}178... \qquad (14)$$

Llevemos ahora en el eje de las abscisas los varios valores de $c_1$ y tomemos por ordenadas los valores correspondientes $c_1^2 e^{-hm_1c_1^2}$; las ordenadas serán proporcionales á la probabilidad para que la velocidad se halle comprendida entre $c_1$ y $(c_1 + dc_1)$, siendo $dc_1$ un incremento igual y constante para todos los valores de $c_1$. De este modo tendremos una curva cuya ordenada máxima se encontrará igualando á cero la derivada de :

$$c_1^2 e^{-hm_1c_1^2},$$

lo que da :

$$2c_1 e^{-hm_1c_1^2} - 2hm_1 c_1^3 e^{-hm_1c_1^2} = 0,$$

de donde :

$$c_1^2 = \frac{1}{hm_1}, \qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{hm_1}}$$

Este valor de $c_1$ que designaremos por $c_m$ toma el nombre de *velocidad más probable.*

*Observación.* — Si consideramos en una masa gaseosa la unidad de volumen y buscamos la velocidad *media* y *la más problable* de las velocidades de todas las moléculas que experimentan choques en dicho espacio durante la unidad de tiempo, obtendremos valores diferentes de los que acabamos de definir con los nombres de velocidad media y velocidad más probable. Resulta que todas estas expresiones no tie-

nen definición muy precisa, ó mejor que, al calcular sus valores medios, no se obtienen cantidades definidas con todo rigor. En efecto se tiene :

$$c_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

y, por otra parte, en virtud del principio de que las direcciones son indiferentes :

$$\overline{\xi_1^2} = \overline{\eta_1^2} = \overline{\zeta_1^2} = \frac{1}{3}\overline{c_1^2} = \frac{1}{2hm_1}$$

puesto que se tiene :

$$\overline{c_1^2} = \frac{3}{2hm_1}. \tag{12}$$

y, para otro gas, el resultado sería evidentemente igual. Pero si la constante $h$ ha de tener el mismo valor para los dos gases de una mezcla, la relación (12) para dos gases mezclados, cualquiera sea la densidad de cada uno por separado, nos dará siempre :

$$m_1\overline{c_1^2} = \frac{3}{2h} = m^2\overline{c_2^2}. \tag{15}$$

15. **Leyes de Mariotte y Avogadro.** — Si dos clases distintas de moléculas gaseosas están mezcladas en un mismo recipiente, podríamos creer por lo general que las de una especie van á comunicar fuerza viva á las de la otra y recíprocamente. Pero la relación (15) anterior nos enseña que nos es así y que los dos gases, cuya densidad y constitución primitivas persisten en las mezclas, están en equilibrio térmico si ambas se encuentran en el *estado de Maxwell,* y si la *fuerza viva media* tiene el mismo valor para cada uno.

Para averiguar si dos gases tienen la misma temperatura ó si un gas de densidad mayor está á la misma temperatura que otro de constitución igual, pero de densidad menor, podemos imaginar los dos gases separados por un tabique conductor del calor y buscar en estas condiciones el equilibro térmico. Los fenómenos moleculares en una pared conductora sólida no pueden definirse mediante principios de cálculo tan claros ; sin embargo, podemos admitir que la condición de equilibrio de temperatura definida por Maxwell queda aplicable aún. Lo que demuestra en una forma experimental que la hipótesis es plausible, es el hecho de que la expansión de un gas en el vacío y la difusión de dos gases se verifican sin cambio de temperatura sensible.

Con esto, para que dos gases estén en equilibrio térmico, es preciso que la fuerza viva media de una molécula resulte la misma en los dos gases, sea que tengan igual constitución con densidades distintas, ó que la constitución no sea la misma. La temperatura de este modo se puede considerar, para todos los gases, como una sola función que no depende sino de la fuerza viva media de una molécula.

Resulta que si volvemos á la fórmula encontrada para definir la presión en función del cuadrado medio de la velocidad:

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{c^2}.$$

se ve que, para dos gases á una misma temperatura, si la presión es igual para ambos por unidad de superficie, ó sea si se tiene:

$$p_1 = p_2$$

resulta también:

$$n_1 = n_2$$

lo que significa que el número de moléculas por unidad de volumen es igual en los dos gases, y esta igualdad es la misma expresión de la ley de Avogadro.

Del mismo modo, como para dos gases de misma naturaleza, tenemos:

$$m_1 = m_2$$

resulta que, para dos masas de un mismo gas, á temperaturas iguales, pero con presiones distintas, se tiene también:

$$\overline{c^2} = \text{const.}$$

y, por consiguiente, según la fórmula:

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{c^2}.$$

la presión $p$ es así proporcional á la densidad $\rho$, lo que expresa la ley de Boyle-Mariotte.

Ahora consideremos como gas normal á un gas tan poco imperfecto como se pueda, por ejemplo el hidrógeno. Sean para este gas P, $\rho'$, M, C, la presión, la densidad, la masa y la velocidad de una molécula, mientras que $p$, $\rho$, $m$, $c$ designan las mismas magnitudes físicas co-

rrespondientes á otro gas. Podemos elegir por substancia termométrica el hidrógeno de volumen constante y por lo tanto de densidad también constante. Esto es equivalente á elegir una medición de la temperatura tal que T sea proporcional á la presión del hidrógeno sobre la unidad de superficie de la pared, la densidad quedando constante. Según la fórmula :

$$P = \frac{1}{3}\rho'\overline{c^2},$$

siendo $\rho'$ constante, la temperatura T, que ha de ser proporcional á P, lo será también á $\overline{c^2}$. Sea $\frac{1}{3R}$ el coeficiente de proporcionalidad, se tendrá :

$$\frac{\overline{c^2}}{T} = 3R.$$

de donde :

$$\overline{c^2} = 3RT.$$

Si el gas que sirve de comparación tiene otra densidad, ya se ve que la temperatura T permanece sin cambio, si $\overline{c^2}$ conserva el mismo valor, lo que significa que R queda aun independiente de la densidad, y la fórmula :

$$P = \frac{1}{3}\rho'\overline{c^2}$$

se convierte en :

$$P = R\rho'T.$$

Por otra parte, la constante R puede ser elegida cualquiera, por ejemplo de modo que la diferencia entre las temperaturas que toma el gas, cuando se lo pone sucesivamente en contacto con hielo fundente y agua en ebullición, sea igual á 100°. Con esto la temperatura del hielo fundente se encuentra determinada. En efecto, ha de ser á la diferencia de temperatura entre ella y la del agua en ebullición, como la presión del hidrógeno á esta última temperatura es á la diferencia de sus fuerzas elásticas á las dos temperaturas, siendo todas las temperaturas medidas para una misma densidad. Ahora bien, esta proporción determina para este valor absoluto el número 273.

Consideremos ahora otro gas ($p$, $m$, $\rho$, $c$), tendremos otra vez :

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{c^2}$$

y como, para la misma temperatura, se tiene aún :

$$m\overline{c^2} = M\overline{C^2},$$

se deduce :

$$\overline{c^2} = \frac{M\overline{C^2}}{m} = 3\frac{M}{m}RT = \frac{3RT}{\mu}$$

si se designa por $\mu$ la razón $\frac{m}{M}$ de la masa de una molécula del gas considerado á la masa de una molécula del *gas normal* tomado por referencia, ó, lo que es equivalente, el *peso molecular*.

Si ponemos ahora :

$$\frac{R}{\mu} = r,$$

se tendrá la fórmula simplificada :

$$\overline{c^2} = 3rT.$$

Llevemos ahora este valor de $\overline{c^2}$ en la expresión :

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{c^2},$$

y tendremos para otro gas cualquiera :

$$p = r\rho T,$$

designando $r$ la constante de la ecuación de los gases para el gas considerado, y R una *constante universal* igual para todos los gases.

Esta última ecuación expresa de este modo que la presión de un gas es proporcional al producto de su densidad $\rho$ por su *temperatura absoluta* T.

16. **Calores específicos.** — No tengo el propósito, ni mucho menos, de desarrollar aquí la teoría cinética completa de los gases, pues tal desarrollo no hace falta para el objeto de esta monografía. No demostraré, pues, como lo hizo Boltzmann, que la ley de repartición de las velocidades de Maxwell que acabamos de estudiar, es *la única posible*. Por otra parte, esta demostración, como también otras de los dos grandes físicos, no satisface del todo al espíritu, con motivo de la hipótesis que sirve de base á toda la teoría y consiste en considerar siempre a un gas en el estado especial que Boltzmann llama *molekular ungeordnete*.

Este es el punto más flojo de la teoría cinética, y hemos de confesar que este concepto particular puede ser el objeto de críticas que son del caso también en otro orden de ideas, conforme á lo que veremos en la radiación y cuando lleguemos á la ley fundamental de la equirrepartición de la energía.

Sin embargo, antes de poner el punto final al presente capítulo, me parece conveniente dedicar unos renglones á los elementos de la teoría de los calores específicos, mediante la cual nos será revelado un resultado de primera importancia, ó sea que el principio de Carnot no tiene sino un valor de probabilidad y no se verifica sino de un punto de vista meramente estadístico. Por otra parte, señalé en la introducción que las dificultades que han originado las nuevas teorías no se encuentran sólo en el estudio de la radiación, sino también en el de los calores específicos.

Consideremos, pues, un gas único de volumen cualquiera V, y supongamos que se le comunique una cantidad de calor $dQ$ medida en unidades de trabajo. Este incremento ha de originar en su temperatura otro $dT$ y su volumen aumentará en $dV$.

Pongamos primero:

$$dQ = dQ_1 + dQ_4 \qquad (1)$$

siendo $dQ$ el calor que tiene por efecto aumentar la energía molecular y $dQ_4$ el que origna un trabajo externo. Si las moléculas son esferas perfectamente pulidas, los choques no engendran ninguna fuerza capaz de hacerlas girar en torno de un diámetro, y, por otra parte, admitiremos que no hay fuerzas de esta clase. Si, pues, las moléculas tuviesen un movimiento de rotación propio, éste no podría experimentar ninguna alteración en razón del incremento suministrado por $dQ$. La totalidad de la cantidad de calor $dQ_1$ servirá por lo tanto á aumentar la fuerza viva con la cual cada molécula se desplaza, y la llamaremos *fuerza viva del movimiento de progresión.*

Hasta ahora no hemos considerado sino este caso particular, pero, en lo que sigue, nos referiremos á un caso más general, en que las moléculas tienen una forma cualquiera ó son de naturaleza compleja, siendo formadas por partículas móviles las unas con respecto á las otras, que serán por ejemplo los átomos. De este modo habrá dos movimientos: el de progresión de la molécula y el movimiento intramolecular, admitiéndose que un gasto de trabajo se necesita para vencer las fuerzas de cohesión de los átomos; á este trabajo, lo designaremos con el nombre de *trabajo intramolecular.*

Pongamos, pues, conforme á las indicaciones anteriores:

$$dQ_1 = dQ_2 + dQ_3 \tag{2}$$

siendo $dQ_2$ la cantidad de calor que sirve para aumentar la fuerza viva del movimiento de progresión, y $dQ_3$ la utilizada para el incremento de la fuerza viva del movimiento intramolecular y también para la realización del trabajo de igual nombre.

Por otra parte, llamaremos siempre fuerza viva del movimiento de progresión de una molécula la fuerza viva del conjunto de la masa de ésta supuesta concentrada en su centro de gravedad.

Ya sabemos que si el volumen de un gas, cuyas moléculas son esféricas, aumenta á temperatura constante, no cambian para las moléculas ni la fuerza viva del movimiento de progresión ni la ley de repartición de las velocidades de progresión. El único efecto es que las moléculas quedan más distantes las unas de las otras, lo que significa que recorren mayor espacio entre dos choques.

Por otra parte, es admisible suponer que á una temperatura constante, la diminución de la frecuencia de los choques no altera el movimiento interno en el ambiente, ni durante los choques ni en el recorrido efectuado entre dos choques consecutivos.

Por último, la duración de un choque queda siempre insignificante con respecto al intervalo entre dos choques.

De este modo, se puede considerar, no sólo la fuerza viva del movimiento de progresión, sino también la del movimiento intramolecular, como funciones puras de la temperatura. El incremento de cada una de estas energías es por lo tanto igual al incremento de temperatura $dT$ multiplicado por una función de la temperatura, y si ponemos:

$$dQ_3 = \beta dQ_2, \tag{3}$$

el factor $\beta$ á su vez es función pura de la temperatura.

Con esto se ve que siempre podremos volver fácilmente á la hipótesis de las moléculas esféricas y perfectamente lisas, pues bastará hacer en las fórmulas:

$$\beta = 0.$$

El número de las moléculas es, en el caso particular, igual á $nV$ y, puesto que la fuerza viva *media* del movimiento de progresión de una molécula es:

$$\frac{m\overline{c^2}}{2},$$

la fuerza viva total del movimiento de progresión resulta :

$$\frac{nVm}{2}\overline{c^2}.$$

y si designamos por K la masa total del gas :

$$K = nVm,$$

tendremos para la fuerza viva total del movimiento de progresión :

$$\frac{1}{2}K\overline{c^2}.$$

Por otra parte, como la masa total K no está alterada por la comunicación que se le hace de una cantidad de calor, el incremento de la fuerza viva del movimiento de progresión de las moléculas resulta igual á :

$$\frac{1}{2}Kd\overline{c^2}.$$

Si ahora medimos el calor en unidades de trabajo, como lo supusimos, se puede escribir :

$$dQ_2 = \frac{1}{2}Kd\overline{c^2}. \qquad (4)$$

Teníamos por otro parte :

$$\overline{c^2} = \frac{3R}{\mu}T.$$

de donde :

$$d\overline{c^2} = \frac{3R}{\mu}dT \qquad (5)$$

y como tenemos también :

$$dQ_1 = dQ_2 + dQ_3.$$

resulta :

$$dQ_1 = \frac{3(1+\beta)KR}{2\mu}dT. \qquad (6)$$

Ya sabemos que el trabajo externo de un gas tiene por expresión :

$$pdV$$

y este producto mide también por consiguiente el calor utilizado para realizar aquel trabajo, si está expresado en unidades de energía, de modo que se tiene :

$$dQ_4 = pdV.$$

Por otra parte, el calentamiento no hace variar la masa total del gas :

$$K = \rho V$$

y se tiene :

$$dV = Kd\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Volvamos ahora á la relación :

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T$$

que da :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R}{\mu}\frac{T}{p}$$

de donde se saca por substitución :

$$dQ_4 = Kd\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{R}{\mu}\rho T = \frac{RK}{\mu}\rho Td\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (7)$$

Ahora podemos reemplazar en la ecuación (1) los diferentes términos por sus valores, y tendremos :

$$dQ = dQ_1 + dQ_4 = \frac{RK}{\mu}\left[\frac{3(1+\beta)}{2}dT + \rho d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \qquad (8)$$

Si el volumen es constante, se tiene :

$$\frac{dV}{K} = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

y el calor suministrado tiene entonces por valor :

$$dQ_v = \frac{3RK}{2\mu}(1+\beta)dT. \qquad (9)$$

Si al contrario la presión es constante, resulta :

$$d\left(\frac{T}{\rho}\right)=\frac{dT}{p}$$

y el calor suministrado tiene por expresión :

$$dQ_p=\frac{RK}{2\mu}[3(1+\beta)+2]dT. \qquad (10)$$

Supongamos ahora que se divida $dQ$ por K, se tendrá la cantidad de calor suministrada á la unidad de masa. Si además se divide por $dT$, se tendrá la cantidad de calor necesaria para engendrar una elevación de temperatura igual á la unidad en la unidad de masa; se llama á esta cantidad *el calor específico del gas.*

Sea $\gamma_v$ este calor específico á volumen constante, su expresión será:

$$\gamma_v=\frac{dQ_v}{KdT}=\frac{3R}{2\mu}(1+\beta). \qquad (11)$$

Por otra parte, el calor específico $\gamma_p$ á presión constante será dado por la relación :

$$\gamma_p=\frac{dQ_p}{KdT}=\frac{R}{2\mu}[3(1+\beta)+2]. \qquad (12)$$

Es conveniente observar que, en estas dos últimas expresiones, todas las magnitudes son constantes, menos $\beta$ que, como lo sabemos, es función pura de la temperatura. Por otra parte, 3R es la constante de proporcionalidad de la temperatura con $\overline{c^2}$, siendo esta última cantidad el cuadrado medio de la velocidad del gas normal, teniendo R el mismo valor para todos los gases. Lo mismo sucede con los productos $\gamma_p\mu$ y $\gamma_v\mu$, lo que significa que el producto del calor específico por el peso molecular $\mu$ es igual para todos los gases en los cuales $\beta$ es constante, por ejemplo para los con los cuales se tiene :

$$\beta=0,$$

ó sea con los gases ideales de moléculas esféricas y perfectamente elásticas.

Busquemos ahora la diferencia $(\gamma_p-\gamma_v)$ medida en unidades mecánicas. Tenemos :

$$\gamma_p-\gamma_v=\frac{R}{2\mu}[3(1+\beta)+2-3(1+\beta)]=\frac{R}{\mu}, \qquad (13)$$

lo que significa que aquella diferencia es, para cada gas, igual á la *constante gaseosa* correspondiente.

Por último el producto de la misma diferencia por el peso molecular $\mu$ es, *para todos los gases,* igual á la constante general R.

Podemos buscar aun la razón $\chi$ de los dos calores específicos. Tenemos :

$$\chi = \frac{\gamma_p}{\gamma_v} = \frac{3(1+\beta)+2}{3(1+\beta)} = 1 + \frac{2}{3(1+\beta)}$$

de donde se saca :

$$3(1+\beta)\chi = 3(1+\beta)+2$$

$$3\chi + 3\beta\chi = 5 + 3\beta$$

$$\beta(3\chi - 3) = 5 - 3\chi$$

$$\beta = \frac{5-3\chi}{3(\chi-1)} = \frac{3(1-\chi)}{3(\chi-1)} + \frac{2}{3(\chi-1)} = \frac{2}{3(\chi-1)} - 1. \qquad (14)$$

Si consideramos el caso único que hasta ahora hayamos estudiado, ó sea el de las esferas perfectas, tenemos como ya lo sabemos :

$$\beta = 0,$$

de donde :

$$3\chi = 5$$

$$\chi = \frac{5}{3}. \qquad (15)$$

valor que está perfectamente de acuerdo con lo encontrado por Kundt y Warburg para la razón de los calores específicos del vapor de mercurio, y más tarde por Ramsay para el helio y el argón. Observaremos que para los demas gases estudiados hasta ahora, esta razón es algo más pequeña, lo que prueba la existencia de movimientos intramoleculares.

**17. El principio de Carnot y la entropia.** — Observaremos que la expresión general de $dQ$ :

$$dQ = \frac{RK}{\mu}\left[\frac{3(1+\beta)}{2}dT + pd\left(\frac{T}{\rho}\right)\right] = \frac{RK}{\mu}\left[\frac{3(1+\beta)}{2}dT + \rho T d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \quad (1)$$

no es una diferencial exacta con respecto á las variables T y $\rho$. Pero,

si dividimos por T, toma $dQ$ este carácter, pues $\beta$ es función pura de la temperatura, y se tiene:

$$\frac{dQ}{T}=\frac{RK}{\mu}\left[\frac{3(1+\beta)}{2}\frac{dT}{T}+\rho d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

de donde:

$$\int\frac{dQ}{T}=\int\frac{RK}{\mu}\left[\frac{3(1+\beta)}{2}\frac{dT}{T}-\frac{d\rho}{\rho}\right]$$

y si se considera $\beta$ como constante:

$$\int\frac{dQ}{T}=\frac{RK}{\mu}\frac{3(1+\beta)}{2}\int\frac{dT}{T}-\frac{RK}{\mu}\int\frac{d\rho}{\rho}=\frac{RK}{\mu}\left[\frac{3(1+\beta)}{2}\log T-\log\rho\right]$$

$$\int\frac{dQ}{T}=\frac{RK}{\mu}[\log(1+\beta)^{\frac{3}{2}}+\log\rho^{-1}]$$

lo que da por último:

$$\int\frac{dQ}{T}=\frac{RK}{\mu}\log T^{\frac{3}{2}(1+\beta)}.\rho^{-1}+\text{const.} \qquad (2)$$

y esta integral, siempre que $\beta$ sea constante, se llama la *entropia del gas*.

Si tenemos varios gases encerrados en recipientes distintos, es evidente que el calor total que les suministramos es igual á la suma de las cantidades de calor suministradas á cada uno por separado, y, por consiguiente, no importa que tengan temperaturas iguales ó diferentes, la entropia total es igual á la suma de las entropias de cada uno.

Si varios gases estan mezclados en un recipiente de volumen V, sus masas siendo respectivamente iguales á $K_1$, $K_2$, $K_3$, ... sus presiones á $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... y sus densidades á $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, ... la energía molecular total será siempre igual á la suma de las energías moleculares parciales. El trabajo total, si suponemos que la noción da presión parcial pueda ser conservada cuando se trata de gases de moléculas complejas, tendrá por expresión:

$$(p_1+p_2+p_3+...)dV \qquad (3)$$

y se tiene por otra parte:

$$V=\frac{K_1}{\rho_1}=\frac{K_2}{\rho_2}=\frac{K_3}{\rho_3}=...$$

y también:

$$p_1 = \frac{R}{\mu_1}\rho_1 T,$$

$$p_2 = \frac{R}{\mu_2}\rho_2 T,$$

$$p_3 = \frac{R}{\mu_3}\rho_3 T,$$

. . . .

. . . .

Resulta que la diferencial $dQ$ del calor suministrado á la mezcla tiene por valor:

$$dQ = R\sum \frac{K}{\mu}\left[\frac{3(1+\beta)}{2}T + \rho T d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \qquad (4)$$

De allí la consecuencia de que la entropia total de varios gases, siendo $\beta$ constante para cada uno de ellos, tiene por expresión:

$$\int \frac{dQ}{T} = R\sum \frac{K}{\mu}\log T^{\frac{3}{2}(1+\beta)}.\rho^{-1} + \text{const.} \qquad (5)$$

pudiendo los gases estar, unos en recipientes distintos, otros mezclados, siendo $\rho$ la densidad particular de cada gas, y T la misma para todos. Por último, la experiencia demuestra que la constante no varía cuando se cambia la mezcla, siempre que T, las presiones $p$ y las densidades $\rho$ no se alteren.

Volvamos á considerar nuestras funciones $f_1$ y $f_2$, y calculemos log $f_1$, substituyendo las componentes de velocidad $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, de la molécula $m_1$ por sus valores á una época dada $t$. Obtendremos así otro logaritmo que designaremos con el nombre de *valor de la función logarítmica* que corresponde á dicha molécula y á la misma época. Análogamente podremos determinar el valor de la función logarítmica que corresponde á una molécula dada $m_2$ y á una época definida, si introducimos en log $f_2$, en vez de las componentes $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$, las que corresponden á dichas molécula $m_2$ á la misma época dada.

Tratemos de determinar la suma H de todos los valores de las funciones logarítmicas que corresponden para una época determinada á todas las moléculas $m_1$ y $m_2$ encerradas en la unidad de volumen.

Á la época $t$ han de encontrarse en esta $f_1 d\tau_1$ moléculas $m_1$ *de la es-*

*pecie definida,* ó sea las cuyas componentes de velocidad están comprendidas entre $\xi$ y $(\xi + d\xi)$ y éstas suministran evidentemente en la suma H el término:

$$f_1 \log f_1 d\tau_1.$$

Si formamos la expresión análoga para las moléculas $m_2$, tendremos:

$$f_2 \log f_2 d\tau_2,$$

y si integramos para todos los valores posibles de las variables, se tendrá:

$$H = \int f_1 \log f_1 d\tau_1 + \int f_2 \log f_2 d\tau_2. \tag{6}$$

Ahora bien, se demuestra, en la teoría cinética de los gases, que la función H no puede sino decrecer con el tiempo, y es con este principio que se prueba que la repartición de las velocidades ha de tender necesariamente hacia la de Maxwell.

Pero no me propongo considerar por ahora la función H desde este punto de vista; lo que quiero sentar es la significación física de aquella función, conservando por supuesto la hipótesis de las moléculas perfectamente esféricas, ó sea las para las cuales la razón $\chi = \frac{\gamma_p}{\gamma_v}$ tiene por valor $\frac{5}{3}$.

Por aplicación de la fórmula (1) á la unidad de volumen de un solo gas, se tendrá:

$$H = \int f_1 \log f_1 d\tau_1.$$

Pero, para un estado estacionario, se tiene:

$$f_1 = ae^{-hm_1c_1^2},$$

de donde:

$$H = \int ae^{-hm_1c_1^2} . \log ae^{-hm_1c_1^2} . d\tau_1.$$

Por otra parte:

$$\log ae^{-hm_1c_1^2} = \log a - hm_1c_1^2 \log e = \log a - hm_1c_1^2,$$

lo que da:

$$H = \log a \int f_1 d\tau_1 - hm_1 \int c_1^2 f_1 d\tau_1. \tag{7}$$

Observemos que la integral $\int f_1 d\tau_1$ es igual al número total $n_1$ de las moléculas, y, por otra parte, se tiene :

$$\overline{c^2} = \frac{\int_0^\infty c_1^2 dn_1}{\int_0^\infty dn_1} = \frac{3}{2hm_1}$$

de donde :

$$\int c_1^2 f_2 d\tau_1 = n_1 \overline{c_1^2} = \frac{3n_1}{2hm_1}.$$

y substituyendo en (7) :

$$H = \log a \int f_1 d\tau_1 - hm_1 \frac{3n_1}{2hm_1} = n_1 \log a - \frac{3n_1}{2}$$

ó bien :

$$H = n_1\left[\log a - \frac{3}{2}\right]. \tag{8}$$

Pero se tiene también :

$$\overline{c^2} = \frac{3RM}{m_1} T = \frac{3}{2hm_1}$$

de donde :

$$h = \frac{1}{2RMT};$$

y teníamos además :

$$a = n_1 \sqrt{\frac{h^3 m_1^3}{\pi^3}} = n_1 \sqrt{\frac{m_1^3}{8\pi^3 R^3 M^3 T^3}} = n_1 m_1 \sqrt{\frac{m_1}{8\pi^3 R^3 M^3 T^3}}.$$

Observemos que, siendo $n_1$ el número de las moléculas contenidas en la unidad de volumen, el producto $n_1 m_1$ es igual á la masa de dicha unidad, y por consiguiente á $\rho$, lo que da :

$$a = \rho \sqrt{\frac{m_1}{8\pi^3 R^3 M^3 T^3}} = \rho T^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m_1}{8\pi^3 R^3 M^3}} = \alpha \rho T^{-\frac{3}{2}} \tag{9}$$

de donde, si se substituye en (3) :

$$H = n_1\left[\log\left(\rho T^{-\frac{3}{2}}\right) + \log \alpha - \frac{3}{2}\right]$$

y si ponemos :

$$b = \left(\log a - \frac{3}{2}\right) n_1,$$

resultará :

$$H = n_1 \log \rho T^{-\frac{3}{2}} + b. \qquad (10)$$

En resumen, vemos que H es igual á $n_1 \log \rho T^{-\frac{3}{2}}$ más ó menos una constante.

Cuando se estudia la función H desde el punto de vista de su significación matemática, se demuestra que — H representa, salvo una constante, el logaritmo neperiano de la probalidad del estado correspondiente del gas. No me propongo dar esta demostración que nos llevaría fuera de los límites que asigné á esta monografía, y consideraré el resultado como adquirido.

Sentado esto, la probabilidad del concurso de varios acontecimientos es igual al producto de las probabilidades distintas de los mismos; luego el logaritmo de la probabilidad del concurso es igual á la suma de los logaritmos de las probabilidades aisladas.

Resulta que el logaritmo de la probabilidad del estado de un gas de volumen doble es igual á — 2H, y, para un volumen V, toma el valor — VH.

Por consiguiente, si llamamos W la probabilidad de la disposición de las moléculas y de su estado de distribución para varios gases, su logaritmo tendrá por expresión :

$$\log W = -\Sigma VH = -\Sigma Vn \log \rho T^{-\frac{3}{2}} \qquad (11)$$

la suma teniendo que comprender á todos los gases existentes.

Si multiplicamos por el producto RM igual para todos los gases, en que M representa la masa de una molécula de hidrógeno, tendremos :

$$RM \log W = -\Sigma RMVn \log \rho T^{-\frac{3}{2}}$$

y como se tiene :

$$MVn = \frac{K}{\mu},$$

y también :

$$-\log \rho T^{-\frac{3}{2}} = \log \rho^{-1} T^{\frac{3}{2}}$$

resulta :

$$RM \log W = R \sum \frac{K}{\mu} \log \rho^{-1} T^{\frac{3}{2}}. \qquad (12)$$

Observemos que el segundo miembro es igual, salvo una constante, cuando se tiene $\beta = 0$, á $\int \frac{dQ}{T}$ de la expresión (5), lo que significa que representa la entropia total de los gases.

En la naturaleza, hay siempre tendencia para un sistema á pasar del estado menos probable al estado más probable. Luego si la probalidad W del estado de un gas es menor para un estado dado que no para otro estado, se necesitará, para provocar el paso del primero al segundo, la intervención de cuerpos ajenos, pero el fenómeno se podrá verificar sin que modificaciones persistentes se realicen en aquéllos. Si al contrario la probabilidad W es menor para el segundo estado que no para el primero, el cambio se podrá verificar también, pero con la condición que los cuerpos ajenos tomen á su vez un estado más probable que el anterior.

Observemos ahora que la magnitud :

$$RM \log W$$

que no difiera de $-H$ sino en un factor constante, crece y disminuye al mismo tiempo que la probabilidad W y por lo tanto se puede decir de ella lo que dijimos de W. Aquella magnitud, en el caso de que la razón de los calores específicos sea igual á $\frac{5}{3}$, no es, como ya lo sabemos, otra cosa que la entropia total de los gases considerados. Ahora bien, el hecho de que en la naturaleza la entropia tiende á un máximo, demuestra que para cada acción recíproca de dos gases reales, como la difusión, la conductibilidad térmica, etc., las moléculas tomadas por separado intervienen en esta acción según la ley general de probabilidad, ó sea, al menos, que los gases reales actúan como los gases privados de organización molecular que habíamos ideado.

Pero, al propio tiempo, resulta de lo que antecede una consecuencia de importancia capital desde el punto de vista del segundo principio de la termodinámica, pues este principio no nos aparece ya sino como un teorema de probabilidad. Sin embargo, hemos de confesar que dicha consecuencia no está justificada hasta ahora, sino en el caso particular en el cual nos colocamos. Pero se ha podido generalizarla y demostrar que, para un gas de volumen arbitrario VH, y para varios gases la magnitud $\Sigma$VH, no pueden sino disminuír en virtud de los choques y se deben considerar como las medidas de la probabilidad del estado gaseoso.

En resumen, el principio de Carnot tiene sólo un valor *meramente estadístico* y no el rigor absoluto que uno podría atribuírle, tomando por base los datos experimentales. Como lo dijo Poincaré: « un azar muy poco probable podría un día comunicar á los fenómenos una orientación opuesta y hacer que el Universo anduviera al revés ».

Por último, observamos que si no vemos en la teoría cinética de los gases otra cosa que una representación mecánica de los fenómenos, esto no impide que este concepto del principio de la entropia presente una importancia del todo excepcional, puesto que el hecho de haber podido definir la entropia de un gas, cuyo estado no es estacionario, equivale á la generalización del mismo principio.

## CAPÍTULO II

### LAS MOLÉCULAS CONSIDERADAS COMO SISTEMAS MECÁNICOS COMPLEJOS

18. **Concepto de las moléculas, cuando forman cada una un sistema complejo.** — Hasta ahora siempre hemos considerado las moléculas, menos cuando hablamos de los calores específicos, como esferas perfectamente elásticas, ó sea como masas únicas y no como reuniones de puntos que tuvieran cada uno una existencia individual, y sobra que este modo de verlas no constituye la representación exacta de la realidad.

En efecto, todos los gases se pueden llevar al estado de incandescencia, y entonces suministran espectros muy complicados, cosa imposible si se tratara de moléculas reducidas á puntos materiales. Por otra parte, las vibraciones de esferas perfectamente elásticas no podrían dar cuenta satisfactoria de los fenómenos espectroscópicos. Por último, las reacciones químicas no dejan subsistir ninguna duda acerca de la constitución compleja de las moléculas gaseosas.

No me propongo insistir sobre todas las pruebas evidentes que tiene la ciencia actual de la complexidad de la molécula y hasta del átomo. Si admitimos que son formadas por partes ligadas entre sí de modo que actúen, desde el punto de vista térmico, como pequeños cuerpos rígidos cuya forma es diferente de la esférica, vemos esta hipótesis confirmada por la experiencia para una categoría de gases. En cuanto á los demás, se puede suponer que las partes componentes

están animadas de movimientos las unas con respecto á las otras.

Sea lo que fuera, si nos colocamos desde el punto de vista especial de la teoría cinética, lo que nos aparece más lógico sería generalizar de una manera suficiente el concepto de la constitución de las moléculas para que todos los modos posibles de considerarla resulten sólo casos particulares, y, de este modo, tendremos la seguridad de conseguir una representación mecánica de los fenómenos que se adopte lo mejor posible á la verificación experimental.

Consideraremos, pues, la molécula como un sistema mecánico cuya naturaleza es desconocida, lo que no nos impide admitir que sus variaciones están determinadas por las ecuaciones de la dinámica de Lagrange, suponiendo que la posición de todas la partes del sistema queda determinada á cada instante por las coordenadas generalizadas que se introducen también en la teoría de los iones complejos de Lorentz. Creo conveniente, pues, recordar muy brevemente la formación de estas ecuaciones.

19. **Las ecuaciones de Lagrange.** — Imaginemos que se conozca la constitución de un sistema mecánico cualquiera que supondremos *holónomo,* lo que significa que se admite que las uniones impuestas se pueden expresar en *términos finitos.* Este sistema se compone de $n$ puntos sometidos á uniones tales que su estado depende á cada instante de $k$ parámetros independientes los unos de los otros; los designaré por:

$$q_1, q_2, q_3, \cdots q_k. \tag{1}$$

Podremos siempre expresar las coordenadas de cada uno de los $n$ puntos en función de los $k$ parámetros, mediante $3n$ ecuaciones, suponiendo además que estas ecuaciones dependen ó no del tiempo. Por otra parte, las uniones serán expresadas en términos finitos por un número $h$ de ecuaciones, siendo $h$ siempre menor que $3n$, pues si así no fuera, el movimiento del sistema quedaría del todo definido, lo que estaría en contra de la hipótesis. Tendremos siempre por consiguiente:

$$h = 3n - m, \tag{2}$$

y $m$ expresará lo que llamaremos *número de grados de libertad del sistema.*

Si damos á los parámetros $q$ incrementos infinitamente pequeños y arbitrarios $\delta q$, tendremos el desplazamiento virtual más general del

sistema compatible con las uniones. Á los incrementos $\delta q$ corresponden otros $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ para las coordenadas de los $n$ puntos del sistema, lo que da, si introducimos estos valores en la ecuación general de la dinámica:

$$\sum\left[\left(X_i - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right] = 0. \quad (3)$$

Pongamos ahora las expresiones:

$$\begin{cases} P_\alpha = \sum m_i\left[\dfrac{d^2x_i}{dt^2}\dfrac{dx_i}{dq_\alpha} + \dfrac{d^2y_i}{dt^2}\dfrac{dy_i}{dq_\alpha} + \dfrac{d^2z_i}{dt^2}\dfrac{dz_i}{dq_\alpha}\right] \\ Q_\alpha = \sum\left[X_i\dfrac{dx_i}{dq_\alpha} + Y_i\dfrac{dy_i}{dq_\alpha} + Z_i\dfrac{dz_i}{dq_\alpha}\right]. \end{cases} \quad (4)$$

y podremos escribir la suma (3) en la forma siguiente:

$$(P_1 - Q_1)\delta q_1 + (P_2 - Q_2)dq_2 + \dots + (P_k - Q_k)dq_k = 0. \quad (5)$$

Esta última ecuación ha de ser satisfecha, cualesquiera sean los incrementos arbitrarios $\delta q$, lo que suministra las $k$ relaciones siguientes:

$$\begin{cases} P_1 - Q_1 = 0 \\ P_2 - Q_2 = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ P_k - Q_k = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Observaremos ahora que, si se suprimen los índices, en adelante inútiles, de las coordenadas, y si se representan por $x'$, $y'$, $z'$ las derivadas de $x$, $y$, $z$ con respecto á $t$, se puede escribir:

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dx}{dq_\alpha} + y'\frac{dy}{dq_\alpha} + z'\frac{dz}{dq_\alpha}\right) - $$

$$-\sum m\left(x'\frac{d\frac{dx}{dq_\alpha}}{dt} + y'\frac{d\frac{dy}{dq_\alpha}}{dt} + z'\frac{d\frac{dz}{dq_\alpha}}{dt}\right). \quad (7)$$

Pero se tiene por otra parte:

$$x' = \frac{dx}{dq_1} q_1' + \frac{dx}{dq_2} q_2' + \ldots + \frac{dx}{dq_k} q_k' + \frac{dx}{dt}$$

y si consideramos $x'$ como función de las $q$, de las $q'$ y de $t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx'}{dq_\alpha'} = \dfrac{dx}{dq_\alpha} \\ \dfrac{dy'}{dq_\alpha'} = \dfrac{dy}{dq_\alpha} \\ \dfrac{dz'}{dq_\alpha'} = \dfrac{dz}{dq_\alpha} \end{array} \right. \tag{8}$$

y con esto la relación (7) se convierte en la siguiente:

$$\begin{aligned} P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left[x'\frac{dx'}{dq_\alpha'} + y'\frac{dy'}{dq_\alpha'} + z'\frac{dz'}{dq_\alpha'}\right] - \\ -\sum m\left[x'\frac{d\frac{dx}{dq_\alpha}}{dt} + y'\frac{d\frac{dy}{dq_\alpha}}{dt} + z'\frac{d\frac{dz}{dq_\alpha}}{dt}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Ahora transformemos el segundo paréntesis, y para ello, observemos que se tiene:

$$\frac{d\frac{dx}{dq_\alpha}}{dt} = \frac{d^2x}{dq_\alpha dq_1} q_1' + \frac{d^2x}{dq_\alpha dq_2} q_2' + \ldots + \frac{d^2x}{dq_\alpha dq_k} q_k' + \frac{d^2x}{dq_\alpha dt} \tag{10}$$

siendo $\frac{dx}{dq_\alpha}$ función de las variables:

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_k, t.$$

Se ve que la expresión (10) es idéntica á la de la derivada de $x'$ con respecto á $q_\alpha$, puesto que se tiene:

$$\frac{d}{dt}\frac{dx}{dq_\alpha} = \frac{d}{dq_\alpha}\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dq_\alpha},$$

de modo que la relación (9) se vuelve:

$$\begin{aligned} P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dx'}{dq_\alpha} + y'\frac{dy'}{dq_\alpha} + z'\frac{dz'}{dq_\alpha}\right) - \\ -\sum m\left(x'\frac{dx'}{dq_\alpha} + y'\frac{dy'}{dq_\alpha} + z'\frac{dz'}{dq_\alpha}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Por otra parte, la semifuerza viva T, del sistema tiene por expresión:

$$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

de modo que las sumas que entran en la formación de la relación (11) son respectivamente iguales á:

$$\frac{dT}{dq_\alpha'} \quad y \quad \frac{dT}{dq_\alpha}$$

lo que da por último:

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq_\alpha'} - \frac{dT}{dq_\alpha}. \tag{12}$$

Las ecuaciones del movimiento toman así la forma general:

$$P_\alpha = Q_\alpha,$$

ó bien:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq_\alpha'} - \frac{dT}{dq_\alpha} = Q_\alpha \tag{13}$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \ldots k$$

lo que da $k$ ecuaciones del movimiento, llamadas ecuaciones de Lagrange.

Como se ve, son del segundo orden, puesto que la función T es del segundo grado con respecto á las derivadas $q'$.

Por otra parte, suministran las coordenadas generalizadas $q$ en función del tiempo $t$ y de las $2k$ constantes arbitrarias de integración.

Supongamos ahora que las uniones sean independientes del tiempo. En tal caso, podríamos arreglar de modo que las expresiones de las coordenadas no contengan á $t$, y entonces la función T quedaría homogénea y del segundo grado con respecto á las $q'$. Ahora bien T, por definición, es esencialmente positiva, luego esta función, en la misma hipótesis, se convertirá en una forma cuadrática positiva de las derivadas $q'$.

Tratemos, pues, de averiguar la forma que én estas condiciones, toma el segundo miembro $Q_\alpha$ de las ecuaciones (13).

Para esto, formemos la expresión de la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas dadas, para el desplazamiento más general compatible con las uniones á la época $t$.

Esta suma tiene la forma siguiente:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \dots + Q_k \delta q_k = 0.$$

Si consideramos una de las Q, por ejemplo $Q_\alpha$, hemos de tomar el desplazamiento que se obtiene dejando constantes $t$ y todas las $q$, menos $q_\alpha$ que debe variar en una cantidad $\delta q_\alpha$, y la suma se reduce á:

$$Q_\alpha \delta q_\alpha.$$

Pero estas cantidades Q toman una forma muy notable cuando existe una *función de las fuerzas*, lo que se verifica siempre en todos los sistemas físicos.

Esta función es de la forma:

$$U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots x_n, y_n, z_n).$$

Podemos expresarla en función de las $q$ y de $t$, lo que da:

$$\frac{dU}{dq_\alpha} = \sum \left( \frac{dU}{dx_i} \frac{dx_i}{dq_\alpha} + \frac{dU}{dy_i} \frac{dy_i}{dq_\alpha} + \frac{dU}{dz_i} \frac{dz_i}{dq_\alpha} \right)$$

y resulta que las componentes:

$$X_i, Y_i, Z_i$$

son por hipótesis iguales respectivamente á:

$$\frac{dU}{dx_i}, \quad \frac{dU}{dy_i}, \quad \frac{dU}{dz_i}$$

y se tiene por consiguiente:

$$\frac{dU}{dq_\alpha} = \sum \left( X_i \frac{dx_i}{dq_\alpha} + Y_i \frac{dy_i}{dq_\alpha} + Z_i \frac{dz_i}{dq_\alpha} \right) = Q_\alpha. \tag{14}$$

De este modo se halla para la forma definitiva de las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_\alpha'} - \frac{dT}{dq_\alpha} = \frac{dU}{dq_\alpha}. \tag{15}$$

19. **Las ecuaciones de Hamilton.** — Tomando por base las ecuaciones de Lagrange, Poisson tuvo la idea de introducir en ellas un cambio de variables, poniendo:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 = \frac{dT}{dq_1'} \\ p_2 = \frac{dT}{dq_2'} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_k = \frac{dT}{dq_k'} \end{array}\right. \tag{1}$$

Siendo estas ecuaciones lineales con respecto á las $q'$, pueden ser resueltas y dan para estas derivadas expresiones también lineales con respecto á las variables $p$.

Partiremos de la forma general de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq_\alpha'} - \frac{dT}{dq_\alpha} = Q_\alpha. \tag{2}$$

Si se conserva $t$ constante, se puede dar á las $q$ y $p$, incrementos infinitamente pequeños arbitrarios é independientes $\delta q$ y $\delta p$; las $q'$ tomarán entonces á su vez incrementos $\delta q'$ definidos por las relaciones (1) supuestas resueltas con respecto á las $q'$. Con esto la función T que depende de las variables $q$ y $q'$ experimentará á su vez una variación $\delta T$ cuya expresión será de la forma :

$$\delta T = \sum \frac{dT}{dq_\alpha} \delta q_\alpha + \sum \frac{dT}{dq_\alpha'} \delta q_\alpha' \tag{3}$$

Pero en virtud de las ecuaciones (1), se tiene :

$$\delta T = \sum \frac{dT}{dq_\alpha} \delta q_\alpha + \Sigma p_\alpha \delta q_\alpha'. \tag{4}$$

Pongamos ahora :

$$K = \Sigma p_\alpha \delta q_\alpha' - T \tag{5}$$

de donde :

$$\delta K = -\sum \frac{dT}{dq_\alpha} \delta q_\alpha' + \Sigma q_\alpha' \delta p_\alpha, \tag{6}$$

y tenemos así una primera expresión de la diferencial total $\delta K$.

Supongamos ahora K expresada en función del nuevo sistema de variables $p_\alpha$ y $q_\alpha$. Cuando, siendo $t$ constante, estas variables experimentan variaciones arbitrarias $\delta q_\alpha$ y $\delta p_\alpha$, se tiene :

$$\delta K = \sum \frac{dK}{dq_\alpha} \delta q_\alpha + \sum \frac{dK}{dp_\alpha} \delta p_\alpha. \tag{7}$$

Esta última expresión es evidentemente idéntica á la anterior, cualesquiera sean $\delta q$ y $\delta p$, de donde :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{dT}{dq_\alpha} &= \frac{dK}{dq_\alpha} \\ q_\alpha' &= \frac{dK}{dp_\alpha} \end{aligned} \right. \tag{8}$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \dots k.$$

En estas ecuaciones, las derivadas parciales de T están tomadas en la hipótesis de T expresada en función de las $q$ y $q'$, y las de K suponiendo que está dada en función de las $q$ y $p$.

Reemplacemos ahora en las ecuaciones (2) de Lagrange, y tendremos :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{dK}{dq_\alpha} &= Q_\alpha \\ \frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{dK}{dp_\alpha} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \dots k.$$

Estas ecuaciones son del primer orden, y definen las variables $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... $p_k$ y $q_1$, $q_2$, $q_3$, ... $q_k$ en función del tiempo.

Introduzcamos ahora la hipótesis de la existencia de una función U de las fuerzas aplicadas distintas de las fuerzas de unión, dicha función dependiendo sólo, como lo sabemos, de las coordenadas y no del tiempo.

En este caso las coordenadas son funciones de los parámetros $q$, luego es también función de éstas, y no contiene las variables $p$, de modo que las derivadas $\frac{dU}{dp}$ son nulas. Además, se tiene :

$$Q_\alpha = \frac{dU}{dq_\alpha}.$$

Pongamos, pues:

$$K - U = H,$$

tendremos:

$$\frac{dK}{dp_\alpha} = \frac{dH}{dp_\alpha}$$

$$\frac{dK}{dq_\alpha} - \frac{dU}{dq_\alpha} = \frac{dH}{dq_\alpha},$$

de donde:

$$\frac{dK}{dq_\alpha} - Q_\alpha = \frac{dH}{dq_\alpha}$$

y las ecuaciones (9) se convierten en las siguientes:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{dH}{dp_\alpha} \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= -\frac{dH}{dq_\alpha} \end{aligned} \right. \qquad (10)$$

Estas ecuaciones son las que se llaman *ecuaciones canónicas del movimiento de Hamilton.*

Forman un sistema de $2k$ ecuaciones del primer orden que definen $q_1, q_2 \dots q_k$ y $p_1, p_2, p_3 \dots p_k$ en función del tiempo y de $2k$ constantes arbitrarias de integración.

Si ahora las ecuaciones de unión son independientes del tiempo, se puede siempre elegir, para los parámetros $q$, cantidades tales que las expresiones de las coordenadas de los distintos puntos del sistema en función de las $q$ no contengan á $t$ explícitamente. En estas condiciones, como ya se sabe, T se convierte en una función homogénea y del segundo grado de las $q'$, y, según un teorema conocido que rige á las funciones homogéneas, se tiene:

$$\sum q_\alpha' \frac{dT}{dq_\alpha'} = 2T,$$

y también:

$$\Sigma p_\alpha q_\alpha' = 2T$$

puesto que se tiene:

$$p_\alpha = \frac{dT}{dq_\alpha'}.$$

Ahora bien, la función K definida por (5):

$$K = \Sigma p_\alpha q_\alpha' - T$$

se convierte en:

$$K = 2T - T = T$$

y tenemos para la función K:

$$H = K - U = T - U.$$

No olvidemos ahora la hipótesis introducida de la existencia de una función de las fuerzas. En este caso, la función:

$$H = T - U$$

ya no contiene á $t$ explícitamente y se expresa sólo mediante las variables $p$ y $q$.

Sin embargo, mientras dura el movimiento, estas variables son funciones del tiempo, y H por su intermedio se vuelve á su vez función del tiempo. Así se tiene:

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left( \frac{dH}{dq_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{dH}{dp_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt} \right).$$

Pero, según las ecuaciones canónicas, el paréntesis es nulo para $\alpha = 1, 2, 3, \ldots k$, lo que significa que, durante el movimiento, se tiene:

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

de donde:

$$H = \text{const.}$$

y podemos poner, en virtud del principio de la conservación de la energía, puesto que $-U$ representa la energía potencial:

$$T - U = h = \text{const.} = H.$$

Observemos, para terminar, que la transformación de las ecuaciones de Lagrange, en la forma canónica de Hamilton, es siempre posible.

21. **Principio de Hamilton.** — Volvamos ahora á la ecuación de los trabajos virtuales :

$$\sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0. \quad (1)$$

para todos los desplazamientos $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, compatibles con las uniones.

Sean dos posiciones $P_0$, $P_1$, del sistema á las épocas $t_0$ y $t_1$. En el movimiento natural del sistema de la posición $P_0$ a la posición $P_1$, bajo la acción de las fuerzas y uniones dadas, las coordenadas son funciones del tiempo que satisfacen á las ecuaciones de unión, y toman valores fijados de antemano á las épocas $t_0$ y $t_1$.

Sean, pues, $(x+\delta x)$, $(y+\delta y)$, $(z+\delta z)$ funciones cualesquiera de $t$, infinitamente vecinas de las funciones $x$, $y$, $z$, que corresponden al movimiento natural ; estas nuevas funciones satisfacen también á las ecuaciones de unión, y toman por hipótesis á las épocas $t_0$ y $t_1$ los mismos valores que $x$, $y$, $z$. Resulta de la hipótesis que $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, son funciones de $t$ infinitamente pequeñas que se anulan á las épocas dadas y definen en el intervalo desplazamientos compatibles con las uniones.

Sea :

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2)$$

la semifuerza viva del sistema en el movimiento real, y $\delta T$ la variación que experimenta la misma cuando $x$, $y$, $z$, experimentan las variaciones $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$.

Se tendrá :

$$\delta T=\Sigma m(x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z')$$

y también :

$$\int_{t_0}^{t_1} mx'\delta x'dt=\int_{t_0}^{t_1} m\frac{dx}{dt}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=\int_{t_0}^{t_1} m\frac{dx}{dt}d(\delta x).$$

Integremos por partes la última integral, y tendremos :

$$\int_{t_0}^{t_1} m\frac{dx}{dt}d(\delta x)=\left[m\frac{dx}{dt}\delta x\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x dt.$$

El primer término es nulo, puesto que $\delta x$ se anula en los límites indicados.

Del mismo modo, se podría transformar cada uno de los términos de la integral :

$$\int \delta T dt = \int \Sigma m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')dt$$

lo que da por último :

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta T + \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)]dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( X - m\frac{d^2x}{dt^2} \right)\delta x + \left( Y - m\frac{d^2y}{dt^2} \right)\delta y + \left( Z - m\frac{d^2z}{dt^2} \right)\delta z \right] dt = 0. \quad (I)$$

Esta ecuación expresa el *principio de Hamilton* que significa que la integral (I) es nula para todos los sistemas de valores de las $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, que satisfacen á las uniones, siendo la suma $\Sigma$ extendida á todas las fuerzas dadas, distintas de las de unión.

Si ahora introducimos la hipótesis de que las componentes X, Y, Z, de estas fuerzas son las derivadas parciales de cierta función U de las coordenadas y del tiempo, sabemos que en este caso la suma es la diferencia total de U cuando se considera $t$ como constante, y se tiene :

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)dt = 0,$$

lo que permite enunciar el principio de Hamilton bajo otra forma muy elegante :

Si conocemos las posiciones del sistema a las épocas $t_0$ y $t_1$, *la variación que experimenta la integral :*

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)dt,$$

cuando se pasa del movimiento real á todo movimiento infinitamente vecino compatible con las uniones, *es nula.*

Este principio permite determinar el movimiento compatible con las uniones ; para ello basta buscar el movimiento compatible con las uniones para el cual la integral es *máxima* ó *mínima,* puesto que, para encontrar el mismo movimiento, es menester igualar á cero la variación de la misma integral.

Por otra parte, Darboux demostró que, si U no contiene á $t$, la integral es mínima para el movimiento real, siempre que el intervalo entre los límites $(t_1 - t_0)$ sea suficientemente pequeño.

22. **Teorema de Liouville.** — El principio de Hamilton está expresado por la ecuación:

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0,$$

lo que equivale á la relación:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \text{const.}$$

en que U expresa la función de las fuerzas ó función potencial. Resulta que, si designamos por V la energía potencial, que es igual á U, se tiene:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = \text{const.} \tag{1}$$

Imaginemos, pues, un sistema mecánico determinado por ecuaciones de movimiento dadas, cuyo estado dependa á cada instante de $2k$ parámetros:

$$q_1, q_2, q_3, \dots q_k, \qquad p_1, p_2, p_3, \dots p_k$$

siendo los valores iniciales de estos parámetros, para $t = 0$, representados por:

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots Q_k, \qquad P_1, P_2, P_3, \dots P_k.$$

Del mismo modo que se puede obtener un número infinito de curvas planas cuando se tiene un ecuación entre $x$ é $y$ que depende de un solo parámetro, cuando se atribuye á dicho parámetro valores variables, aquí podemos, mediante la variación de las Q y P, conseguir un número infinito de sistemas mecánicos distintos, aunque de naturaleza igual, y sometidas á las mismas ecuaciones de movimiento; para ello basta partir de valores iniciales diferentes.

Entre estos infinitos sistemas, hay unos para los cuales los valores iniciales de las $p$ y $q$ están comprendidos entre límites determinados é infinitamente vecinos, como por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} P_1 \text{ y } (P_1 + dP_1), & P_2 \text{ y } (P_2 + dP_2), & \dots & P_k \text{ y } (P_k + dP_k) \\ Q_1 \text{ y } (Q_1 + dQ_1), & Q_2 \text{ y } (Q_2 + dQ_2), & \dots & Q_k \text{ y } (Q_k + dQ_k) \end{array} \right. \tag{2}$$

Después de un tiempo $t$ de movimiento, los valores iniciales precedentes se encontrarán comprendidos entre:

$$\left\{\begin{array}{llllllll} p_1 & y & (p_1+dp_1), & p_2 & y & (p_2+dp_2), \dots p_k & y & (p_k+dp_k) \\ q_1 & y & (q_1+dq_1), & q_2 & y & (q_2+dq_2), \dots q_k & y & (q_k+dq_k) \end{array}\right. \tag{3}$$

Trataremos, pues, de expresar el producto de todas las diferenciales :

$$dq_1 dq_2 \dots dq_k dp_1 dp_2 \dots dp_k \tag{4}$$

en función del producto de las diferenciales de los valores iniciales :

$$dQ_1 dQ_2 \dots dQ_k dP_1 dP_2 \dots dP_k. \tag{5}$$

Sabemos que las $p$ son funciones de las $q$, de las P y de $t$. Se puede también introducir en la expresión (4) las variables $q$ y Q en vez de las $q$ y $p$, y se tendrá en virtud del teorema de Jacobi sobre los determinantes funcionales :

$$dq_1 dq_2 \dots dq_k dp_1 dp_2 \dots dp_k = \mathrm{D}\, dq_1 dq_2 \dots dq_k dQ_1 dQ_2 \dots dQ_k \tag{6}$$

siendo el determinante funcional D de la forma :

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \frac{dp_1}{dQ_1} & \frac{dp_2}{dQ_1} & \frac{dp_3}{dQ_1} & \dots & \frac{dp_k}{dQ_1} \\ \frac{dp_1}{dQ_2} & \frac{dp_2}{dQ_2} & \frac{dp_3}{dQ_2} & \dots & \frac{dp_k}{dQ_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dp_1}{dQ_k} & \frac{dp_2}{dQ_k} & \frac{dp_3}{dQ_k} & \dots & \frac{dp_k}{dQ_k} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Del mismo modo, en la relación (5) se puede introducir las variables $q$ y Q en vez de Q y P, considerándose las P como funciones de las Q, $q$ y $t$, y se tendrá :

$$dQ_1 dQ_2 \dots dQ_k dP_1 dP_2 \dots dP_k = \Delta dP_2 dQ_2 \dots dQ_k dq_1 dq_2 \dots dq_k, \tag{8}$$

siendo el determinante funcional $\Delta$ de la forma :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dp_1}{dQ_1} & \frac{dp_2}{dQ_1} & \dots & \frac{dp_k}{dQ_1} \\ \frac{dp_1}{dq_2} & \frac{dp_2}{dq_2} & \dots & \frac{dP_k}{dq_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dP_1}{dq_k} & \frac{dP_2}{dq_k} & \dots & \frac{dP_k}{dq_k} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Observaremos que en el determinante D hemos de considerar las derivadas parciales que contienen las $p$ como funciones de las $q$, Q y de $t$. En cuanto á estas funciones $p$, convendremos designarlas por el símbolo:

$$\bar{p} = f(q, Q, t).$$

En el determinante $\Delta$, ó más bien en las derivadas parciales de que se compone, hemos de considerar las P como funciones de las mismas variables $q$, Q y $t$, y las designaremos mediante igual notación por:

$$\bar{P} = \varphi(q, Q, t).$$

En la ecuación (1):

$$W = \int_0^t (T - V) dt \qquad (1)$$

W aparece con evidencia como una función de los valores iniciales P, Q y del tiempo $t$, puesto que estos valores determinan completamente el movimiento, y se puede calcular la integral si se da $t$.

Por otra parte, siendo á su vez las $2k$ magnitudes $p$ y $q$ funciones de P, Q y $t$, existen $2k$ relaciones entre las $(4k+1)$ cantidades $p$, $q$, P, Q y $t$, y de ellas hemos podido justamente sacar las $2k$ magnitudes $p$ y $q$ como funciones de las $(2k+1)$ otras variables. Pero estas mismas relaciones servirán también para expresar las $2k$ cantidades $p$, P en función de las $(2k+1)$ variables restantes $q$, Q y $t$. Como W se puede expresar en función de P, Q y $t$, se puede también, substituyendo las cantidades P, conseguir su expresión en función de $q$, Q y $t$. Según el mismo convenio, desde este punto de vista, nos valdremos del símbolo:

$$W.$$

Ahora bien, según un teorema conocido de Jacobí (*), se tiene:

(*) Véase APPELL, *Mécanique rationnelle*, tomo II, página 409.

$$\frac{\overline{dW}}{dq_i} = \overline{p_i}, \qquad \frac{\overline{dW}}{dQ_i} = -\overline{P_i},$$

de donde se deduce:

$$\frac{\overline{dp_i}}{dQ_i} = \frac{\overline{d^2W}}{dq_i dQ_i}$$

$$-\frac{\overline{dP_i}}{dq_i} = \frac{\overline{d^2W}}{dq_i dQ_i}$$

y por último:

$$\frac{\overline{dp_i}}{dQ_i} = -\frac{\overline{dP_i}}{dq_i}. \qquad (10)$$

De la anterior resulta que se puede aplicar las relaciones (10) á $\overline{p}$ y $\overline{P}$, y se tiene para $\Delta$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{dp_1}{dQ_1} & \frac{dp_2}{dQ_1} & \ldots & \frac{dp_k}{dQ_1} \\ -\frac{dp_1}{dQ_2} & -\frac{dp_2}{dQ_2} & \ldots & \frac{dp_k}{dQ_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{dp_1}{dQ_k} & -\frac{dp_2}{dQ_k} & \ldots & \frac{dp_k}{dQ_k} \end{vmatrix}$$

ó bien, si observamos que este determinante no es sino el funcional D, en el cual se han cambiado los signos de las $k$ columnas:

$$\Delta = (-1)^k . D. \qquad (11)$$

Ahora volvamos á las ecuaciones (6) y (8):

$$dq_1 dq_2 \ldots dq_k dp_1 dp_2 \ldots dp_k = D dq_1 dq_2 \ldots dq_k dQ_1 dQ_2 \ldots dQ_k \qquad (6)$$

$$dQ_1 dQ_2 \ldots dQ_k dP_1 dP_2 \ldots dP_k = \pm D dQ_1 dQ_2 \ldots dQ_k dq_1 dq_2 \ldots dq_k. \qquad (8)$$

Vemos que los segundos miembros son iguales, menos en lo que se refiere á los signos, y, por consiguiente, se puede escribir:

$$dq_1 dq_2 \ldots dq_k dp_1 dp_2 \ldots dp_k = \pm dQ_1 dQ_2 \ldots dQ_k dP_1 dP_2 \ldots dP_k. \qquad (12)$$

Por otra parte, existe un procedimiento analítico que permite determinar el signo, pero no me parece conveniente insistir en este punto. Tal es el teorema de Liouville.

Tenemos ahora que emprender la demostración del teorema fundamental de la equirrepartición de la energía, que forma el tema del capítulo siguiente.

## CAPÍTULO III

### EL TEOREMA DE EQUIRREPARTICIÓN DE LA ENERGÍA

23. **Intervención de la energía en los colores específicos.** — Consideremos un cuerpo cualquiera que contiene N partículas de masa $m$ por unidad de masa, por ejemplo por moléculagramo, siendo dichas partículas átomos ó electrones. Sabemos que, en este caso, el número N es el de Avogadro, cuyo valor numérico es $68.10^{22}$. Sea E la energía media de una partícula cuando la temperatura absoluta del cuerpo es T. Podemos escribir que $d$E, variación de E que corresponde á una variación $d$T de la temperatura, tiene por expresión:

$$dE = C_v J m dT \qquad (1)$$

siendo $Cv$ el calor específico del cuerpo bajo volumen constante, J el equivalente mecánico de la caloría, siempre que se desprecie la dilatación térmica de la substancia, y suponiendo que los valores de N y $m$ son independientes de la temperatura, ó sea que la relación (1) se aplica sólo á substancias para las cuales los fenómenos químicos de disociación y otros no existen ó son despreciables.

La experiencia, en tales condiciones, suministra una ley aproximamada segun la cual $Cv$ es independiente de la temperatura dentro de límites extensos de variación de esta.

Ahora bien, se puede dar á la relación (1) la forma:

$$C_v = \frac{1}{Jm}\frac{dE}{dT}. \qquad (2)$$

Si $C_v$ no varía, es preciso que la derivada $\frac{dE}{dT}$ quede también invariable, de donde:

$$\frac{dE}{dT} = a$$

$$E = aT + b,$$

y si se toma por origen:

$$T = 0, \qquad E = 0$$

$$\frac{E}{T} = a.$$

Supongamos, pues:

$$a = \frac{1}{2}RS,$$

siendo R la constante de los gases perfectos y S un coeficiente también constante pero desconocido, y tendremos:

$$C_v = \frac{R}{Jm}S \tag{3}$$

y también:

$$E = \frac{1}{2}RTS. \tag{4}$$

Observemos que, en la expresión (3), conocemos todo menos S, lo que permite determinar el valor de este coeficiente para varias substancias.

Ahora bien, dentro de los límites de T entre los cuales $Cv$ permanece experimentalmente invariable, encontramos que los valores de S, para un gran número de gases, se acercan mucho á números enteteros, siendo, para la mayor parte de los cuerpos simples, sensiblemente iguales á 6. Además se notan regularidades inesperadas en la distribución de los valores de S. Para los gases, cuyas moléculas representan nuestras partículas, todos los monoatómicos nos dan el valor 3, muchos diatómicos 5, y ninguno el valor 4.

Para los sólidos, cuyo átomo representa la partícula, se observa un valor de S igual á 6, y esta constante aproximada resulta ser la expresión de la ley de Dulong et Petit que atribuye al calor atómico el valor 5,95.

24. **Equirrepartición de la energía.** — El teorema de la equirrepartición de la energía, en la forma más sencilla, parece que lo debemos,

aunque sin demostración precisa, á Waterston que, en una memoria presentada á la Sociedad Real de Londres en 1845, la enunció en los términos siguientes : en las mezclas, la velocidad molecular cuadrática, ó sea $(x'^2 + y'^2 + x'^2)$ es *inversamente proporcional á la masa específica de la molécula.*

En esta forma, la equirrepartición de la energía se reduce á la expresión de la ley de equilibrio de la fuerza viva.

Observaremos que las demostraciones de muchos teoremas enunciados en la misma memoria eran inexactas, y por esto mismo, la memoria no fué publicada por la Sociedad Real, pero, en 1892, se publicó en la revista *Philosophical Transaction* con motivo del interés histórico que ofrecía por enunciar un número crecido de teoremas que se incorporaron después á la teoría cinética de los gases.

Lord Rayleigh, en una nota relacionada con lo que Waterston llamaba la ley de equilibrio de la fuerza viva, formulaba la observación siguiente : « Esto representa el primer enunciado de un teorema importante, aunque la demostración resulte casi insostenible. »

Mientras tanto los trabajos de Clausius habían señalado la necesidad del estudio de una distribución de energía en los gases, y Maxwell volvió á encontrar el teorema en una memoria que presentó á la *British Association* en el año 1859 con el enunciado siguiente : « Dos sistemas de moléculas estando en movimiento en un mismo recinto, la fuerza viva media de una partícula tiene que tomar el mismo valor para los dos sistemas. »

Observemos en seguida que la demostración de este teorema suministrada por Maxwell no es del todo correcta, pues descansa en la hipótesis no justificada que la distribución de una componente $u$ de la velocidad entre las moléculas es independiente de la repartición de las otras dos componentes $v$ y $w$.

Más adelante, en 1861, Boltzmann dió á la publicidad una memoria que volvemos á encontrar más completa en su *Teoría cinética de los gases* (t. II, cap. III y IV). Allí estudia la distribución de las varias clases de energía en un sistema de moléculas en movimiento. Pero la demostración dada por el físico austriaco del teorema de la equirrepartición de la energía descansa, como casi toda su teoría, sobre un fundamento algo criticable, ó sea la hipótesis, esencial para la misma demostración y ya señalada, de que la distribución de las moléculas es *ungeordnete.*

No me propongo reproducir aquí esta parte de la obra de Boltzmann, pues tendría que desarrollar más ó menos toda la parte de la

teoría cinética de los gases que no me parece tener un interés inmediato, y salir de los límites naturales de la presente monografía. Por otra parte, tenemos á mano un procedimiento más fácil de demostración que debemos al profesor J. H. Jeans de Cambridge; se encuentra en la memoria que leyó el físico inglés en la conferencia reunida en Bruselas (del 30 de octubre al 3 de noviembre de 1911) bajo los auspicios del gran industrial belga E. Solvay.

25. **Demostración del teorema.** — Con el objeto de reducir las demostraciones de Maxwell y Boltzmann á la más simple expresión, podríamos resumir la explicación de estos sabios diciendo que según ellos, el valor atribuído á E, energía media de una partícula, por la fórmula:

$$E = \frac{1}{2} RTS \tag{1}$$

corresponde á una contribución $\frac{1}{2}RT$ por cada término cuadrado *eficaz* en la energía de una partícula, de modo que S, por medir el número de los términos cuadrados, resulta necesariamente entero. El teorema sobre el cual está basada la explicación nos enseña que cada término cuadrado eficaz ha de suministrar á la energía media E una contribución exactamente igual á $\frac{1}{2}RT$.

Pero ¿cómo debemos entender, según Maxwell y Boltzmann, la palabra *término cuadrado eficaz* cuyo sentido nunca fue definido de una manera clara y precisa? Este, como los ya señalados, resulta uno de los puntos más débiles de la teoría.

Veamos ahora la demostración de Jeans.

Dado un sistema dinámico, que obedece á las ecuaciones de Lagrange y por consiguiente á las de Hamilton, representaremos otra vez por $q_1, q_2, \ldots q_k$ á las coordenadas generalizadas.

El estado del sistema, á una época cualquiera, se puede figurar por un punto en un espacio de $k$ dimensiones, en el cual $q_1, q_2, \ldots q_k$ serían consideradas como coordenadas rectangulares. La serie de los estados sucesivos del sistema, que son la consecuencia de su movimiento, está representada mediante una curva descripta por el punto.

Si todo el hiperespacio lo suponemos llenado por otros puntos análogos, tendremos una representación que nos permitirá estudiar simultáneamente todos los movimientos posibles del sistema considerado.

Por otra parte, es fácil deducir del teorema de Liouville que la densidad de un pequeño grupo de puntos no cambia cuando se desplazan como para seguir el movimiento real del sistema. Luego es más cómodo suponer una densidad inicial uniforme en todo el espacio de $k$ dimensiones, que permanece uniforme mientras transcurre el tiempo.

Observaremos por otra parte que, para muchos sistemas, la energía total W, como ya lo sabemos, puede ponerse en la forma de una suma de cuadrados multiplicados cada uno por una constante:

$$W = \alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 q_2^2 + \ldots + \alpha_k k_k^2. \qquad (2)$$

Pero, como las coordenadas $q$ no son determinadas sino cuando no se tiene en cuenta para cada una un factor constante, podremos siempre elegir estos factores de modo que las $\alpha$ se vuelvan iguales á la unidad, y tendremos:

$$W = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \ldots + q_k^2, \qquad (3)$$

de modo que la energía se mide por el cuadrado de la distancia del punto representativo del sistema al origen de las coordenadas en un espacio de $k$ dimensiones.

Observemos con Jeans que la demostración del teorema se puede verificar en varias formas, siempre que sean satisfechas las dos condiciones siguientes para un tiempo dado $t$:

1° Si el sistema no es rigurosamente conservador de la energía, la pérdida de esta durante el tiempo $t$ ha de ser muy pequeña con relación á la energía total;

2° Cada uño de los términos $q_1^2$, $q_2^2$ ... que componen la expresión de la energía tiene que formar parte de una cualquiera de las dos categorías siguientes distintas y opuestas:

I. La primera goza de la propiedad de que el tiempo $q$ necesario para un cambio sensible de $q^2$ es *muy pequeño* con respecto á $t$;

II. La segunda al contrario es tal que el tiempo necesario para verificar un cambio sensible de $q^2$ es *grande* con respecto á $t$.

Los términos que pertenecen á la categoría (I) son los *cuadrados eficaces* de los cuales hablamos más arriba; en cuanto á los de la categoría (II) los llamaremos cuadrados *no eficaces*.

Observaremos que no hay ningún motivo para que, en un sistema real, los términos se repartan así en dos categorías opuestas, y hasta podríamos decir *a priori* que todo lo contrario ha de suceder. Pero recordaremos que el teorema de la equirrepartición está limitado preci-

samente á sistemas que gozan de aquella propiedad, y así nos damos cuenta de que al teorema no le corresponde sino un campo de aplicación muy limitado, lo que muchos se olvidan con frecuencia.

Supondremos pues que, para el sistema considerado, los términos $q^2$ se reparten entre las dos categorías definidas y opuestas. De este modo, W se compone de $m$ términos *eficaces*, que llamaremos por ejemplo $q_1^2$, $q_2^2$ ... $q_m^2$, cuya energía total es $W_e$ y de $(k-m)$ términos *no eficaces*, cuya energía será $(W-W_e)$.

En razón de las condiciones impuestas, W y $(W-W_e)$ no cambian sino muy poco durante un tiempo dado $t_0$, y lo mismo sucede con $W_e$. De este modo el movimiento de un punto representativo en el espacio de $k$ dimensiones es de tal naturaleza que al menos durante un tiempo del orden de magnitud de $t_0$, las coordenadas no eficaces permanecen sensiblemente constantes, mientras las eficaces varían rápidamente, describiendo el punto una trayectoria sobre la hiperesfera :

$$q_1^2 + q_2^2 + ... + q_m^2 = W_e. \tag{4}$$

La hipótesis más sencilla consiste en admitir lo que se podría también demostrar por consideraciones dinámicas de orden general, ó sea que una medición de calor específico da siempre igual resultado si se efectúa en las mismas condiciones. Resulta que la repartición de la energía en el sistema ha de ser determinada por las condiciones exteriores; pero eso no significa que el movimiento de los puntos en el hiperespacio sea dirigido siempre hacia las regiones en las cuales existe una repartición especial de la energía, pues la uniformidad de la densidad no lo permite, sino que la repartición observada de la energía es cierta para todo el hiperespacio, menos tal vez para regiones bastante pequeñas para que dejen de ser accesibles á la observación, ó sea por ejemplo la región que representa sistemas para los cuales toda la energía se encuentra en el movimiento de una sola molécula, quedando las demás en estado de reposo.

Ahora bien, esta distribución de energía común á todo el espacio se puede determinar con facilidad. Observemos en efecto que tomar al azar un punto sobre la hiperesfera equivale á elegir también al azar un sistema de valores $q_1$, $q_2$, $q_3$ ... $q_m$ tales que la suma de sus cuadrados sea igual á $W_e$. Pero, por otra parte, sabemos que series de valores están repartidas alrededor de su valor medio cero con arreglo á la ley de las probabilidades, y el número de coordenadas comprendidas entre $q$ y $(q+dq)$ es dado mediante la fórmula :

$$m\sqrt{\frac{2h}{\pi}}e^{-2hq^2}.dq \tag{5}$$

en la cual $h$ es una constante determinada por el hecho de que la suma de los valores de las $q^2$ repartidos conforme á la ley (5) es $\frac{m}{4h}$ y tiene también que ser igual á $W_e$.

Si tomamos un gran número $p$ de términos entre los $m$, y si los observamos mientras transcurre el tiempo, la suma de los $p$ valores de los $q^2$ quedará constantemente igual á $\frac{p}{4h}$ ó no diferirá de este valor sino en una cantidad que se anula en el límite cuando $p$ se pone muy grande.

Resulta que la contribución de aquellas $p$ términos á la energía total resultará igual á $\frac{P}{m}$ $W_e$. Si N partículas suministran cada una S términos á la energía eficaz $W_e$, la suma de estos NS términos tendrá por valor:

$$\frac{NS}{4h} = \frac{NS}{m}W_e.$$

Si ahora admitimos que una parte del sistema es un termómetro de gas, se demuestra la relación:

$$\frac{1}{2h} = RT$$

y la energía de las N partículas toma la forma:

$$W = \frac{1}{2}NSRT,$$

de donde:

$$E = \frac{1}{2}RTS \tag{6}$$

para cada partícula, y el teorema de la equirrepartición de la energía queda así demostrado.

26. **Determinación del factor S.** — Lo que sabemos por ahora de este número es que representa el término eficaz que suministra cada una de las partículas á la formación de la energía de una de ellas.

El cálculo de las probabilidades nos enseña que la duración del recorrido libre de una partícula en un gas, en las condiciones normales, es del orden de:

$$10^{-10} \text{ segundo.}$$

Como la energía total del gas permanece sensiblemente constante durante períodos largos con relación á aquella duración, es evidente que las coordenadas, que varían á cada choque, han de corresponder á términos eficaces en la expresión de la energía. Esto sucede, pues, con las coordenadas que representan los movimientos de traslación de las moléculas de un gas y las que corresponden al movimiento de rotación en torno de un eje de revolución si la forma de la molécula lo permite. Ahora bien, el movimiento de traslación suministra 3 unidades á S, la rotación 0, 2 ó 3 segun la forma de la molécula y nunca 1. Resulta que se puede tener:

$$S = 3$$

$$S = 5$$

$$S = 6$$

y nunca $S = 4$, y la teoría de Maxwell-Boltzmann se halla confirmada con esto, en una forma notable, por los valores experimentales de los calores específicos de los gases.

Sin embargo las vibraciones internas de las moléculas de un gas, puestas en evidencia por las rayas del espectro visible, se han considerado como una sería dificultad para la teoría.

Á pesar de todo, se podría admitir que aquellas vibraciones no corresponden sino á términos no eficaces en la expresión de la energía y mostrar que el tiempo necesario para que ellas aparezcan de un modo sensible, en razón de los choques entre moléculas, se mide muy probablemente por siglos. Pero la dificultad es mayor en cuanto á las vibraciones de frecuencia más pequeña que corresponden á las fajas de absorción en el infrarrojo, y no hay mucha probabilidad para que estas vibraciones se puedan explicar mediante la teoría de Maxwell-Boltzmann.

El caso de los sólidos da lugar á dificultades aun mayores. En efecto no se puede admitir *a priori* que el movimiento de traslación de los átomos corresponde á términos eficaces en la energía. Pero, si así es, el número de estos será igual á 6 para cada átomo, ó sea 3 para la energía cinética, y 3 para la energía potencial. Además si estos tér-

minos son eficaces, habría que agregarles otros 6 casi seguramente para la rotación del átomo, ó sean otra vez 3 para la energía cinética y 3 para la energía potencial, pues los átomos adquieren fácilmente un movimiento de rotación cuando se hace girar un sólido en conjunto. Tendríamos así para S un valor igual á 12 muy grande si se lo compara con los resultados experimentales.

Por otra parte, el movimiento de los electrones en un sólido ha de corresponder con toda seguridad á términos eficaces de la energía del mismo, pues sus velocidades son debidas por la mayor parte á los choques. Ahora bien, la energía de estos electrones la midieron directamente Richardson y Brown y la encontraron igual á la de la molécula de un gas monoatómico para el cual se tiene $S = 3$. Si hay $p$ electrones en cada átomo de un sólido, han de suministrar por su cuenta una contribución de $3p$ al valor de S. Pero la experiencia nos enseña que S es igual á 6, de modo que $p$ no podría nunca ser mayor que 2; ahora bien las determinaciones más precisas de $p$ dan valores que resultan muy poco diferentes de 2, y cuando se apartan de este valor, son más bien menores.

En estas condiciones, parece natural y sencillo admitir que el valor $S = 6$ procede únicamente de la contribución $3p$ debida á los electrones libres, siendo $p$ igual á 2.

Este modo de ver exige que los movimientos de traslación y rotación de los átomos correspondan á términos no eficaces de la energía, y esta hipótesis está de acuerdo con lo que sabemos respecto al movimiento interno de los sólidos.

Podríamos también sacar de allí la consecuencia indirecta siguiente: hemos de prever que el número de los electrones libres disminuye cuando baja la temperatura, de modo que, segun toda probabilidad, no queda ninguno al cero absoluto. El número $p$ también ha de variar con la temperatura, tomando el valor cero cuando se tiene $T = 0$ y creciendo asintóticamente hasta tomar el valor 2.

Tal hipótesis tendría la consecuencia de que el calor específico de los sólidos se anularía también al cero absoluto, conforme al teorema de Nernst. Pero, á pesar de esta concordancia con los hechos que corresponden á la fórmula del sabio prusiano y de su colaborador Lindemann, es muy probable que la hipótesis que acabamos de definir no daría nada comparable con el acuerdo cuantitativo de aquella fórmula.

27. **Resumen y conclusión en cuanto al principio de la equirrepartición de la energía.** — Antes de terminar el presente capítulo, me parece

conveniente resumir los resultados que hemos obtenido, en una forma sencilla que encuentro en la conferencia dada por Edmundo Bauer en 1912 y organizada por la *Société française de physique*.

Si un sistema cualquiera está regido por las leyes de la mecánica clásica, ó sea si las ecuaciones del movimiento pueden tomar la forma canónica de Hamilton, si por lo tanto á este movimiento se aplica el principio de este nombre; si además se conoce su energía interna, podemos prever cual será su configuración más probable y cómo se repartirá su energía entre los varios grados de libertad. Resulta que se puede enunciar el principio siguiente: si elegimos las coordenadas generalizadas, de modo que la energía cinética del sistema se presente como una suma de los cuadrados de algunas de ellas, cada término de la suma correspondiendo á una variable independiente, lo que siempre es posible, la energía cinética total de la molécula gramo se reparte igualmente entre aquellas variables distintas, y la energía media relativa á cada uno de los grados de libertad tiene por expresión:

$$W = \frac{1}{2}\frac{RT}{N}$$

siendo R la constante de los gases perfectos, T la temperatura absoluta y N el número de Avogrado que tiene por valor:

$$N = 68 . 10^{22}.$$

Por otra parte, si el sistema considerado tiene también una energía potencial que se presente en la forma de una suma de cuadrados, lo que sucede en el caso de vibraciones elásticas, se verifica del mismo modo la equirrepartición de aquella entre los grados de libertad, y se tiene:

$$U = \frac{1}{2}\frac{RT}{N}$$

para la energía potencial media relativa á un grado de libertad cualquiera, conservando R, T y N la misma significación.

Este principio ha sido averiguado en sus consecuencias por las experiencias de Jean Perrin en cuanto á los movimientos de traslación y rotación de *granos* en suspensión en un líquido. En efecto, cualesquiera sean la masa y la forma de cada uno de los granos, las experiencias han mostrado que su energía cinética total tiene por expresión $6\frac{RT}{2N}$, siendo 6 el número real de grados de libertad de cada uno.

# CAPÍTULO IV

## TEORÍA DE LA RADIACIÓN

28. **Aplicación al éter del teorema de equirrepartición de la energía.** — El teorema toma un aspecto algo diferente cuando se quiere aplicarlo al éter. La energía de este ambiente que puede ser la sede de vibraciones de poca amplitud, se expresa por una suma de cuadrados á razón de dos términos por cada modo independiente de vibración del ambiente. Por otra parte, toda vibración *libre* tiene un período determinado y corresponde, si el ambiente es homogéneo, á una longitud de onda bien definida. Por último la energía de una perturbación cualquiera se puede descomponer en varias partes que corresponden á series de ondas ú oscilaciones de varias longitudes de ondas.

Si nos limitamos á considerar las *dimensiones*, encontraremos fácilmente que el número de vibraciones libres ó de grados de libertad, que corresponden á los longitudes de onda comprendidas entre $\lambda$ y $(\lambda + d\lambda)$ en un ambiente cualquiera, es inversamente proporcional á la cuarta potencia de $\lambda$; este resultado es conocido con el nombre de ley de Rayleigh. Veamos como procedió este físico para conseguirla.

Kirchhoff ya había demostrado que, en un recinto cerrado, cuyas paredes permanecen á una temperatura uniforme; se origina una radiación cuya intensidad y naturaleza quedan independientes de la forma y de la constitución de los cuerpos internos al recinto.

Para mayor precisión, diremos que la repartición de la energía en el espectro se determina según los estudios de Kirchhoff cuando se conoce la temperatura absoluta T de las paredes, lo que equivale á admitir que la densidad de la energía radiante $E_{\lambda} d\lambda$, comprendida entre las longitudes $\lambda$ y $(\lambda + d\lambda)$, no depende sino de $\lambda$ y T:

$$E_{\lambda} d\lambda = f(\lambda, T) d\lambda, \qquad (1)$$

siendo $f(\lambda, T)$ una *función universal*.

Por otra parte, leyes enunciadas por Stefan y Wien, cuya demostración es posible con todo rigor mediante la termodinámica y el electromagnetismo, permiten poner en evidencia que la función $f$ se puede escribir:

$$f(\lambda, \mathrm{T}) = \mathrm{A}\frac{\mathrm{F}(\lambda\mathrm{T})}{\lambda^5} \qquad (2)$$

lo que da:

$$\mathrm{E}_\lambda d\lambda = \frac{\mathrm{A}}{\lambda^5}\mathrm{F}(\lambda\mathrm{R})d\lambda, \qquad (3)$$

siendo F otra función universal que no depende sino de la variable independiente $\lambda$T.

Observaremos desde luego que la termodinámica no permite determinar la forma de la función F, pues los fenómenos de la radiación dan intervención á movimientos atómicos é intratómicos sobre los cuales aquella ciencia no puede informarnos. Pero es factible aplicar á aquellos fenómenos la teoría cinética y especialmente el teorema de equirrepartición de la energía entre los varios grados de libertad, lo que hicieron lord Rayleigh y Jeans.

Sin embargo hemos de señalar aquí una dificultad invencible. Si consideramos un sistema formado por un recinto que contiene materia, electrones capaces de emitir ondas luminosas tan pronto como experimentan aceleraciones y el éter que las propaga, veremos al tratar de hacer la cuenta de los grados de libertad del sistema, que el número de estos resulta infinito.

En efecto el éter actúa como un flúido perfecto indefinidamente divisible y, según la teoría electromagnética de la luz, el estado de este flúido á una época dada está determinado por el valor de los campos eléctrico y magnético en cada punto. Pero como este valor es una función continua de las coordenadas que satisface á las ecuaciones de Poisson y Laplace, su forma puede experimentar todas las variaciones posibles, pues los valores de los campos en dos puntos dados pueden diferir tanto como se quiere. Ahora bien, en el caso de los fenómenos de radiación, estos campos son periódicos con frecuencias y longitudes de ondas determinadas. En estas condiciones la dificultad señalada se puede definir como sigue: el éter es capaz de transmitir vibraciones de todas las frecuencias, desde cero hasta el infinito, y, para fijar su estado, es menester conocer la intensidad de todas estas vibraciones, que forman una serie infinita análoga á la de los números naturales.

Para expresar esta idea con mayor precisión, consideremos con lord Rayleigh, Jeans y Lorentz un recinto en forma de paralelepípedo rectángulo de paredes perfectamente reflectoras y de volumen V, cuyas dimensiones sean grandes con respecto á las longitudes de onda consideradas. Este recinto contendrá moléculas, materiales y electro-

nes que suministrarán un número finito de grados de libertad. En cuanto á los del éter, corresponderán á las vibraciones que pueden comunicar al recinto el estado de resonancia, ó sea á los períodos propios del mismo, y el problema consiste en calcular el número de estas vibraciones. Por otra parte, el problema parece mucho al de acústica que consiste en buscar los varios sonidos que pueden provocar la resonancia de un tubo sonoro, en forma de paralelepípedo rectángulo, y de dimensiones dadas. Ahora bien, el mismo lord Rayleigh ya lo resolvió hace tiempo, y basta modificar las condiciones en las paredes para aplicar iguales razonamientos al caso del éter. Con esto se llega á la ley de lord Rayleigh ya citada que se expresa como sigue:

$$n = \frac{a}{\lambda^4} d\lambda, \tag{4}$$

siendo $n$ el número de las *vibraciones libres*.

Por otra parte, resulta del cálculo que $a$ es igual á $8\pi$, para el éter, por unidad de volumen, lo que da para el volumen total V del recinto:

$$n = \frac{8\pi V}{\lambda^4} d\lambda. \tag{5}$$

En cuanto al número de grados de libertad que corresponden á las frecuencias comprendidas entre:

$$\nu \qquad \text{y} \qquad (\nu + d\nu),$$

siendo $\nu$ determinada por las relaciones:

$$\nu = c\lambda^{-1}$$

$$c = 3.10^{10} \text{ cm/seg.},$$

está suministrado mediante una transformación muy sencilla de la relación (5):

$$n' = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu. \tag{6}$$

La expresión (5) muestra que el número de grados de libertad, con respecto á una extensión dada del espectro normal, crece indefinidamente cuando disminuye la longitud de onda, ó sea cuando aumenta la frecuencia. Luego, después de verificarse el equilibrio estadístico, cuando se produce la equirrepartición de la energía, ya no queda en

una región cualquiera del espectro sino una fracción infinitamente pequeña de la energía total del recinto. De otro modo se podría decir con mayor corrección que el sistema no alcanza nunca el estado de equilibrio estadístico, siguiendo indefinidamente la disipación de la energía hacia longitudes de onda cada vez más cortas y acabando por escapar á todos los procedimientos de observación.

29. **Teoría de Jeans y lord Rayleigh.** — Á pesar del inconveniente que resulta de las consideraciones anteriores, es del mayor interés comprobar las consecuencias á que llegan los dos físicos cuando aplican el teorema de la equirrepartición y la teoría cinética á la radiación. Para ello, voy á recurrir á la memoria del profesor Jeans leída en la conferencia de Bruselas en 1911 ya aludida.

Empieza por observar que cada vibración libre corresponde á dos términos en la expresión de la energía y, por consiguiente que, en el estado de entropía máxima, el conjunto de ellos representa una cantidad de energía igual en promedio á RT, lo que da para la cantidad total de energía por unidad de volumen en el estado de equilibrio termodinámico con la materia :

$$a \int \mathrm{RT} \lambda^{-4} d\lambda. \qquad (1)$$

Después confiesa que la representación gráfica de la integral muestra que la energía se concentra en las vibraciones de longitud de onda infinitamente pequeña, y en caso de que las vibraciones de esta longitud no pueden existir en razón de la estructura del ambiente, reconoce que la mayor parte de la energía se concentra en las radiaciones de menor longitud de onda.

Para ilustrar esta significación especial del teorema mediante la consideración de la energía de las ondas sonoras en un recipiente lleno de aire, Jeans supone que las paredes son rigurosamente impermeables á la energía de modo que el aire constituye un sistema *conservador*. Si entonces se admite que un sistema cualquiera de ondas sonoras existen en el recipiente, quedando éste cerrado y abandonado, las ondas, según la expresión adoptada en la física antigua, se van á *disipar* paulatinamente en virtud de la viscosidad del ambiente hasta que la energía se haya transformado en calor distribuído uniformemente en el recinto. Pero en el lenguaje de la física moderna molecular, se puede decir que la regularidad del movimiento del aire en conjunto está perturbada por los choques entre moléculas, y acaba por

experimentar una degradación en el movimiento térmico irregular, resultando el estado final, cualquiera sea el modo que permita alcanzarlo, en tal forma que las moléculas se mueven con velocidades repartidas al azar, conforme á la ley de Maxwell.

Por otra parte, aquel movimiento irregular se puede descomponer, como cualquier otro, por el análisis de Fourier, en una serie de *trenes de ondas regulares*. Este cálculo muestra que la energía de este movimiento desordenado, después de descompuesta en energías de trenes de ondas, tiene por unidad de volumen el valor :

$$4\pi \int RT\lambda^{-4} d\lambda, \tag{2}$$

al menos mientras la longitud de onda permanece mayor que las distancias moleculares. Ahora bien, este resultado es conforme con la repartición de energía requerida por el teorema, y los dos procedimientos, dice Jeans, así se completan y se aclaran el uno por el otro.

Del mismo modo, si el teorema de equirrepartición fuera aplicable al éter, se podría prever un estado final en que la energía por unidad de volumen en el éter resultaría :

$$8\pi \int RT\lambda^{-4} d\lambda. \tag{3}$$

Esta repartición de energía es la que suministra el valor completo :

$$S = 2$$

para cada vibración, *cualquiera sea su longitud de onda.*

La distribución anterior es la observada experimentalmente para las grandes longitudes de onda, pero deja de ser exacta para las pequeñas. Al pasar de las primeras á las segundas, el valor de S va disminuyendo desde 2, valor que corresponde á los términos eficaces, hasta cero, valor correspondiente á los no eficaces. Ahora bien, el hecho de que el valor de S varía en esta forma nos enseña que el teorema de equirrepartición no es aplicable con todo rigor á las ondas intermedias entre la longitud muy grande y las muy pequeñas. Los términos cuadrados ya no se reparten en dos categorías opuestas y, dice Jeans, « sería interesante encontrar una forma más general del teorema, que comprenda también este caso particular, que Maxwell y Boltzmann dejaron á un lado, en el cual existe una transición continua entre los términos eficaces y los no eficaces ».

Veamos ahora cómo procede Jeans para resolver la dificultad.

**30. Comparación de Jeans entre el fenómeno y otro de hidrostática.** — Empieza por declarar que « el problema es de tal naturaleza que un análisis riguroso le complica más bien, sin aclarar la verdadera dificultad, pudiendo al contrario una analogía hidrostática pintar las cosas más claramente ».

Compara entonces las distintas capacidades de un sistema dinámico, en cuanto á la energía, con una serie de depósitos de agua que comunican por medio de caños. La superficie libre de cada uno, la supone proporcional al número total de los términos cuadrados en la parte correspondiente de la energía del sistema, mientras la altura del agua representa el valor medio de $q^2$ para los mismos términos, de modo que la cantidad de agua contenida en un depósito representa la energía total de la sección correspondiente en el sistema.

Si el sistema es rigurosamente conservador, el teorema de equirrepartición nos enseña que, después de un tiempo suficiente, el agua tomará la misma altura en todos los depósitos. No se exceptuaría sino el caso de que no hubiera comunicación entre uno ó varios de los depósitos y los demás, pues entónces la continuidad de la trayectoria de Maxwell ya no estaría satisfecha. En cuanto á una pequeña disipación de energía, Jeans la representa por escapes que existirían en algunos de los depósitos.

La sección de los caños de comunicación puede ser variable, algunos siendo bastante anchos para que la igualdad de nivel se verifique antes de producir los escapes efectos sensibles ; a estos depósitos corresponden los términos eficaces. Otros pueden comunicar con el sistema principal mediante tubos sensiblemente capilares, y corresponden á los términos no eficaces. Los escapes, en estos últimos, producen por lo general efectos mucho más rápidos que la velocidad del agua, de modo que el nivel se mantiene allí uniformemente *nulo*. Pero Jeans imagina otros depósitos cuyas características son intermedias ; corresponden á términos que no son ni eficaces ni del todo no eficaces. En ellos el nivel del agua queda definido por la condición de que la velocidad de llegada del líquido en cada uno es igual al gasto de salida, y esta condición permite la intervención del gasto en todos los caños. En el estado final, el agua puede, en cualquiera de estos depósitos, alcanzar una altura que depende del estado inicial y resulta intermedia entre el valor cero y el que corresponde á los términos del todo eficaces.

Tal es el sistema representativo imaginado por Jeans, conforme al espíritu característico de Maxwell, que como sucede muchas veces á

los ingleses, tenía afición á las representaciones mecánicas de los fenómenos y se aplicaba á construírlas. Pero, como lo observó Poincaré en la discusión que quedó abierta en la conferencia de Bruselas, después de la lectura de la memoria de Jeans, siempre que se den dimensiones convenientes á los caños y valores apropiados á los escapes, con esto se podrá dar cuenta satisfactoria de toda observación experimental cualquiera sea su naturaleza. Ahora bien, no es este el papel reservado á las teorías físicas, que no consisten en introducir constantes arbitrarias en número igual al de los fenómenos que tratan de explicar; al contrario, las teorías tienen por objeto establecer relaciones exactas entre los hechos experimentales y especialmente permitir la previsión de otros aún no revelados por la experiencia.

Por otra parte, el mismo Jeans confiesa que le es imposible sacar una explicación satisfactoria de la radiación de la teoría Maxwell-Boltzmann, cualquiera sea la extensión que se pueda asignarle, y admite que el desarrollo de la misma no será factible sino después de idear otro mecanismo del fenómeno.

Tenemos pues que imitar á Jeans y abandonar el propósito de hallar en la teoría cinética clásica la ayuda que no puede facilitarnos. Por otra parte hemos de poner en evidencia el desacuerdo completo que existe entre la ley de lord Rayleigh y los resultados experimentales.

31. **Desacuerdo de la ley de lord Rayleigh con los resultados suministrados por la experiencia.** — Tenemos primero que resumir el principio de la ley. Ya sabemos que el número $n$ de los grados de libertad que corresponden á las longitudes de ondas comprendidas entre $\lambda$ y $(\lambda+d\lambda)$ es dado por la expresión

$$n=\frac{8\pi V}{\lambda^4}d\lambda. \tag{1}$$

Como los movimientos vibratorios suponen la existencia de una energía cinética y otra potencial, hay que multiplicar el número anterior por el factor $\frac{RT}{N}$, y la energía que corresponde á una longitud de onda comprendida entre $\lambda$ y $(\lambda+d\lambda)$ en el recinto de volumen V tendrá por supresión:

$$\frac{8\pi}{\lambda^4}V\frac{RT}{N}d\lambda. \tag{2}$$

En cuanto á la densidad de la energía igual á la que corresponde á la unidad de volumen, su valor será :

$$E_\lambda d\lambda = \frac{8\pi RT}{N\lambda^4} = \frac{c}{\lambda^5}\lambda T d\lambda, \tag{3}$$

siendo $c$ igual á $\frac{8\pi R}{N}$.

En estas condiciones, la función $F(\lambda T)$ de Wien toma la forma :

$$F(\lambda T) = c\lambda T \tag{4}$$

lo que significa que es igual al producto de la variable $\lambda T$ por una constante, ó sea función líneal de $\lambda T$.

Si integramos la relación (3), se ve que, si la energía total destinada á ser repartida entre las longitudes de onda es finita, toda región limitada del espectro no recibe de ella sino una fracción infinitamente pequeña. Como lo vimos ya, dicha ley no corresponde á ninguna distribución estable de la energía en el espectro. Las curvas isotermas que resultan no corresponden tampoco al máximo, en contra de lo que exige la condición de estabilidad, siempre satisfecha, á todas las temperaturas, en las curvas experimentales.

En cuanto á las curvas isocromáticas, la misma ley suministra rectas que pasan por el origen, lo que significa que el calor específico del vacío, con respecto á una radiación monocromática dada, sería una constante independiente de la temperatura, y hay que observar la profunda analogía de este enunciado con el obtenido para la materia en estado sólido y gaseoso.

Si para comparar estos resultados con la experiencia, tomamos por abscisa el producto $\lambda T$ y por ordenada la función $F(\lambda T)$, líneal y de la forma :

$$F(\lambda T) = 4\pi\frac{R}{N}T\lambda,$$

obtenemos una recta que pasa por el origen, y si trazamos también la curva que representa con la mayor exactitud los resultados experimentales, se ve que la curva $y = F(\lambda T)$ sale tangencialmente al eje de las abscisas para apartarse después de éste y convertirse en asíntota á la recta que corresponde á la ley de Rayleigh.

En forma distinta se puede decir que, como para los calores específicos de los gases y sólidos, los grados de libertad no entran en acción

sino progresivamente, y no alcanzan la energía de equirrepartición sino á las temperaturas muy altas. Por ejemplo, en el espectro visible que corresponde al valor medio $\lambda = 0,5 \mu$ y á la temperatura de más ó menos 1500°, la densidad real de la energía, suministrada por la curva experimental logarítmica, resulta unas $10^8$ veces más *pequeña* de lo que habría de ser conforme al teorema de equirrepartición. Este ejemplo nos muestra que no se trata de errores insignificantes, como los debidos á los procedimientos experimentales.

Wien descubrió una ley de distribución de la energía en el espectro visible que se encontró verificada exactamente mediante experiencias bolométricas, espectrofotométricas y fotográficas realizadas hasta el ultravioleta.

Por otra parte Planck, tomando por guía las experiencias de Lummer y Pringsheim, fué llamado á descubrir una ley probablemente aplicable en toda la extensión del espectro. La fórmula del sabio prusiano se confunde con la de Wien para los valores pequeños del producto $\lambda T$ y con la de Rayleigh para los valores mayores.

Pero si es cierto que los resultados son satisfactorios, la explicación de los fenómenos ofrece serias dificultades, pues no se ve claramente la razón de esta intervención progresiva de los varios grados de libertad, tanto más lenta y difícil cuanto mayores son las frecuencias, y buscamos en vano con Poincaré en virtud de qué leyes físicas misteriosas la mayor parte de estos grados de libertad permanecen como paralizados en sus efectos á las bajas temperaturas.

Sin embargo podríamos tratar de razonar por analogía. En efecto sabemos que, en los líquidos, un movimiento inicial cualquiera no subsiste indefinidamente tal como estaba al principio, sino que se vuelve, como dice Jean Perrin, cada vez más desordenado, distribuyéndose irregularmente en fracciones más pequeñas. Pero sabemos también que este desorden se detiene por fin, verificándose entonces « un equilibrio entre el desorden y el orden, como lo prueban los fenómenos del movimiento de Brown. Ahora bien, si este equilibrio se produce, será porque el número de los grados de libertad de una masa dada del líquido no es infinito, siendo compuesto este de granos ó moléculas, lo que significa que tiene una estructura discontinua » (1).

En estas condiciones, podríamos decir también análogamente que, si la dispersión de la energía hacia longitudes de onda cada vez más

(1) JEAN PERRIN, *Mouvement brownien et réalité moléculaire. Annales de chimie et de physique*, tomo XVIII, página 5, 1909.

cortas acaba por detenerse, verificándose por lo tanto una distribución de energía en el espectro, esto se debe á la introducción en alguna parte de cierta discontinuidad.

Pero entonces ¿ podemos acaso suponer que se trata de discontinuidad en la estructura del éter ? Semejante hipótesis nos parece inadmisible pues, según la ley de Wien, buscamos la forma de una función de la variable $\lambda T$, y los varios grados de libertad, con que se puede contar según la teoría clásica del éter, han de adquirir todos su energía de equirrepartición á temperaturas suficientemente elevadas. Sería pues necesario admitir que la constitución del éter ha de depender de la intensidad de las radiaciones que lo atraviesan y que la dimensión de sus *granos* disminuye cuando se eleva la temperatura de los cuerpos radiantes. Ahora bien, si es cierto que se han hecho muchas hipótesis más ó menos arriesgadas en cuanto á la constitución del éter, nada sería comparable con la extraña estructura de un ambiente que resultaría compatible con condiciones tan atrevidas.

CAMILO MEYER.

*(Continuará.)*

# DISQUISICIONES TRIGONOMÉTRICAS

Por ÁNGEL PÉREZ

*(Conclusión)*

---

La definición analítica del subcoverso de un arco ó ángulo vimos que es

$$\text{subcov. A} = \frac{1 + \text{sen A}}{2} \qquad (f)$$

y como

$$\text{sen A} = \cos(90° - \text{A}) \qquad (g)$$

substituyendo en $(f)$ obtendremos sucesivamente aplicando resultados conocidos:

$$\text{subcov. A} = \frac{1 + \text{sen A}}{2} = \frac{1 + \cos(90° - \text{A})}{2} =$$

$$= \frac{2\cos^2 \frac{1}{2}(90° - \text{A})}{2} = \cos^2.\left[45° - \frac{1}{2}\text{A}\right]. \qquad (6)$$

El segundo miembro puede afectar otra forma. El arco $45° - \frac{1}{2}\text{A}$ tiene por complemento $45° + \frac{1}{2}\text{A}$, luego:

$$\cos\left(45° - \frac{1}{2}\text{A}\right) = \text{sen}\left(45° + \frac{1}{2}\text{A}\right) \qquad (h)$$

y cuadrando y substituyendo en la (6), viene:

$$\text{subcov. A} = \text{sen}^2.\left[45° + \frac{1}{2}\text{A}\right]. \qquad (7)$$

Estas fórmulas son importantes, especialmente para la trigonometría esférica.

## § 10. *Fórmulas logarítmicas de las funciones versas*

40. Si se hubieran calculado tablas que dieran los logaritmos de estas funciones en el supuesto de ser el radio *uno* (1), no habría dificultad alguna al tomar logaritmos de una cualquiera de ellas.

Así, por ejemplo, si se tratara de aplicar los logaritmos al cálculo de sen v. A dado por las fórmulas,

$$\text{sen v. A} = 2 \,\text{sen}^2 \frac{1}{2} \text{A},$$

se tendría:

$$\log \text{sen v. A} = \log 2 + 2 \log \text{sen} \frac{1}{2} \text{A}.$$

Pero, como no existen, que sepamos, tablas calculadas en aquel supuesto, y si las hay en la hipótesis de que el radio valga $10^{10}$, es indispensable, antes de aplicar logaritmos, restablecer el radio en las fórmulas. Si aplicamos, para ello, cada una de las reglas dadas en el párrafo 7, veremos que la segunda es la que lleva más rápidamente al resultado buscado.

1ª *Regla.* $\text{Sen v. A} = 2 \,\text{sen}^2 . \frac{\text{r}}{2} \text{A} = 2 . \text{sen} \frac{1}{2} \text{A} \,\text{sen} \frac{1}{2} \text{A};$

$$\frac{\text{sen v. A}}{\text{R}} = 2 . \frac{\text{sen} \frac{1}{2} \text{A}}{\text{R}} . \frac{\text{sen} \frac{1}{2} \text{A}}{\text{R}} = \frac{2 \,\text{sen}^2 \frac{1}{2} \text{A}}{\text{R}^2}.$$

$$\text{sen v. A} = \frac{2 \,\text{sen}^2 \frac{1}{2} \text{A} . \text{R}}{\text{R}^2} = \frac{2 \,\text{sen}^2 \frac{1}{2} \text{A}}{\text{R}}.$$

2ª *Regla.* Hacer homogénea la fórmula. Se advierte que mientras el primer miembro es de primer grado, el segundo es de segundo grado, luego este debe ser dividido por el radio R, lo que nos lleva á la fórmula obtenida por el primer método.

Tomando logaritmos será:

$$\log \text{sen v. A} = \log 2 + 2 \log \text{sen} \frac{1}{2} \text{A} - 10. \qquad (1)$$

La fórmula cos v. $\text{A} = 2 \,\text{sen}^2 \left(45° - \frac{1}{2} \text{A}\right)$ se convierte, restableciendo el radio en

$$\cos \text{v. A} = \frac{2 \text{ sen}^2 \left(45° - \frac{1}{2}\text{A}\right)}{\text{R}},$$

luego

$$\log \cos \text{v. A} = \log 2 + 2 . \log \text{sen}\left(45° - \frac{1}{2}\text{A}\right) - 10. \qquad (2)$$

La fórmula ver. $\text{A} = \text{sen}^2 \frac{1}{2}\text{A}$, es, restableciendo el radio,

$$\text{vers. A} = \frac{\text{sen}^2 \frac{1}{2}\text{A}}{\text{R}};$$

y por consiguiente :

$$\log \text{vers. A} = 2 \log \text{sen} \frac{1}{2}\text{A} - 10. \qquad (3)$$

La fórmula cov. $\text{A} = \text{sen}^2 \left[45° - \frac{1}{2}\text{A}\right]$ restableciendo el radio, es :

$$\text{cov. A} = \frac{\text{sen}^2 \left[45 - \frac{1}{2}\text{A}\right]}{\text{R}}.$$

$$\log \text{cov. A} = 2 \log \text{sen}\left[45° - \frac{1}{2}\text{A}\right] - 10. \qquad (4)$$

La fórmula subv. $\text{A} = \cos^2 \cdot \frac{1}{2}\text{A}$, da restableciendo el radio,

$$\text{subv. A} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\text{A}}{\text{R}}; \qquad \log \text{sub. A} = 2 \log \cos \frac{1}{2}\text{A} - 10. \qquad (5)$$

La fórmula subcov. $\text{A} = \text{sen}^2 \left[45° + \frac{1}{2}\text{A}\right]$ se convierte en :

$$\text{subcov. A} = \frac{\text{sen}^2 \left[45° + \frac{1}{2}\text{A}\right]}{\text{R}};$$

$$\log \text{subv. A} = 2 \log \text{sen}\left[45° + \frac{1}{2}\text{A}\right] - 10. \qquad (6)$$

Si las fórmulas de las líneas versas se presentaran bajo las formas del párrafo 7 (parte final), las convertiríamos previamente en expresiones adecuadas para aplicarles el cálculo logarítmico ordinario.

Sea, por ejemplo :

1° $\text{subv. } a = \frac{1 + \cos a}{2}$;

la transformamos en

$$\frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} a}{2} = \cos^2 \frac{1}{2} a.$$

2° $\text{Cos v. } a = 1 - \text{sen } a.$

Podríamos operar como sigue:

$$\cos \text{ v. } a = 1 - \text{sen } a = \text{sen } (90°) - \text{sen } a =$$
$$= 2 \cos \frac{1}{2}(90° + a) \text{ sen} \frac{1}{2}(90° - a) = 2 \cos \left[45° + \frac{a}{2}\right] \text{sen } \left(45° - \frac{a}{2}\right)$$

á la que ya pueden aplicársele los logaritmos. Y si se quiere obtener la expresión en términos de solo el seno ó solo el coseno, continuaríamos así:

$$\cos \left(45° + \frac{a}{2}\right) = \text{sen} \left(45° - \frac{a}{2}\right)$$

y por tanto

$$\cos \text{ v. } a = 2 \text{ sen}^2 \left(45° - \frac{a}{2}\right),$$

ó como

$$\text{sen} \left(45° - \frac{a}{2}\right) = \cos \left(45° + \frac{a}{2}\right)$$

sería también

$$\cos \text{ v. } a = 2 \text{ sen}^2 \left(45° + \frac{a}{2}\right),$$

á las que, restableciendo el radio, pueden aplicárseles los logaritmos de cualesquiera de las tablas comunes.

41. Antes de Mendoza se definía por todos los tratadistas de trigonometría, el *seno verso* y el *coseno verso*, más nadie, que sepamos, había construído tablas que dieran esas y otras de las funciones versas. Últimamente, el inventor tabuló los logaritmos del *verso, coverso, subverso* y *subcoverso*, simplificando el enorme trabajo que realizó en las primeras ediciones.

42. Se lee en el prólogo de la edición española correspondiente á la tercera tirada estereotípica de 1873, uno de cuyos ejemplares poseo, que la primera edición inglesa de las tablas del ilustre marino español, apareció en Londres en 1800. Este es un error; yo encontré un ejem-

plar en Buenos Aires que regalé, con la mecánica de don Jorge Juan, al actual vicealmirante Concas, entonces comandante de la *Nautilus* (1892), que databa de 1796, y que contenía los logaritmos de las seis funciones corrientes y de la mayor parte de las líneas versas. En la edición de 1800, y sobre todo en la española de 1808, aparecieron algunas modificaciones; así en lugar de los logaritmos de los *senos versos* y *cosenos versos*, aparecieron los de los *versos* y *coversos* en substitución de los primeros, y por supuesto, los de los *subversos* y *subcoversos*. Inconvenientes tipográficos han impedido introducir los logaritmos de las tangentes y cotangentes, que sólo se encuentran en algunas antiguas ediciones españolas é inglesas; pero que sería fácil introducir aumentando el ancho de las páginas. El defecto se subsana en la práctica, cuando ha de intervenir un logaritmo *tangente*, tomando los logaritmos *seno* y *secante*; y para un logaritmo *cotangente*, los logaritmos *coseno* y *cosecante*. Uno y otro par se encuentran en la misma página. El autor da los logaritmos de los *senos, cosenos, secantes* y *cosecantes* para todos los arcos de la semicircunferencia de 15″ en 15″ de arco y de 1$^s$ en 1$^s$ de tiempo en la página de la izquierda; y en la de la derecha, da los logaritmos *versos, coversos, subversos* y *subcoversos* para los mismos arcos con el doble argumento en arco y en tiempo, lo que evita conversiones y trabajo que otras tablas no ahorran al calculador. Por otra parte el precio de estas admirables tablas es muy barato; un volumen en folio de más de 600 páginas, me costó *seis* ó *siete* pesos (y creo que el oro no estaba á la par), en una librería de Buenos Aires.

Para mayor esclarecimiento reproducimos algunos logaritmos de dos páginas de la tabla XVI, que permitirán hacerse cargo de la ingeniosa disposición que les dió el malogrado cuanto sapientísimo marino, digno contemporáneo de aquel otro llamado don Jorge Juan, ilustre matemático, que mandó España á medir el arco de meridiano del Perú.

TABLA XVI. *Logaritmos, senos, cosenos, secantes y cosecantes*

| 24° | 1h | Seno | | | | | Coseno | | | | | Secante | | | | | Cosecante | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 114° | 7h | Coseno | | | | | Seno | | | | | Cosecante | | | | | Secante | | | | | | |
| ′ | m s | 0″ 0s | 15″ 1s | 30″ 2s | 45″ 3s | 60″ 4s | 0″ 0s | 15″ 1s | 30″ 2s | 45″ 3s | 60″ 4s | 0″ 0s | 15″ 1s | 30″ 2s | 45″ 3s | 60″ 4s | 0″ 0s | 15″ 1s | 30″ 2s | 43″ 3s | 60″ 4s | | |
| 0 | 36 0 | 9.60 931 | 938 | 946 | 953 | 960 | 9.96 073 | 072 | 070 | 069 | 067 | 0.03 927 | 928 | 930 | 931 | 933 | 0.39 069 | 062 | 054 | 047 | 040 | 56 | 59 |
| 1 | 4 | 960 | 967 | 974 | 981 | 988 | 067 | 066 | 065 | 063 | 062 | 933 | 934 | 935 | 937 | 938 | 040 | 033 | 026 | 019 | 012 | 52 | 58 |
| 2 | 8 | 988 | 995 | 002 | 009 | 016 | 062 | 060 | 059 | 058 | 056 | 938 | 940 | 41 | 942 | 944 | * 012 | 005 | 998 | 991 | 984 | 48 | 57 |
| 3 | 12 | 9.61 016 | 023 | 031 | 038 | 045 | 056 | 055 | 053 | 052 | 050 | 944 | 945 | 47 | 948 | 950 | 0.38 984 | 977 | 969 | 962 | 955 | 44 | 56 |
| 4 | 16 | 045 | 052 | 059 | 066 | 073 | 050 | 049 | 048 | 046 | 045 | 950 | 951 | 52 | 954 | 955 | 955 | 948 | 941 | 934 | 927 | 23 40 | 55 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 55 | 39 40 | 9.62 459 | 466 | 473 | 479 | 486 | 9.95 757 | 755 | 754 | 753 | 751 | 0.04 243 | 245 | 246 | 247 | 249 | 0.37 541 | 534 | 527 | 521 | 514 | 16 | 4 |
| 56 | 44 | 486 | 493 | 500 | 507 | 513 | 751 | 750 | 718 | 747 | 745 | 219 | 250 | 252 | 253 | 255 | 514 | 507 | 500 | 493 | 487 | 12 | 3 |
| 57 | 48 | 513 | 520 | 527 | 534 | 541 | 745 | 744 | 742 | 741 | 739 | 255 | 256 | 258 | 259 | 261 | 487 | 480 | 473 | 466 | 459 | 8 | 2 |
| 58 | 52 | 541 | 547 | 554 | 561 | 568 | 739 | 738 | 736 | 735 | 733 | 261 | 262 | 264 | 265 | 267 | 459 | 453 | 446 | 439 | 432 | 4 | 1 |
| 59 | 56 | 568 | 575 | 581 | 588 | 595 | 733 | 732 | 731 | 729 | 738 | 267 | 268 | 269 | 271 | 272 | 432 | 425 | 419 | 412 | 405 | 20 0 | 0 |
| | | 4s 60″ | 3s 45″ | 2s 30″ | 1s 15″ | 0s 0″ | 4s 60″ | 3s 45″ | 2s 30″ | 1s 15″ | 0s 0″ | 4s 60″ | 3s 45″ | 2s 30″ | 1s 15″ | 0s 0″ | 4s 60″ | 3s 45″ | 2s 30″ | 1s 15″ | 0s 0″ | m s | ′ |
| | | Seno | | | | | Coseno | | | | | Secante | | | | | Cosecante | | | | | 10h | 155° |
| | | Coseno | | | | | Seno | | | | | Cosecante | | | | | Secante | | | | | 4h | 65° |

TABLA XVI. *Logaritmos, versos, coversos, subversos y subcoversos*

| 24° | 1h | Verso | | | | | Coverso | | | | | Subverso | | | | | Subcoverso | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 114° | 7h | Coverso | | | | | Subverso | | | | | Subcoverso | | | | | Verso | | | | | | |
| ′ | m s | 0″ 0s | 15″ 1s | 30″ 2s | 45″ 3s | 60″ 4s | 0″ 0s | 15″ 1s | 30″ 2s | 45″ 3s | 60″ 4s | 0″ 0s | 15″ 1s | 30″ 2s | 45″ 3s | 60″ 4s | 0″ 0s | 15″ 1s | 30″ 2s | 45″ 3s | 60″ 4s | | |
| 0 | 36 0 | 8.63 576 | 591 | 605 | 620 | 635 | 9.47 222 | 217 | 212 | 207 | 202 | 9.98 081 | 080 | 080 | 079 | 078 | 9.81 718 | 720 | 722 | 724 | 726 | 56 | 59 |
| 1 | 4 | 635 | 650 | 665 | 680 | 695 | 202 | 197 | 193 | 188 | 183 | 078 | 078 | 077 | 076 | 075 | 726 | 729 | 731 | 733 | 735 | 52 | 58 |
| 2 | 8 | 695 | 709 | 724 | 739 | 754 | 183 | 178 | 173 | 168 | 163 | 075 | 075 | 074 | 073 | 073 | 735 | 737 | 739 | 741 | 743 | 48 | 57 |
| 3 | 12 | 754 | 769 | 784 | 798 | 813 | 163 | 158 | 154 | 149 | 144 | 073 | 072 | 071 | 071 | 070 | 743 | 745 | 747 | 749 | 751 | 44 | 56 |
| 4 | 16 | 813 | 828 | 842 | 857 | 872 | 144 | 139 | 134 | 129 | 124 | 070 | 069 | 069 | 068 | 067 | 751 | 753 | 755 | 757 | 759 | 23 40 | 55 |
| 5 | 36 20 | 8.63 872 | 887 | 902 | 917 | 932 | 9.47 124 | 119 | 115 | 110 | 105 | 9.98 067 | 067 | 066 | 066 | 065 | 9.81 759 | 761 | 763 | 765 | 767 | 36 | 54 |
| 6 | 24 | 932 | 946 | 961 | 976 | 991 | 105 | 100 | 095 | 090 | 085 | 065 | 064 | 063 | 063 | 062 | 767 | 769 | 772 | 774 | 776 | 32 | 53 |
| 7 | 28 | 991 | 006 | 020 | 035 | 050 | 085 | 081 | 076 | 071 | 066 | 062 | 061 | 061 | 060 | 059 | 776 | 778 | 780 | 782 | 784 | 28 | 52 |
| 8 | 32 | 8.64 050 | 065 | 079 | 094 | 109 | 066 | 061 | 056 | 051 | 046 | 059 | 059 | 058 | 057 | 057 | 784 | 786 | 788 | 790 | 792 | 24 | 51 |
| 9 | 36 | 109 | 124 | 138 | 153 | 168 | 046 | 042 | 037 | 032 | 027 | 057 | 056 | 055 | 055 | 054 | 792 | 794 | 796 | 798 | 800 | 23 20 | 50 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 55 | 39 40 | 8.66 782 | 796 | 811 | 825 | 839 | 9.16 142 | 137 | 132 | 128 | 123 | 9.97 930 | 930 | 929 | 928 | 927 | 9.85 166 | 168 | 170 | 172 | 174 | 16 | 4 |
| 56 | 44 | 839 | 853 | 868 | 882 | 896 | 123 | 118 | 113 | 108 | 103 | 927 | 927 | 926 | 925 | 925 | 174 | 176 | 178 | 180 | 182 | 12 | 3 |
| 57 | 48 | 896 | 910 | 925 | 939 | 953 | 103 | 098 | 093 | 088 | 083 | 925 | 924 | 923 | 923 | 922 | 182 | 184 | 186 | 188 | 190 | 8 | 2 |
| 58 | 52 | 953 | 968 | 982 | 996 | 010 | 083 | 078 | 073 | 068 | 063 | 922 | 921 | 920 | 920 | 919 | 190 | 192 | 194 | 196 | 198 | 4 | 1 |
| 59 | 56 | 8.67 010 | 025 | 039 | 053 | 067 | 063 | 058 | 053 | 048 | 043 | 919 | 918 | 918 | 917 | 916 | 198 | 200 | 202 | 204 | 206 | 20 0 | 0 |
| | | 4s 64″ | 3s 45″ | 2s 30″ | 1s 15″ | 0s 0″ | 4s 60″ | 3s 45″ | 2s 30″ | 1s 15″ | 0s 0″ | 4s 60″ | 3s 45″ | 2s 30″ | 1s 15″ | 0s 0″ | 4s 60″ | 3s 45″ | 2s 30″ | 1s 15″ | 0s 0″ | m s | ′ |
| | | Subverso | | | | | Coverso | | | | | Verso | | | | | Subcoverso | | | | | 10h | 155° |
| | | Coverso | | | | | Verso | | | | | Subcoverso | | | | | Subverso | | | | | 4h | 65° |

§ 11. *Derivadas y diferenciales de las funciones versas*

43. 1ª

$$\text{sen v.}\, x = 1 - \cos x; \qquad \frac{d(\text{sen v.}\, x)}{dx} = + \text{sen}\, x;$$

$$d(\text{sen v.}\, x) = \text{sen}\, x\,.\,dx$$

$$\text{sen v.}\, x = 2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2}x; \qquad \frac{d(\text{sen v.}\, x)}{dx} = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x;$$

$$d(\text{sen v.}\, x) = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x\,.\,dx$$

44. 2ª

$$\cos \text{v.}\, x = 1 - \text{sen}\, x; \qquad \frac{d(\cos \text{v.}\, x)}{dx} = - \cos x;$$

$$d(\cos \text{v.}\, x) = - \cos x\,.\,dx$$

$$\cos \text{v.}\, x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right);$$

$$\frac{d\,.\,2\,\text{sen}^2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right]}{dx} = +4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{d\,.\cos \text{v.}\, x}{dx} = -2\,.\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= -\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

45. 3ª

$$\text{vers.}\, x = \frac{1 - \cos x}{2}; \qquad \frac{d(\text{vers.}\, x)}{dx} = +\frac{1}{2}\,\text{sen}\, x;$$

$$d(\text{vers.}\, x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x\,.\,dx$$

$$\text{vers.}\, x = \text{sen}^2\frac{1}{2}x; \qquad \frac{d(\text{vers.}\, x)}{dx} = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x\,.\cos\frac{1}{2}x;$$

$$d(\text{vers.}\, x) = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x\,.\,dx.$$

46. 4ª

$$\text{cov.}\, x = \frac{1 - \text{sen}\, x}{2}; \qquad \frac{d(\text{cov.}\, x)}{dx} = -\frac{1}{2}\cos x;$$

$$d\,\text{cov.}\, x = -\frac{1}{2}\cos x\,.\,dx$$

$$\text{cov.}\, x = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} \qquad \frac{d(\text{cov.}\, x)}{dx} = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$d\,\text{cov.}\, x = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx.$$

47. 5ª

$$\text{subv.}\, x = \frac{1+\cos x}{2}; \qquad \frac{d\,(\text{subv.}\, x)}{dx} = \frac{1}{2}(-\text{sen}\, x);$$

$$d\,(\text{subv.}\, v) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, x . dx$$

$$\text{subv.}\, x = \cos^2 \frac{1}{2}x; \qquad \frac{d\,(\text{subv.}\, x)}{dx} = -2\cos\frac{1}{2}x\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= -\text{sen}\,\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x; \qquad d\,(\text{subv.}\, x) = -\text{sen}\,\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x.dx.$$

48. 6ª

$$\text{subcov.}\, x = \frac{1+\text{sen}\, x}{2}; \qquad \frac{d\,(\text{subcov.}\, x)}{dx} = \frac{1}{2}\cos x;$$

$$d\,(\text{subcov.}\, x) = \frac{1}{2}\cos x dx$$

$$\text{subcov.}\, x = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right);$$

$$\frac{d\,(\text{subcov.}\, x)}{dx} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{d\,(\text{subcov.}\, x)}{dx} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right);$$

$$d\,(\text{subcov.}\, x) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx.$$

§ 12. *Derivadas y diferenciales de las funciones ciclométricas ó inversas de las expresiones trigonométricas de Mendoza*

49. 1ª $$y = \text{arc. sen v.}\, x;$$

es decir, función del arco cuyo seno verso es $x$, luego la directa será

$$x = \text{sen v.}\, y$$

cuya derivada será (§ 11, 1ª)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,(1-\cos y)}{dy} = \text{sen}\, y,$$

porque en ésta la variable independiente es $y$, mientras que en la dada es $x$, es decir, el *seno verso*. Es claro que lo que buscamos, es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\text{arc. sen v.}\, x)}{dx}.$$

debiendo expresarse sen $y$ en términos del *seno verso* de $y$, vale decir, de la cantidad $x$.

Como

$$\text{sen v. } y = 1 - \cos y; \qquad \cos y = 1 - \text{sen v. } y;$$
$$\cos^2 y = (1 - \text{sen v. } y)^2 = (1 - x)^2,$$

pero

$$\cos^2 y = 1 - \text{sen}^2 y; \qquad \text{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - (1 - x)^2;$$
$$\text{sen } y = \pm\sqrt{1 - (1 - x)^2} = \pm\sqrt{1 - 1 + 2x - x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\text{arc. sen v. } x)}{dx} = \frac{1}{\text{sen } y} = \pm\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}; \tag{1}$$

$$dy = \pm\frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}. \tag{a}$$

Los dos valores resultantes para la diferencial, pueden explicarse, atendiendo á que conocido $x$ (el seno verso), el arco $y$ puede ser tanto el $\widehat{AC}$ cuanto el $\widehat{ABA'B'C'} = 360^\circ - a$, como se advierte por la figura adjunta.

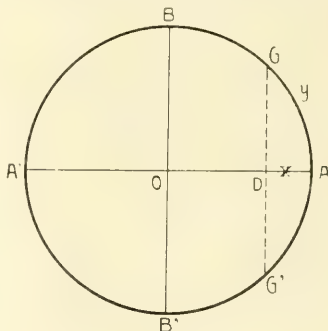


Fig. 12

Á consideraciones análogas dan lugar las demás diferenciales, por lo cual nos limitamos á lo suficiente para la comprensión del asunto. Advertiré sin embargo, que nada en esta materia, y poco en lo anteriormente tratado, he hallado en los libros, sin excluír la lacónica explicación que de la teoría de las *versas* ofrece el marino que prologa la edición española de 1873 de las otrora famosas *tablas*.

50. 2ª $\qquad y = \text{arc. cos v. } x; \qquad x = \cos \text{v. } y$

$$\frac{dx}{dy} = -\cos y; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos y} \tag{1}$$

pero

$$\cos \text{v. } y = 1 - \text{sen } y \ (\S 11\text{-}2^a); \qquad \text{sen } y = 1 - \cos \text{v. } y = 1 - x;$$
$$\text{sen}^2 y = (1 - x)^2; \qquad 1 - \cos^2 y = (1 - x)^2;$$
$$\cos^2 y = 1 - (1 - x)^2; \quad 1 - 1 + 2x - x^2 = 2x - x^2; \quad \cos y = \pm\sqrt{2x - x^2}$$

y llevando este valor á la (1)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\pm\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1}{\mp\sqrt{2x - x^2}} \qquad (2)$$

$$dy = d\,(\text{arc. cos v. } x) = \frac{dx}{\pm\sqrt{2x - x^2}}. \qquad (b)$$

51. 3ª

$$y = \text{arc. ver. } x; \quad x = \text{ver. } y; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, y \ (\S\ 11\text{-}3^a); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\text{sen}\, y}. \ (1)$$

Como

$$\text{vers. } y = \frac{1}{2}(1 - \cos y); \qquad 2\ \text{vers. } y = 1 - \cos y; \qquad \cos y = 1 - 2\ \text{ver. } y$$

$$\cos y = 1 - 2x; \qquad \cos^2 y = (1 - 2x)^2; \qquad 1 - \text{sen}^2 y = (1 - 2x)^2;$$

$$\text{sen}^2 y = 1 - (1 - 2x)^2; \qquad \text{sen}^2 y = 4x - 4x^2 = 4(x - x^2);$$

$$\text{sen}\, y = \pm 2\sqrt{x - x^2}.$$

Llevando este valor á la (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\pm 2\sqrt{x - x^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{x - x^2}} \qquad (3)$$

$$dy = d\,(\text{arc. ver. } x) = \frac{dx}{\pm\sqrt{x - x^2}}. \qquad (c)$$

52. 4ª

$$y = \text{arc. cov. } x; \qquad x = \text{cov. } y; \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}\cos y; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\cos y};$$

pero

$$\text{cov. } y = \frac{1}{2}(1 - \text{sen}\, y); \qquad 2\ \text{cov. } y = 1 - \text{sen}\, y;$$

$$\text{sen}\, y = 1 - 2\ \text{cov. } y = 1 - 2x; \qquad \text{sen}^2 y = (1 - 2x)^2;$$

$$\text{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y = (1 - 2x)^2; \qquad \cos^2 y = 1 - (1 - 2x)^2 =$$

$$= 1 - 1 + 4x - 4x^2 = 4(x - x^2) \qquad \cos y = \pm 2\sqrt{x - x^2};$$

por consiguiente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\pm 2\sqrt{x - x^2}} = -\frac{1}{\pm\sqrt{x - x^2}} = \frac{1}{\mp\sqrt{x - x^2}} \qquad (4)$$

$$dy = d\,(\text{arc. cov. } x) = \frac{dx}{\mp\sqrt{x - x^2}}. \qquad (d)$$

53. 5ª

$$y = \text{arc. subv. } x; \qquad x = \text{subv. } y; \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, y; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\text{sen}\, y}$$

pero

$$\text{subv.}\, y=\frac{1+\cos y}{2}; \qquad 2\,\text{subv.}\, y=1+\cos y; \qquad \cos y=2\,\text{subv.}\, y-1$$

$$\cos y=2x-1; \qquad \cos^2 y=(2x-1)^2; \qquad 1-\text{sen}^2 y=(2x-1)^2$$

$$\text{sen}^2 y=1-(2x-1)^2; \qquad \text{sen}^2 y=1-4x^2+4x-1=4(x-x^2);$$

$$\text{sen}\, y=\pm 2\sqrt{x-x^2},$$

y por tanto

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{\pm\sqrt{x-x^2}}=-\frac{1}{\pm\sqrt{x-x^2}}=\frac{1}{\mp\sqrt{x-x^2}} \qquad (5)$$

$$dy=d(\text{arc. subv.}\, x)=\frac{dx}{\mp\sqrt{x-x^2}}. \qquad (e)$$

54. 6ª

$$y=\text{arc. subcov.}\, x; \quad x=\text{subcov.}\, y; \quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}\cos y; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\cos y};$$

(§ 11-5ª), pero

$$\text{subcov.}\, y=\frac{1+\text{sen}\, y}{2}; \qquad 2\,\text{subcov.}\, y=1+\text{sen}\, y; \qquad 2x=1+\text{sen}\, y$$

$$\text{sen}\, y=2x-1; \qquad \text{sen}^2 y=(2x-1)^2; \qquad 1-\cos^2 y=(2x-1)^2;$$

$$\cos^2 y=1-(2x-1)^2=1-4x^2+4x-1; \qquad \cos^2 y=4(x-x^2);$$

$$\cos y=\pm 2\sqrt{x-x^2},$$

y por tanto

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\pm 2\sqrt{x-x^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{x-x^2}} \qquad (6)$$

$$dy=d(\text{arc. subcov.}\, x)=\frac{dx}{\pm\sqrt{x-x^2}}. \qquad (f)$$

## § 13. *Integración de las diferenciales de las funciones versas*

55. 1ª $$dy=d(\text{sen v.}\, x)=d(1-\cos x)=\text{sen}\, x dx$$

$$y=\int \text{sen}\, x dx+\text{C}=-\cos x+\text{C}.$$

La constante C se halla por la circunstancia de que para $x=0$, la función debe anularse; luego

$$0=-\cos(0)+\text{C}=-1+\text{C}; \qquad \text{C}=1,$$

y por tanto

$$y=-\cos x+1=1-\cos x \qquad (a)$$

56. 2ª $dy = d(\cos \text{v}.\, x) = d(1 - \text{sen}\, x) = -\cos x dx$

$$y = \int -\cos x dx = -\int \cos x dx + C = -(+\text{sen}\, x) + C = -\text{sen}\, x + C.$$

La C se halla por la condición de que para $x = 0$, $y$ debe ser $= 1$, luego

$$1 = -\text{sen}\, 0 + C = 0 + C; \qquad C = 1,$$

por tanto,

$$y = -\text{sen}\, x + 1 = 1 - \text{sen}\, x. \tag{b}$$

57. 3ª

$$dy = d(\text{vers}.\, x) = d\left(\frac{1 - \cos x}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x\,.\, dx$$

$$y = \int \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x\,.\, dx = \frac{1}{2}\int \text{sen}\, x\,.\, dx = -\frac{1}{2}\cos x + C.$$

La constante sale de la condición de que para $x = 0$, la función debe anularse, luego

$$0 = -\frac{1}{2}\cos 0 + C = -\frac{1}{2}\cdot 1 + C: \qquad C = \frac{1}{2},$$

por tanto

$$y = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}; \qquad y = \frac{1 - \cos x}{2},$$

y efectivamente

$$\text{vers}.\, x = y = \frac{1 - \cos x}{2}. \tag{c}$$

58. 4ª

$$dy = d(\text{cov}.\, x) = d\left(\frac{1 - \text{sen}\, x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos x\,.\, dx$$

$$y = -\frac{1}{2}\int \cos x\,.\, dx = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, x + C.$$

La C sale por la circunstancia de anularse la función para $x = \frac{\pi}{2}$, luego

$$0 = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + C = -\frac{1}{2}\cdot 1 + C,$$

de donde

$$C = \frac{1}{2},$$

y por tanto

$$y = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2} \qquad (d)$$

que es efectivamente el *coverso* de $x$.

59. 5ª

$$dy = d(\text{subcover. } x) = d\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x dx$$

$$y = -\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x dx = -\frac{1}{2}(-\cos x) + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\cos x + \mathrm{C}.$$

La constante puede hallarse por la condición de ser la función $= \frac{1}{2}$ para $x = \frac{\pi}{2}$, luego

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\cdot 0 + \mathrm{C}; \qquad \mathrm{C} = \frac{1}{2},$$

y así, se tiene:

$$y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \qquad (e)$$

que es, en verdad, el subver. $x$.

60. 6ª

$$dy = d(\text{subcov. } x) = d\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos x dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int \cos x . dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \mathrm{C}.$$

La C se hallará considerando que la función se reduce á $\frac{1}{2}$ para $x = 2\pi$, luego

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\cdot 0 + \mathrm{C}; \qquad \mathrm{C} = \frac{1}{2},$$

por tanto,

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} = \frac{1+\operatorname{sen} x}{2}; \qquad y = \frac{1+\operatorname{sen} x}{2} \qquad (f)$$

que es, en efecto, el *subcoverso* de $x$.

## § 14. *Integración de las diferenciales de las funciones inversas de las goniométricas de Mendoza*

Vimos en el párrafo 12 que:

61. 1ª

$$dy = d(\text{arc. sen v. } x) = \pm \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

luego, inversamente:

$$y = \pm \int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{arc. sen } v.\, x + \text{C},$$

pudiendo aquí considerar nula á esa constante, ó igual á cualquier número de circunferencias positivas ó negativas, luego

$$y = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{arc. sen v. } x. \qquad (a)$$

62. 2ª

$$dy = d(\text{arc. cos v. } x) = \frac{dx}{\mp \sqrt{2x - x^2}}.$$

$$dy = \int \frac{dx}{\mp \sqrt{2x - x^2}} = \text{arc. cov } x. \qquad (b)$$

63. 3ª

$$dy = d(\text{arc. ver. } x) = \frac{dx}{\pm \sqrt{x - x^2}},$$

por tanto

$$y = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{x - x^2}} = \text{arc. ver. } x. \qquad (c)$$

64. 4ª

$$dy = d(\text{arc. cov. } x) = \frac{dx}{\pm \sqrt{x - x^2}}$$

$$y = \int \frac{dx}{\mp \sqrt{x - x^2}} = \text{arc. cov. } x. \qquad (d)$$

65. 5ª

$$dy = d(\text{arc. subv. } x) = \frac{dx}{\mp \sqrt{x - x^2}} \qquad (e)$$

$$y = \int \frac{dx}{\mp \sqrt{x - x^2}} = \text{arc. subv. } x.$$

66. 6ª

$$dy = d(\text{arc. subcov. } x) = \frac{dx}{\pm\sqrt{x-x^2}}$$

$$y = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{x-x^2}} = \text{arc. subcov. } x. \qquad (f)$$

67. Se advierte que para valores convenientes de $x$ habría la posibilidad de integrar varios radicales binomios de segundo grado, cuando sea posible llevarlos á las formas fundamentales

$$\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \qquad \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

### § 15. *Aplicación de las funciones versas á la resolución de los triángulos rectilíneos*

68. 1ª En el caso de que la razón $\frac{b}{a}$ de un cateto á la hipotenusa se acerca á la unidad, conviene calcular el ángulo C cuyo valor es muy pequeño por la fórmula

$$\text{sen}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} = \sqrt{\frac{a-b}{2a}};$$

siendo

$$\frac{b}{a} = \cos C;$$

pero con las funciones de Mendoza, el cálculo es más breve, puesto que

$$\text{sen}^2\,\frac{C}{2} = \text{vers. } C = \frac{a-b}{2a}.$$

69. 2ª Análogamente, en el caso de darse los tres lados de un triángulo oblicuángulo y pedirse uno ó los tres ángulos, tenemos:

$$a)\quad \text{sen}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{ó} \quad \text{sen}^2\,\frac{1}{2}A = \text{vers. } A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc};$$

á las que aplicando logaritmos, se tiene:

$$\log \text{vers. } A = \log(p-b) + \log(p-c) + \text{colog}\, b + \text{colog}\, c - 10,$$

si se opera con tablas cuyo radio es $10^{10}$ como las de Mendoza.

*b*) Y si el ángulo viene dado por

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

cuyo cálculo con tablas ordinarias da la mitad del ángulo y exige tomar la mitad de la suma de logaritmos, etc., las funciones versas darían inmediatamente

$$\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{p(p-a)}{bc} \qquad \text{y} \qquad \cos^2\frac{1}{2}A=\text{subv. }A=\frac{p(p-a)}{bc};$$

$$\log \text{subv. }A=\log p+\log(p-a)+\text{colog }b+\text{colog }c-10.$$

*c*) Si el ángulo está dado por

$$\text{tg}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

conviene más operar con las tablas ordinarias; pero si se quiere emplear las de Mendoza, se pondría:

$$\text{tg}^2\frac{1}{2}A=\frac{\text{sen}\frac{1}{2}A}{1-\text{sen}^2\frac{1}{2}A}$$

expresando la tangente en función del *seno,* por ejemplo, y haciendo las operaciones correlativas con el segundo miembro, llegaríamos á $\text{sen}^2\frac{1}{2}A=\text{vers. }A$ como en (*a*).

§ 16. *Aplicaciones de las funciones versas en las resolución de los triángulos esféricos y más especialmente á los problemas comunes de la astronomía esférica.*

70. Supongamos proyectada la esfera celeste sobre el plano meridiano del observador colocado en Z, y sea PP′ el eje polar, su círculo máximo perpendicular, EQ, será el ecuador; ZN será la línea vertical, y por tanto el círculo máximo HR perpendicular á ella el horizonte racional ó geocéntrico del observador; si suponemos que el astro observado tiene una *altura verdadera* H*b*, deberá hallarse en algún punto del círculo menor *bb*′ paralelo al horizonte racional y trazado por *b*;

admitiendo que el astro tenga una *declinación* Ec (aquí de igual sentido que la latitud del observador), ese paralelo de declinación será también un lugar geométrico del astro, luego éste se hallará en una de las dos intersecciones de dichos círculos menores; mas, como se sabe, si la observación se ha hecho *antes* ó *después* del paso del astro por el meridiano PZP′ se sabrá con certeza cuál de las intersecciones corresponde á la verdadera posición del astro; sea ella la A. Trazando el arco de círculo máximo PA *(círculo de declinación)* del astro, y el arco de circunferencia máxima ZA *(círculo vertical,* ó simplemente *vertical* del astro), tendremos, con el arco de meridiano PZ, construído un triángulo esférico, que se denomina *triángulo de posición.* Sus elementos son: ZA, *complemento de la altura* verdadera del astro ó *distancia zenital;* PA, *complemento de la declinación* del astro (*); PZ, *complemento de la latitud* del observador ó *colatitud;* ∢ APZ, *ángulo horario* del astro A, que se cuenta desde el meridiano hacia el lado *este* ú *oeste* en que se encuentre el astro; ∢ PZA, *ángulo azimutal* ó *azimut* del astro, que se cuenta desde el meridiano hacia el este ú oeste, según que el astro se encuentre al este ó al oeste del meridiano, y por último, ∢ PAZ, *ángulo de posición* ó *ángulo paraláctico.*

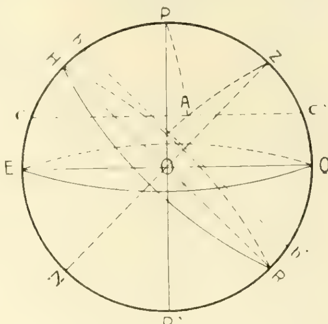


Fig. 13

71. Cálculo del ángulo horario APZ $= t$. Consideremos el triángulo de posición PAZ, y apliquémosle la fórmula fundamental de la trigonometría esférica.

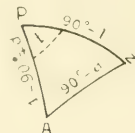


Fig. 14

$$\cos(90^\circ - a) = \cos(90^\circ \mp d)\cos(90^\circ - l) + \sin(90^\circ \mp d)\sin(90^\circ - l)\cos t.$$

ó bien

$$\text{sen}\, a = \cos\Delta\,\text{sen}\, l + \text{sen}\,\Delta\cos l\cos t. \qquad (a)$$

$$\cos t = \frac{\text{sen}\, a - \cos\Delta\,\text{sen}\, l}{\text{sen}\,\Delta\cos l}. \qquad (a')$$

Si se dispone de tablas que den los logaritmos de adición y substracción (como las de Houel. Pastor (**) ó Wisttein, la solución más sencilla se deduce de $(a')$ de este modo:

(*) El complemento de la declinación del astro $(90^\circ \mp d)$ se llama *distancia polar.*

(**) Distinguido profesor de la Escuela naval, autor de algunos tratados didácticos y de tablas de navegación, fallecido prematuramente en 1907.

$$\cos t = -\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \Delta \cos l} - \frac{\cos \Delta \operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} \Delta \cos l} = \operatorname{sen} a \operatorname{cosec.} \Delta \sec l - \operatorname{cotg} \Delta \operatorname{tg} l \qquad (b)$$

llevando en cuenta que $a$, altura verdadera es positiva, $\Delta = 90° \mp d$ si la latitud del observador y declinación del astro son de la $\left\{ \begin{matrix} \text{misma} \\ \text{contraria} \end{matrix} \right.$ especie N ó S, $l$ se considera siempre como positiva, si el triángulo está referido al polo (norte ó sur) del hemisferio del observador. Fácil será, llevando esto en cuenta y los signos que correspondan á cosec $\Delta$ y cotg $\Delta$ si hay adición ó substracción y resolver así acertadamente la fórmula ($b$).

Empleando el cálculo logarítmico ordinario nos parece que la solución más breve es la que propone Mendoza.

Para ello, restemos de la unidad ambos miembros de ($a'$).

$$1 - \cos t = 1 - \frac{\operatorname{sen} a - \cos \Delta \operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} \Delta \cos l} = \frac{\operatorname{sen} \Delta \cos l + \cos \Delta \operatorname{sen} l - \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \Delta \cos l} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\Delta + l) - \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \Delta \cos l}$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\Delta + l + a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\Delta + l - a)}{\operatorname{sen} \Delta \cos l} \qquad (c)$$

Poniendo ahora

$$\Delta + l + a = S, \qquad \Delta + l + a - 2a = S - 2a, \qquad \Delta + l - a = S - 2a$$

$$\frac{1}{2}(\Delta + l + a) = \frac{S}{2}. \qquad \frac{1}{2}(\Delta + l - a) = \left(\frac{S}{2} - a\right). \qquad (d)$$

Substituyendo estos valores en ($c$) y suprimiendo el factor común, viene:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t = \frac{\cos \frac{1}{2} S \operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - a\right)}{\operatorname{sen} \Delta \cos l} \qquad (B)$$

Esta es la fórmula de la que sale inmediatamente la conocida por el nombre de *horario de Borda*, universalmente empleada por los marinos, es ella

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} S \operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - a\right)}{\operatorname{sen} \Delta \cos l}}$$

á la que es fácil aplicar los logaritmos; pero implica bastante trabajo de cálculo, mientras que si á la (B) aplicamos las funciones de Mendoza, tenemos inmediatamente, recordando que $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t = \text{vers. } t$.

$$\text{vers. } t = \frac{\cos \frac{1}{2} S \operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - a\right)}{\operatorname{sen} \Delta \cos l} = \cos \frac{S}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{S}{2} - a\right) \text{cosec. } \Delta \sec l \quad (M)$$

la que nos da el ángulo entero en vez de la mitad, y reducido á tiempo á causa del doble argumento en grados y tiempo que ofrece la tabla XVI, de que hemos dado un espécimen en estas páginas.

No estará demás, advertir que, en vez de los complementos logarítmicos del seno y coseno que figuran en el dominador, es más rápido y cómodo valerse de la *cosecante* y *secante* (logaritmos respectivos). Y esta es una de las circunstancias que justifican su empleo, en oposición al criterio de ciertos geómetras que quisieran ver esas dos funciones olvidadas.

Creo que no caerán en desuso mientras haya calculadores en el mundo, á menos que se generalizara tanto el cálculo por *mercatoriales* ó *lamdas* y *colamdas* que hicieran inútil ó poco práctico el basado en el empleo de las actuales funciones circulares. Pero dejemos ese interesante asunto para otra *disquisición*, en que seré mero expositor, pues requiere conocimientos que yo no poseo, ya que, en matemáticas, podría decir, como el asturiano del cuento, *apenas me llamo Pedro.*

72. No es menos interesante la solución que Mendoza da al problema del *azimut.*

Aplicando al triángulo de posición la fórmula

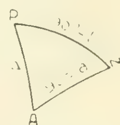


Fig. 15

$$\cos \Delta = \cos(90° - a) \cos(90° - l) + \\ + \operatorname{sen}(90° - a) \operatorname{sen}(90° - l) \cos Z \quad (a)$$

ó sea

$$\cos \Delta = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} l + \cos a \cos l \cos Z \quad (b)$$

viene para cos Z

$$\cos Z = \frac{\cos \Delta - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} l}{\cos a \cos l}; \quad 1 + \cos Z = 1 + \frac{\cos \Delta - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} l}{\cos a \cos l} \quad (c)$$

ó

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} Z = \frac{\cos a \cos l - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} l + \cos \Delta}{\cos a \cos l} = \frac{\cos(a + l) + \cos \Delta}{\cos a \cos l} \quad (d)$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} Z = \frac{2 \cos \frac{1}{2}[a + l + \Delta] \cos \frac{1}{2}[a + l - \Delta]}{\cos a \cos l} \quad e)$$

y poniendo, como antes

$$a+l+\Delta=\mathrm{S}; \qquad a+l-\Delta=\mathrm{S}-2\Delta;$$

$$\frac{a+l+\Delta}{2}=\frac{\mathrm{S}}{2}; \qquad \frac{a+l-\Delta}{2}=\frac{\mathrm{S}}{2}-\Delta,$$

luego

$$\cos^2\frac{1}{2}\mathrm{Z}=\frac{\cos\frac{1}{2}\mathrm{S}\cos\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\Delta\right)}{\cos a\cos l} \qquad (f)$$

y

$$\cos\frac{1}{2}\mathrm{Z}=\sqrt{\frac{\cos\frac{\mathrm{S}}{2}\cos\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\Delta\right)}{\cos a\cos l}}. \qquad (g)$$

Esta expresión es la conocida por el nombre de fórmula de los cosenos. El cálculo logarítmico de la ($g$) después de restablecer el radio en ella, lo que la convierte en

$$\cos\frac{1}{2}\mathrm{Z}=\sqrt{\frac{\cos\frac{\mathrm{S}}{2}\cos\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\Delta\right)\cdot\mathrm{R}^2}{\cos a\cos l}} \qquad (h)$$

sería:

$$\log\cos\frac{1}{2}\mathrm{Z}=\frac{1}{2}\left[\log\cos\frac{\mathrm{S}}{2}+l\cos\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\Delta\right)+\mathrm{colog.}\cos a+\mathrm{colog.}\cos l\right].$$

Las dos decenas de $\mathrm{R}^2$ se anulan por igual cantidad que hay que suprimir por los dos complementos logarítmicos tomados.

Mendoza llega más rápidamente al resultado, pues recordando que $\cos^2\frac{1}{2}\mathrm{Z}=\mathrm{subv.\,Z}$, la ($f$) se convierte en:

$$\mathrm{subv.\,Z}=\frac{\cos\frac{1}{2}\mathrm{S}\cos\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\Delta\right)}{\cos a\cos l}=\cos\frac{1}{2}\mathrm{S}\cos\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\Delta\right)\sec a\sec l$$

que restableciendo el radio y tomando logaritmos da:

$$\log\mathrm{subv.\,Z}=\log\cos\left(\frac{\mathrm{S}}{2}-\Delta\right)+\log\sec a+\log\sec l-10$$

expresión que da el ángulo entero y más cómodamente.

73. Por un procedimiento análogo podría calcularse el *ángulo paraláctico*. Es claro que todos estos problemas pueden resolverse con otros datos.

Así el *ángulo horario* podría calcularse: 1° con $a$, $l$, $\Delta$, como se ha hecho; 2° con $a$, $l$, Z; 3° con $a$, $\Delta$, Z; y 4° con $l$, $\Delta$, Z.

No hacemos intervenir el ángulo paraláctico $p$, porque éste no es nunca dato. La elección de los datos depende de las circunstancias en que se encuentre el observador. En el mar hay que desechar los casos en que se quisiera utilizar como dato, el *ángulo azimutal*, porque su medición comporta escasa exactitud. Por consiguiente, no pueden emplearse como datos los correspondientes á los casos 2°, 3° y 4°, mientras que serían utilizables, en general, en operaciones terrestres.

El *azimut* sería posible calcularlo: 1° con $a$, $l$, $\Delta$, como se ha hecho: 2° con $a$, $l$, $t$; 3° con $l$, $\Delta$, $t$; 4° con $a$, $\Delta$, $t$.

Como en el problema anterior, la elección de los datos depende de las circunstancias en que se encuentre el observador.

74. *Cálculo de la latitud.* Puede hallarse ésta, conociendo la altura verdadera $a$, la declinación $d$ y el ángulo horario $t$. Los elementos conocidos y el incógnito forman una combinación que es la correspondiente á la fórmula fundamental de la trigonometría esférica, puesto que se tiene

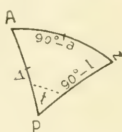



Fig. 16

$$\cos(90° - a) = \cos\Delta\cos(90° - l + \operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}(90° - l)\cos t$$

ó sea
$$\operatorname{sen} a = \cos\Delta\operatorname{sen} l + \operatorname{sen}\Delta\cos l\cos t. \qquad (a)$$

Esta expresión, siendo incógnita la $l$, no puede calcularse con logaritmos de adición y substracción.

Para el cálculo ordinario, pondremos, según prescribe la teoría:

$$\operatorname{sen} a = \cos\Delta\left[\operatorname{sen} l + \frac{\operatorname{sen}\Delta}{\cos\Delta}\cos t\cos l\right] \qquad (b)$$

y si hacemos
$$\operatorname{tg}\Delta\cos t = \operatorname{tg}\alpha \qquad (c)$$

siendo $\alpha$ un ángulo auxiliar (cuyo significado geométrico veremos en otro artículo), la ($b$) podríamos escribirla de este otro modo:

$$\operatorname{sen} a = \cos\Delta[\operatorname{sen} l + \operatorname{tg}\alpha\cos l] = \cos\Delta\left[\operatorname{sen} l + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos l\right] =$$

$$= \frac{\cos\Delta}{\cos\alpha}[\operatorname{sen} l\cos\alpha + \cos l\operatorname{sen}\alpha] \qquad (d)$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\cos\Delta}{\cos\alpha}\operatorname{sen}(l + \alpha)$$

de donde

$$\operatorname{sen}(l + \alpha) = \frac{\operatorname{sen} a\cos\alpha}{\cos\Delta}. \qquad (e)$$

Las fórmulas (*c*) y (*e*) resuelven el problema; pues conocido $\alpha$ por la (*c*) y $l+\alpha$ por la (*e*), será fácil, deducir $l$ que debe ser menor que 90°.

También este problema es susceptible de otras resoluciones, pues que teóricamente pueden ser datos: 1° *a*, *d*, *t*, como se ha visto; 2° *a*, *d*, Z; 3° *a*, *t*, Z y 4° *d*, *t*, Z.

75. *Cálculo de la altura verdadera.* — Este problema es de la práctica corriente en la moderna navegación, y lo fué también en los tiempos de Mendoza, si bien principalmente con el fin de facilitar la reducción de las *distancias lunares,* objeto primordial de la invención de sus funciones *versas.*

El autor lo resolvió por un procedimiento que, si bien exacto, nos parece largo, por lo que conviene más, á nuestro juicio, aplicarle las fórmulas corrientes de la trigonometría. Los datos son comúnmente, la *declinación,* la *latitud* y el *ángulo horario del astro*, que se deduce de la hora del observador supuesta conocida si se trata del sol, ó de esta hora media, la ascensión recta del astro y el tiempo sidéreo, si se trata de una estrella, luna ó planeta por la relación

$$\mathrm{H}^{\mathrm{occ.}}_{*}+\mathrm{AR}_{*}=\mathrm{H}^{\mathrm{occ.}}_{\odot m}+\mathrm{AR}_{\odot m}$$

La fórmula del caso, sería:

$$\operatorname{sen} a=\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t; \qquad (a)$$

$\varphi=l=$ latitud, $\delta=d=$ declinación, $t=$ ángulo horario.

Puede resolverse con los logaritmos de Leonelli, llamados de Gauss por los alemanes. Claro es que en operaciones terrestres pudieran ser otros los datos.

76. Determinemos ahora las circunstancias más favorables al cálculo del *horario,* del *azimut* ó de otro *elemento* del triángulo de posición.

*a*) Para el *horario,* un error fácil de cometer, sobre todo en observaciones marítimas, es el relativo á la *altura,* pues que este elemento para convertirse en el correspondiente del triángulo debe sufrir varias correcciones, como indicaremos simbólicamente:

$$a_v.\odot=a_i\odot+e-\mathrm{D}-\mathrm{R}+\mathrm{P}\pm\mathrm{S};$$

es decir, que para obtener la altura verdadera (nos referiremos al sol) tomaremos la de uno de sus limbos (el inferior, p. ej.), le aplicaremos el error de índice ($\pm e$), vale decir, el originado por no coincidir exactamente el punto de colimación con el *cero* de la graduación del instrumento, le restaremos D, valor de la *depresión del horizonte,* ó sea la

*inclinación* del horizonte visual (pues que se observa sobre el *horizonte marino),* valor que depende de la altura absoluta (en metros) del ojo del observador y del estado atmosférico del último punto visible (solo conocido aproximadamente); restaremos en seguida la refracción R correspondiente á $[a_i \pm e - D]$, sumaremos á esta diferencia $[(a_i \pm e - D) - R]$ la paralaje en altura del astro observado P y agregaremos ó restaremos el semidiámetro angular S del astro (sol en nuestro caso), según que hayamos observado el limbo (borde) inferior ó superior, con lo que se tendrá la altura verdadera del centro $a_v \odot$. Al propio tiempo se toma la hora del cronómetro *arreglado* por el meridiano de las efemérides astronómicas á fin de *corregir* la *declinación* y *ecuación de tiempo* ú otros *elementos* sacados de ellas y que fueran necesarios según el cálculo que haya de hacerse. Esas correcciones se refieren á la hora del primer meridiano simultánea de la hora local del observador.

*b*) *Influencia sobre el horario de un error en la altura.* — Tomemos la fórmula

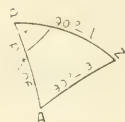


Fig. 17

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} d + \cos l \cos d \cos t \qquad (a)$$

y diferenciémosla con respecto á $a$ y $t$; será

$$\cos a da = - \cos l \cos d \cos t . dt \qquad (b)$$

de donde

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\cos l \cos d \operatorname{sen} t}{\cos a} \quad \text{ó mejor} \quad \frac{dt}{da} = - \frac{\cos a}{\cos l \cos d \operatorname{sen} t} \qquad (c)$$

la que nos dice ya que el error en la altura influye en *sentido contrario* en el horario. Ahora eliminaremos sen $t$ valiéndonos del mismo triángulo de posición, que da

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\cos a} = \frac{\operatorname{sen} Z}{\cos d} = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos l} \qquad (d)$$

de donde sacamos

$$\operatorname{sen} t = \frac{\cos a \operatorname{sen} Z}{\cos d}; \qquad \operatorname{sen} t = \frac{\cos a \operatorname{sen} A}{\cos l},$$

y substituyendo en (*c*) viene:

$$\frac{dt}{da} = - \frac{\cos a \cos d}{\cos l \cos d \cos a \operatorname{sen} Z} = - \frac{1}{\cos l \operatorname{sen} Z}; \qquad (e)$$

$$\frac{dt}{da} = - \frac{\cos a \cos l}{\cos l \cos d \cos a \operatorname{sen} A} = - \frac{1}{\cos d \operatorname{sen} A}; \qquad (f)$$

$$dt = -\frac{da}{\cos l \operatorname{sen} Z} = -\frac{1}{\cos l \operatorname{sen} Z} da; \qquad (g)$$

$$dt = -\frac{1}{\cos d \operatorname{sen} A} da. \qquad (h)$$

La $(g)$, $(h)$ asumen su valor *mínimo* cuando el denominador es *máximo*.

La $(g)$ para $l = 0$, y $Z = 90°$,
la $(h)$ para $d = 0$, y $A = 90°$.

$l = 0$, supondría el observador en el ecuador, y $d = 0$ el astro en esta línea, lo que sería excepcional. Las circunstancias, pues que están hasta cierto punto á disposición del observador, son: que $Z = 90°$ y $A = 90°$, que no son ni pueden ser simultáneas. Las alturas del astro para el caso de ser el azimut Z un ángulo recto, ó sea aquel en que un astro corta el *vertical primario,* ó bien la correspondiente á la circunstancia de ser *recto* el *ángulo de posición,* se denominan *alturas horarias;* y en esos casos solamente es cuando el *promedio* de *alturas observadas* corresponde al *promedio* de las respectivas *horas del cronómetro.* Es pues, importante determinar la *hora* y *altura* que tenga un astro al cortar el *vertical primario,* ó al ser *recto* el *ángulo paraláctico.*

Fig. 18

Se deduce lo primero del triángulo esférico rectángulo en Z, PAZ, que según la trigonometría da

$$\operatorname{tg} \Delta \cos t = \operatorname{tg}(90° - l)$$

ó

$$\cos t = \operatorname{cotg} l \operatorname{cotg} \delta = \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\operatorname{tg} l}; \qquad (1)$$

que permite pasar del horario $t$ á la hora astronómica, etc., y

$$\cos \Delta = \cos(90° - a)\cos(90° - l); \qquad \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} l;$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} l}. \qquad (2)$$

Lo segundo, resulta del triángulo esférico rectángulo en A.

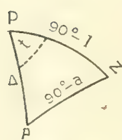


Fig. 19

$$\operatorname{tg}(90° - l)\cos t = \operatorname{tg}(90° \mp \delta); \qquad \operatorname{cotg} l \cos t = (\operatorname{cotg} \delta);$$

$$\cos t = \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tg} l \qquad (3)$$

$$\cos(90° - l) = \cos(90° - d)\cos(90° - a);$$

$$\operatorname{sen} l = \operatorname{sen} d \operatorname{sen} a; \qquad \operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} d}. \qquad (4)$$

Del examen de (2) y (4) se infiere que para que Z pueda ser recto

estando el astro sobre el horizonte del observador debe ser la latitud *mayor* que la *declinación* del astro y de la misma especie (3) y que para ser recto el ángulo paraláctico sobre el horizonte, debe ser la latitud *menor* que la *declinación* del astro y de la misma especie.

*c*) Con procedimiento análogo se investigaría la influencia de un *error* en la *latitud* sobre el *horario*. Así, la diferenciación de ($a$) con respecto á $l$ y $t$ daría :

$$\frac{dt}{dl}=\frac{\cos l \operatorname{sen} d - \operatorname{sen} l \cos d \cos t}{\cos l \cos d \operatorname{sen} t}=\frac{\cos Z \cos a}{\cos l \cos d \operatorname{sen} t}=\frac{1}{\operatorname{tg} Z \cos l}$$

$$dt=\frac{1}{\operatorname{tg} Z \cos l}dl. \qquad (i)$$

Las expresiones, coeficientes de $da$, $dt$ son los coeficientes de Pagel, que tabulan las modernas tablas náuticas. Se vee que la circunstancia favorable es $Z = 90°$ como para el error en altura.

*d*) El error en *declinación* es, en general, poco temible, y resultaría ser

$$dt=\frac{1}{\operatorname{tg} A \cos \delta}d\delta. \qquad (j)$$

*e*) Si se desean obtener las circunstancias favorables para el cálculo del *azimut*, diferenciaremos la relación

$$\operatorname{sen} d = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} l + \cos a \cos l \cos Z, \qquad (a)$$

y tendremos, para influencia de un error en la altura

$$dZ = \frac{1}{\operatorname{tg} A \cos a} da \qquad (\varepsilon)$$

que es mínimo para $a = 0$, y $A = 90°$. Conviene pues, que la altura sea pequeña ó que el ángulo paraláctico sea recto. Y para que ejerza la menor influencia un *error* en la *latitud* debe acercarse al mínimo la expresión

$$dZ=\frac{1}{\cos l \operatorname{tg} t}\cdot dl,$$

es decir, estar $l$ próxima á cero, ó $t$ cercano á 6 horas ó 90°.

*f*) La diferenciación de la misma fórmula de que se dedujo la *latitud* con respecto á esta y el horario, nos daría esta expresión para el error en la *latitud*

$$dl=\frac{\cos l \cos d \operatorname{sen} t}{\cos a \cos Z}dt=\frac{\cos l \operatorname{tg} Z}{\cos a}dt$$

que nos dice que la latitud resulta tanto mejor determinada cuanto más pequeño es el horario y la altura, ó que el azimut es de escaso valor, es decir, que para esa determinación lo más conveniente es hacer observaciones meridianas ó circunmeridianas.

77. Á otras muchas interesantes consecuencias dan origen las fórmulas fundamentales

$$\text{sen}\, a = \text{sen}\, l \,\text{sen}\, d + \cos l \cos d \cos t \qquad (\alpha)$$

$$\text{sen}\, l = \text{sen}\, a \,\text{sen}\, d + \cos a \cos d \cos \text{A} \qquad (\varepsilon)$$

$$\text{sen}\, d = \text{sen}\, a \,\text{sen}\, l + \cos a \cos l \cos \text{Z}. \qquad (\gamma)$$

Así la $(\alpha)$ daría para $t = 0$

$$\text{sen}\, a = \text{sen}\, l \,\text{sen}\, d + \cos l \cos d = \cos (l - d)$$

ó si en vez de $\text{sen}\, a = \cos (90^\circ - a)$, ponemos para $90^\circ - a = z$ (distancia zenital meridiana) sería :

$$\cos z = \cos (l - d)\,; \qquad z = l - d = d - l\,; \qquad l = z + d\,; \qquad l = d - z,$$

fórmulas adecuadas para calcular la latitud por una observación meridiana.

78. Como estas deducciones nos llevarían demasiado lejos, y saldrían del tema de las *funciones versas,* objeto principal de este artículo, daremos por terminado éste aquí, sin perjuicio de tratar en los que sigan algún otro interesante problema de astronomía esférica por creer que es más ventajoso hacer aplicaciones á conocimientos útiles que tratar problemas abstractos en que no se advierte finalidad objetiva.

Buenos Aires, noviembre 27 de 1914.

# NUEVO APARATO

PARA LA

# FABRICACIÓN DEL ÁCIDO NÍTRICO PURO

DE 40° á 48° BAUMÉ

POR HUMBERTO JULIO PAOLI
Doctor en ingeniería química
De las universidades de Pisa y Gante

---

## PRELIMINARES

1. Albertus Magnus (1192-1280) en su tratado *Compositum de Compositis* (1) describe con mucha exactitud la preparación del ácido nítrico, que llama *agua primera* ó *agua filosófica* al primer grado de perfección; indica de la misma las propiedades principales: la de separar la plata del oro y la de oxidar los metales. Tomad dos partes de vitriolo romano, dos partes de nitro y una parte de alumbre calcinado, someted estas materias bien pulverizadas y calcinadas á la destilación en una retorta de vidrio; hay que tener cuidado para que todas las junturas cierren bien, para no permitir la salida del gas — *ne spiriti possint evaporari* — luego empezad á calentar, primero lentamente, después más activamente.

El líquido así conseguido licúa la plata *(est dissolutivum lunae)*, separa el oro de la plata y transforma el mercurio y el fierro en cal (óxidos): *Aurum ab argento separat, mercurium et martem calcinat, convertit in calcem* (2).

Hay también en este sistema producción de aluminato de potasa, por la acción de la alúmina contenida en la arcilla en contacto con el nitro líquido.

(1) *Theatr. chim.*, tomo IV, página 929.

(2) *Theatr. chim.*, tomo IV, página 937.

El ácido nítrico se descompone en su mayor parte en $N^2O^4$ y el O se condensa en el agua dando lugar á la reacción :



$$N^2O^4 + H^2O = HNO^3 + HNO^2$$

Las pérdidas con este sistema eran grandísimas, pues no solamente no era completa la descomposición del nitrato con la arcilla, sino también se perdía NO.

2. Con la substitución de la arcilla por sulfato de hierro se experimentaban también grandes pérdidas.

El primero que lanzó la idea de poner el nitro en contacto con ácido sulfúrico, fué Guillaume François Rouelle (1703-1770) (1), quien explicaba un sistema muy simple é ingenioso para la concentración del ácido nítrico.

Consistía este sistema en la destilación del ácido nítrico (ó del extracto de nitro ó ácido nitroso, como lo llamaba) con ácido vitriólico (sulfúrico).

3. Por mucho tiempo se ha usado nitrato de potasio y ácido sulfúrico concentrado.

En estas condiciones se producen tres reacciones según la temperatura :

En la primera se produce bisulfato $KHSO^4$ y ácido nítrico; en la segunda la reacción del bisulfato con el nitro á temperatura más alta, produce sulfato neutro y ácido nítrico; en la tercera el ácido nítrico producido por la alta temperatura de la segunda, se descompone en peróxido de ázoe y oxígeno no habiendo poco más de una molécula de ácido nítrico.

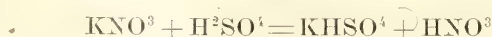
En síntesis, la reacción se puede expresar con la siguiente ecuación :



$$4KNO^3 + 2H^2SO^4 = 2K^2SO^4 + 2HNO^3 + 2NO^2 + H^2O + O$$

Por tal procedimiento cien partes se sal nitro, en presencia de 48,46 partes de ácido sulfúrico concentrado, producen 31 partes de ácido nítrico fumante.

Por consiguiente empleando nitrato de potasio se debe usar ácido sulfúrico en la proporción indicada por la siguiente reacción :



$$KNO^3 + H^2SO^4 = KHSO^4 + HNO^3$$

(1) *Cours de chimie de Rouelle aîné*, rédigé par M. M., manuscrit in-folio, page 395. Bibliothèque national de Paris.

y además para conseguir ácido nítrico concentrado, usando ácido sulfúrico con 2 por ciento de agua, es preciso que este último esté en mayor cantidad.

4. Cuando se empezó á usar nitro de Chile y del Perú (lo que sucedió en 1830) se alcanzaron dos ventajas: la primera que el nitrato de sodio es mucho más barato; la segunda que para una misma cantidad en peso de los dos nitratos, el nitrato de sodio da más ácido nítrico, pues el bisulfato de sodio se transforma más fácilmente en sulfato neutro; por lo que empleando dos moléculas de nitrato por una molécula de ácido sulfúrico, se tiene menos cantidad de ácido nítrico descompuesto.

El bisulfato ó sulfato sódico que queda se puede más fácilmente emplear.

5. La cantidad de ácido nítrico producido depende de las buenas condiciones en que se hace la operación, de la pureza de los materiales usados, de la construcción del condensador y de la torre de cola del regenerador.

El condensador y el regenerador deben condensar el ácido nítrico absorber los gases nitrosos producidos en la descomposición del ácido nítrico por la acción del calor y sacar todas las impurezas (cloro, ácido clorhídrico, iodo). Los antiguos aparatos formados por una batería de grandes bombones de *grès* comunicados entre sí, obraban como simples condensadores y producían no solamente ácido impuro y coloreado, sino también ácido de diferentes densidades, mientras que los modernos aparatos, si bien más complicados, obran como purificadores y nos dan ácido purísimo é incoloro.

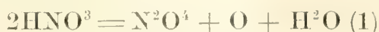
Si el nitrato contiene cloruros, se producen cloro y ácido clorhídrico; este último, reaccionando con el ácido nítrico, nos da el cloruro de nitrosilo.

Una parte de cloruro de sodio precisa 0,38 partes de ácido nítrico para producir NOCl que se encuentra en los primeros productos de la destilación:



$$HNO^3 + 3HCl = NOCl + Cl^2 + 2H^2O$$

Carius ha reconocido que la descomposición del ácido nítrico es constante entre 256° y 313° y que está representada por la ecuación:



$$2HNO^3 = N^2O^4 + O + H^2O \text{ (1)}$$

(1) A., tomo CLXIX, página 273.

Á 100° según Berthelot una parte de ácido nítrico se descompone:



$$2HNO^3 = 2NO^2 + H^2O + O$$

Según Veley (1) el ácido concentrado y puro se descompone también á 58°.

Es el fin de los aparatos regeneradores el de transformar lo más pronto el peróxido de ázoe en ácido nítrico mediante corrientes de aire.

Es sabido que el iponitrido á baja temperatura tiene la fórmula $N^2O^4$, á la temperatura de 140° se descompone y la fórmula es $NO^2$ según la ecuación



$$N^2O^4 = 2NO^2$$

entre la temperatura de 15° y la de 140° el $NO^2$ tiene las proporciones de la tabla siguiente:

| Temperatura | $N^2O^4$ Por ciento | $NO^2$ Por ciento |
|---|---|---|
| 26.7 | 80 | 20 |
| 39.8 | 71 | 29 |
| 60.2 | 47 | 53 |
| 80.6 | 23 | 77 |
| 135.0 | 1 | 99 |
| 140.0 | — | 100 |

$N^2O^4$ á temperatura ordinaria reaccionando con agua produce ácido nítrico y ácido nitroso:



$$N^2O^4 + H^2O = HNO^3 + HNO^2$$

Á temperatura alta la reacción se produce según la siguiente ecuación:



$$3NO^2 + H^2O = 2HNO^3 + NO$$

El ácido nitroso se descompone por calentamiento de la solución acuosa según la ecuación:



$$3HNO^2 = HNO^3 + 2NO + H^2O$$

El óxido de ázoe combinándose con aire produce meramente peróxi-

(1) *Chem. News.*, tomo XXXI.

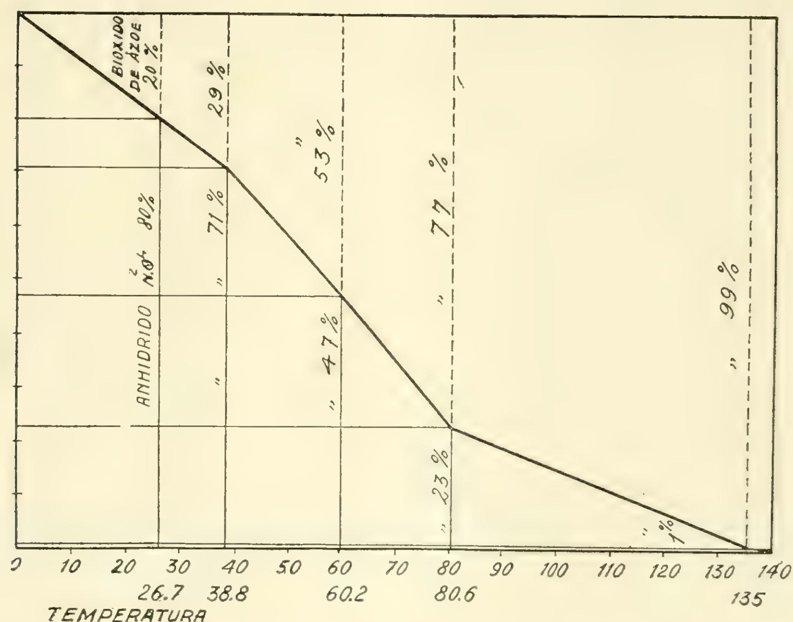
do que luego es absorbido por el ácido nítrico concentrado dando lugar á NO y á ácido nitroso :



$$2NO + 2HNO^3 = (N^2O^4 + 2HNO^2) \text{ ácido nítrico fumante}$$

El óxido de ázoe descompone el ácido nítrico y conjuntamente con su dilución produce $NO^2$ que colorea el producto en amarillo.

Aumentando la dilución produce $HNO^2$ y $N^2O^3$ que colorean el ácido en verde y azul.




6. En todas las preparaciones de ácido nítrico se pueden notar tres fases :

*a)* Primeros productos de cabeza fuertemente coloreados conteniendo derivados clorados :

*b)* Productos intermedios conteniendo ácido nítrico incoloro :

*c)* Últimos productos conteniendo derivados nitrosos.

Puesto que el ácido sulfúrico reacciona primeramente sobre los cloruros y yoduros alcalinos, y sobre los alcalinos terrosos del salitre, los derivados del cloro se encuentran solamente en los primeros productos de la destilación.

El ácido perclórico procedente de los percloratos produce ácido y por consiguiente productos cloratos de $ClO^2$.

Los últimos productos ó productos de cola, pueden ser regenerados mediante mezcla con agua y aire, á la vez que los productos intermedios recogidos aparte resultan puros é incoloros.

## SISTEMAS DE FABRICACIÓN

7. Hablaremos ahora de los aparatos. Muchos son los sistemas para la condensación del ácido nítrico y la mayor parte de ellos sirve tambien para la producción del ácido nítrico puro.

*Sistema Grieshen.* — Consiste este sistema en la interposición de un recipiente donde todo el líquido se concentra, entre el generador y el refrigerante.

Para conseguir un producto puro es necesario tener este recipiente á la temperatura de 80°.

Se emplea muy poco este aparato por dar origen á considerables pérdidas.

*Sistema Valentinier.* — Se empleó por primera vez en el año 1891. Con éste se produce la condensación mediante una batería de serpentines y turias con presión reducida á 500 milímetros de mercurio, hecho por la aspiración de una bomba.

Este sistema muy conocido y descripto en todos los tratados ha sido abandonado por los grandes inconvenientes que tiene, pues no solamente produce ácido nítrico de diferente graduación, sino también porque produce ácido muy diluído; hay que agregar que el nitro y el ácido sulfúrico arriba de 60° produce una fuerte espuma que ensucia las baterías de condensación.

Por lo frágil del grés (1), la protección de la bomba aspirante de los gases dañosos, el refrigeramiento de las mismas serpentinas para una condensación completa, la gran cantidad de productos de cloro y de nitro disueltos en el ácido nítrico, el consumo de carbón, la energía para el funcionamiento de la bomba, la cantidad de obreros necesarios, etc., etc., son los defectos que han hecho considerar el sistema Valentinier muy inferior al de Guttmann-Rohmann que ofrece mayores ventajas.

(1) G. Lunge, *A theorctical and pratical theatise on the manufacture of sulfuric acid and alkali,* volumen 1, página 134, parte I. London, 1903.

Mencionamos los sistemas de Erouard, etc., etc. D. R. P., número 62.714 de Frasch (D. R. P., número 82.573): *Verein Chemischer Fabriken in Mannheim* (D. R. P., número 85.042) de Uebel de la *Chemische Fabrik Rhenania.*

8. *Sistema Guttmann-Rohmann.* — Se conoce desde el año 1871, pero hace unos quince años solamente que consiguió un verdadero período industrial. La primera patente (N° 73.431, D. R. P.) tuvo aplicación en 1891; la patente número 73.425 es de señalarse. Se emplean largos condensadores hechos con caños de grés de Krauschwitz cuyas extremidades inferiores están soldadas con manguitos de grés; en los caños el ácido se condensa por enfriamiento con el aire, y baja aun caliente por medio de la cámara de los caños llegando á un depósito colector puesto abajo.

El aire caliente introducido en el sistema de los caños apresura la oxidación de los óxidos de ázoe inferiores expeliendo la parte no oxidable de los gases.

Esta batería fué luego substituída por la de la figura 1 consistiendo en una turia de seis caños largos verticales enfriados exteriormente por una corriente de agua (D. R. P. 136.679-160.709 und Engl. pat. 136.9401).

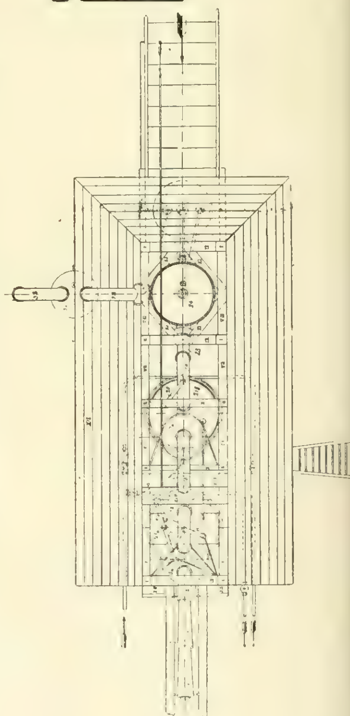
La condensación se realiza á una temperatura que solamente muy poco vapor de agua pueda condensar, mientras quedan volátiles los productos nitrosos y los de cloro.

Estos gases atraviesan la batería y penetran en la torre de absorción, donde la temperatura es también mantenida á una graduación tal, que el cloro y una parte del aire sean expulsados fuera por medio del tiraje de coda. Durante todo el tiempo que dura la destilación el ácido nitroso hallándose en contacto con una corriente de aire introducida en el aparato, se transforma en ácido nítrico recién condensado con el contacto de los gases.

Á este efecto los caños tienen en su parte inferior un caño de derrame que recoge el ácido condensado en un colector común, mientras los gases siguen libremente su camino hasta que sean eliminados ó condensados en la última torre.

Este sistema tiene el defecto que los caños se calientan de manera diferente, aun cuando estén sumergidos en un refrigerante común; así es que trabajan los primeros mientras están fríos los últimos, después de unas horas de destilación cuando el aparato se ha calentado.

En países fríos, el aparato Guttmann no necesita la sumersión de


APARATO
PARA ACIDO NITRICO.
SISTEMA PAOLI
1912

sus seis caños en el agua. Entonces la diferencia de temperatura es mucho más sensible en las partes de la batería de los caños, tanto que reduce á los dos primeros caños solamente la casi completa destilación de una carga de 500 kilos.

Con cargas de mayor cantidad trabaja también la parte de cola de la batería por el sobrecalentamiento del aparato mismo.

En este sistema puede introducirse el aire mediante caños de vidrio en comunicación con la cañería de aire de los compresores. Estos caños de vidrio se colocan sumergidos en el ácido condensado del depósito B.

La instalación de la cañería que lleva el aire se hace de manera que los caños en comunicación con la caldera de compresión pasen, antes de llegar al depósito del ácido, por el fogón del horno, permitiendo así que el aire se caliente.

Al contrario en algunos aparatos hay un caño aspirador K, de H. Kirchoff, ó sea un caño insertado en la cañería de entrada y perforado en varias partes, por donde el aire exterior puede penetrar debido al tiraje natural del aparato.

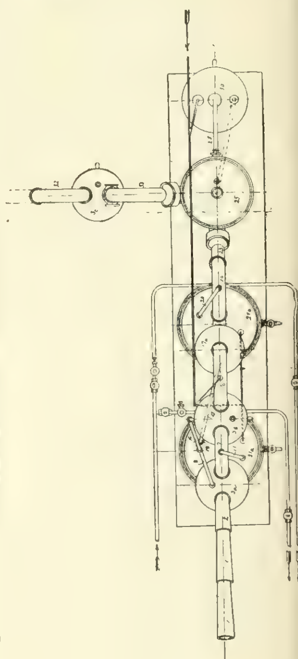
Por la linterna E se pueden ver los gases no condensados por falta de agua en la torre O.

Los gases expulsados del depósito B vuelven á circular por medio de una cañería á propósito.

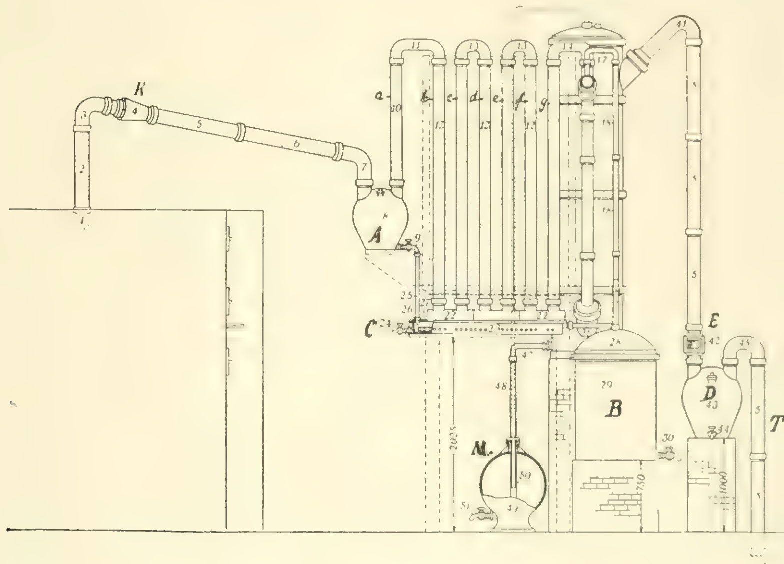
10. Nuestro aparato consiste en dos turias de cabeza $3^a$ y $3^b$ instaladas según la figura 2. La condensación pasa de $3^a$ á $3^b$ por medio del caño 4, 5 y 6. Los productos de primera condensación se pueden sacar de la turia $3^a$ por el robinete ó también recoger en el depósito de cabeza 22. El aire lleno de productos nitrosos sale de este depósito por 12 y empieza la circulación.

Por consiguiente, tenemos una parte del aparato que puede funcionar independientemente de la parte central, para recoger todos los productos que se forman, al comenzar la marcha del aparato ó sea productos de cloro, de yodo, etc., etc. Por la linterna de vidrio 5 se puede seguir la primera fase de la destilación.

Los seis caños perpendiculares que constituyen la parte central del aparato, están en comunicación mediante dos colectores $17^a$ y $17^c$: el primero de entrada que subdivide la destilación, y por consiguiente, da á los caños la misma temperatura; el segundo que recoge los productos de los caños y los comunica en su parte inferior, impidiéndoles el contacto con los gases que saca automáticamente mediante la campana invertida (A-B) (croquis sección).


APARATO
PARA ACIDO NITRICO
SISTEMA PAOLI

Estando el robinete del $17^a$ cerrado, el ácido condensado pasa por 18 y 19 y se mezcla en el primer depósito 22, lo que es muy útil cuando es preciso fabricar ácido de la misma densidad. Si por el contrario se quieren separar los productos de la destilación central, el robinete se deja abierto y por éste los productos penetran en 22 bis, donde pasa el aire que viene de *(f)* y entra por 12 bis en la curva 20 en 16. La linterna de vidrio 5 permite que se vean los gases colorea-




dos que deben ser absorbidos por la torre en la cual circula agua ó ácido débil.

Los depósitos están rodeados por una cañería de plomo (según la disposición del dibujo) en la cual circula el agua caliente debida á la condensación del generador del vapor de la fábrica.

Así se puede alcanzar la constante temperatura del ácido sin precisar el aire caliente.

También los últimos productos de la destilación diluídos pueden tenerse separados ó bien mezclados al ácido de los depósitos. Si la operación se hace en debida forma, estos productos diluídos pueden mezclarse al ácido del primer depósito.

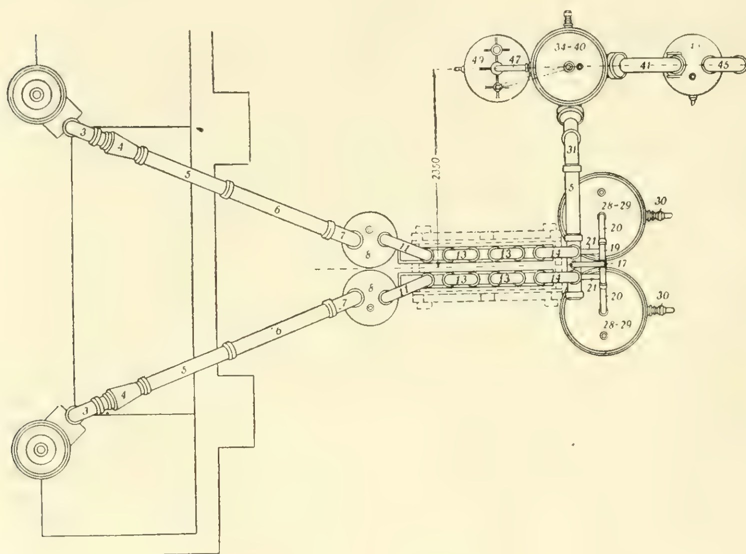
Según nuestra disposición se puede á voluntad calentar los dos depósitos, cerrando oportunamente llaves y abriendo la salida.

Así como en el Guttmann, también nuestro sistema, que tiene una

batería de seis caños, puede fácilmente condensar los productos de la descomposición de una carga de 1000 kilos de nitro.

Todo el ácido producido tiene la misma densidad, por lo que es inútil cualquier aparato mezclador.

Los dos sistemas nos dan una concentración de ácido más alta que los demás. El ácido de la torre que titula 36/38° B. puede ser puesto




en la marmita para una nueva destilación (representa el 5 por ciento de la producción total).

Una parte de la destilación se puede recoger en ácido á 100 por ciento.

El ácido sale puro de productos de cloro, de yodo, de ácido sulfúrico, de ácido iponitroso.

Solamente en el ácido nítrico á 43° B. es contenido el ácido nitroso; ó sea cuando el ácido tiene la densidad 1,505 á 96,5 por ciento. El ácido á 40° y 42° B., densidad 1,420, no tiene ácido nitroso.

Para concentrar ácido nítrico débil se pueden usar los dos sistemas mezclando con ácido sulfúrico y destilando.

Comúnmente se sumergen en el agua las dos baterías gemelas ó se ponen en dos series perpendiculares en la misma caja de agua.

En nuestro sistema se aconseja sumergir dos (2×6) en dos tambores cilíndricos independientes.

Una misma torre de concentración sirve para los dos; ésta puede ser rellenada con bolas Guttmann, teniendo la torre un diámetro de 700 milímetros, ó, como en nuestro sistema, puede rellenarse con caños de vidrio según la disposición aquí dibujada.

| Cargas | Producción | Carbón | Aire comprimido | Agua | Ácido de la torre |
|---|---|---|---|---|---|
| Nitrato de sodio 1000 kilogramos á 96 por ciento. | 734 kilogramos de ácido nítrico á 96 por ciento de monohidrato ó sea 99 por ciento del rendimiento teórico. | | De 3 á 4 metros cúbicos de aire á 3 atmósferas. | 300 litros. | 5 por ciento de producción. |
| Ácido sulfúrico monohidrato 1080 kilogramos á 94,5 por ciento. | | 125-150 kilogramos por 1000 kilogramos de nitro. | | | |
| Nitrato de sosa 100 kilogramos á 97 por ciento. | 1,025 kilogramos de ácido nítrico á 1,43. | | | | |
| Ácido sulfúrico á 79,36 por ciento. | 69,8 por ciento ó sea 99,4 por ciento del rendimiento teórico. | | | | |

*Nota.* — La mano de obra corresponde á cuatro obreros para cada 10 calderas de ataque.

MADERAS

| Número | Forma | Sección ancho de corte y largo — Pulgadas | Sección ancho de corte y largo — Metros | Número |
|---|---|---|---|---|
| 1 .......... | Cuadro | 5 × 5 | 5.700 | 6 |
| 2 .......... | — | 4 × 4 | 3.800 | 4 |
| 3 .......... | — | 5 × 5 | 2.800 | 2 |
| 4 .......... | Rectángulo | 4 × 2 | 4.200 | 3 |
| 5 .......... | Cuadro | 4 × 4 | 1.240 | 2 |
| 6 .......... | — | 4 × 4 | 0.690 | 2 |
| 7 .......... | — | 4 × 4 | 0.660 | 2 |
| 8 .......... | — | 4 × 4 | 1.010 | 2 |
| 9 .......... | — | 4 × 4 | 0.800 | 17 |
| 10 .......... | — | 4 × 4 | 0.850 | 2 |
| 11 .......... | — | 3 × 3 | 0.850 | 8 |
| 12 .......... | Rectángulo | 5 × 4 | 1.050 | 1 |
| 13 .......... | — | 5 × 4 | 0.430 | 2 |
| 14 .......... | — | 1 × 8 | 1.050 | 2 |
| 15 .......... | Formar un círculo de cuatro arcos de madera | 4 × 3 | Diám. int. 0.730<br>Diám. ext. 0.880 | 2 |
| 16 .......... | Rectángulo | 4 × 3 | 0.100 | 12 |
| 17 .......... | — | 5 × 3 | 0.950 | 2 |
| 18 .......... | — | 2 × 1 | 0.800 | 15 |
| 19 .......... | Madera machihembrada | 1 × 2 ½ | 5.000 | 30 |
| 20 .......... | — | 3 × 2 ½ | 4.200 | 15 |

N° 1. Quince caños de 800 milímetros de largo, 220 de diámetro exterior y 150 de interior.

N° 2. Un codo según dibujo.

N° 3. *a)* Una turia con dos robinetes y agujero arriba, capacidad 103 litros: 600 milímetros de diámetro exterior y 680 de altura exterior; *b)* una turia con dos robinetes y agujero arriba, capacidad 103 litros: 600 milímetros de diámetro exterior y 680 de altura exterior; *c)* una turia con un robinete y agujero arriba. La turia *a* tiene los robinetes al lado, la turia *b* tiene los robinetes en frente y atrás y la turia *c* tiene el robinete al frente.

N° 4. Un caño ordinario de grés de 130 milímetros de diámetro interior y 500 de largo.

N° 5. Dos caños de vidrio, según dibujo: diámetro interior arriba 180 milímetros, abajo 140; largo de los caños 300 milímetros.

Nº 6. Dos caños ordinarios de grés : diámetro interior 130 milímetros y largo 580.

Nº 7. Una curva de grés : diámetro interior 130 milímetros, distancia de centro y centro de las dos bocas 400.

Nº 8. Un caño ordinario de grés : diámetro interior 35 milímetros, largo 230.

Nº 9. Un caño de grés, según dibujo : diámetro interior 35 milímetros.

Nº 10. Un caño de grés, según dibujo.

Nº 11. Una curva : diámetro interior 35 milímetros, distancia de centro á centro de las dos bocas 250.

Nº 12. Cinco caños de grés : diámetro interior 35 milímetros, largo 1000.

Nº 13. Cuatro caños de vidrio : diámetro interior 35 milímetros, largo 200.

Nº 14. Un caño de grés : diámetro interior 35 milímetros, largo 700.

Nº 15. Siete caños ordinarios de grés : diámetro interior 130 milímetros, largo 950.

Nº 16. Dos caños en U, según dibujo.

Nº 17. *a)* Un colector Paoli, capacidad 72 litros : diámetro exterior 530 milímetros, altura exterior 530; *b)* seis caños ordinarios para las turias Paoli : diámetro interior 100 milímetros, largo 2500; *c)* un colector Paoli, capacidad 72 litros : diámetro exterior 530 milímetros, altura exterior 530; colector *ac*, según dibujo; *d)* un depósito chico, según dibujo.

Nº 18. Un caño de grés : diámetro interior 35 milímetros, largo 800.

Nº 19. Un codo, según dibujo : diámetro interior 35 milímetros.

Nº 20. Un caño grés U, según dibujo : diámetro interior 35 milímetros.

Nº 21. *a)* Una tapa de grés para depósito con tres agujeros, según dibujo : diámetro exterior 800 milímetros; *b)* una tapa de grés con tres agujeros, según dibujo.

Nº 22. Dos depósitos de grés con robinete, capacidad 600 litros : diámetro exterior 800 milímetros, altura exterior 1100.

Nº 23. Un codo, según dibujo : diámetro interior 130 milímetros.

Nº 24. Una tapa de grés para la torre con dos agujeros, según dibujo : diámetro exterior 700 milímetros.

Nº 25. Un cilindro de grés para la torre, según dibujo : diámetro exterior 700 milímetros, altura 600.

Nº 26. Dos cilindros de grés para la torre: diámetro exterior 700 milímetros, altura 1000.

Nº 27. Un cilindro de grés para la torre con dos robinetes y un agujero, según dibujo: diámetro exterior 700 milímetros, altura 700.

Nº 28. Un caño de grés, según dibujo, de 35 milímetros de diámetro.

Nº 29. Un caño de grés de 35 milímetros de diámetro interior con llave para monta ácido de 1000 milímetros de largo.

Nº 30. Un monta ácido con un robinete, capacidad 230 litros: diámetro exterior 700 milímetros, altura 850.

Nº 31. Cuatro caños ordinarios de 130 milímetros de diámetro interior y 1000 de largo.

Nº 32. Un caño de grés U: diámetro interior 130 milímetros, distancia de centro á centro de las dos bocas 500.

Nº 33. Un codo, según dibujo: diámetro interior 130 milímetros.

Nº 34. Una linterna para caño de 130 milímetros de interior.

FIERROS

*a)* A. Dos tirantes doble T. P. N. 12, largo 6 metros, para el caño de entrada de gas; B. 15 fierros U para la suspensión.

*b)* 30 fierros para suspensión cañería, según dibujo, sección, 30 milímetros por 5.

*c)* 15 mensulas fierro sección, según dibujo, 50 milímetros por 10.

*d)* 50 fierros ángulo sección, según dibujo, 100 milímetros por 10.

*e)* A, 2 mensulas fierro sección T, 50 por 50 milímetros por 3 espesor, para bombona 3 B; B, 2 fierros, según dibujo, para bombona 3 A.

*f)* Un fierro para suspensión, según dibujo.

*g)* Un fierro para suspensión, según dibujo.

*h)* 10 bulones de 160 milímetros por 2 pulgadas y 20 arandelas; 300 tirafones de 70 milímetros por 10; 300 clavos de 2 pulgadas; 30 clavos de 3; 30 clavos de 4; 20 clavos de 7.

ESCALERAS

Escalera de fierro: largo $2^{m}30$, ancho de arriba 300 milímetros, ancho de abajo 400.

Escalera de madera: con una barandilla, ángulo de inclinación 45°, largo $7^{m}30$, ancho 700 milímetros, madera de lado 1 pulgada por 8, largo $7^{m}30$, 25 maderas para pies de 1 pulgada por 9 y 700 milímetros de largo.

### CAÑERÍA

90 metros caño de plomo para vapor (marcado C. V.): diámetro interior 30 milímetros, exterior 40.

15 metros caño para aire (marcado C. A.): diámetro interior 5 milímetros, exterior 10.

3 válvulas de aire para caño de 10 milímetros de exterior.

6 válvulas de vapor para caño de 40 milímetros de exterior.

### FUNDACIONES

Para todos: altura $0^{m}90$; ancho $1^{m}80$; largo 5 metros.

Para torre: altura $1^{m}80$; ancho 1 metro; largo $1^{m}80$.

Para última turia: altura 1 metro; ancho $0^{m}50$; largo $0^{m}50$.

Ladrillos 4000; cal 900 kilos; cemento 400; arena 1 metro cúbico.

ACERCA DE UNA RELACIÓN

ENTRE

# LA VELOCIDAD RADIAL DE LAS ESTRELLAS MÁS BRILLANTES

Y SUS MAGNITUDES

Las siguientes tablas exhiben los resultados de un examen hecho con las estrellas de las seis principales clases espectrales con respecto á las inherentes velocidades radiales y las magnitudes.

La tabla número 1 contiene los resultados de todas las clases libres del movimiento solar sobre la común hipótesis de $V_{\odot} = -19^{k}5$ para la velocidad del sistema solar hacia el ápice $\alpha = 18^{k}$ y $\delta = +30^{\circ}$.

La tabla número 2 contiene un análisis de los mismos datos con respecto á la vía láctea, estando separadas las estrellas de la clase A en cuatro subdivisiones espectrales. Á causa del reducido número de estrellas disponibles para tales investigaciones estadísticas las magnitudes fueron limitadas á dos clases, las de más brillo de 3.0 y las de 3.0 y más débiles.

La tabla número 3 contiene un pequeño resumen de los resultados de una división en dos clases de magnitudes.

La tabla número 4 contiene los resultados de las estrellas de la clase B después de haber sido libertadas del movimiento solar y del error constante deducido de estas mismas estrellas.

TABLA NÚMERO 1

| | B | | A | | F | | G | | K | | M | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nº | V | Nº | V | Nº | V | Nº | V | Nº | V | Nº | V |
| | | | | | | | | | 6 | 14.8 | | |
| 1.9 y más brillante | 11 | 5.7 | 8 | 15.1 | | | | | * 5 | 9.2 | | |
| | | | | | 11 | 11.5 | 7 | 12.5 | | | 16 | 12.5 |
| | 19 | 8.0 | | | | | | | | | * 14 | 8.6 |
| 2.0 á 2.9........ | * 17 | 6.2 | 19 | 12.2 | | | | | 25 | 12.1 | | |
| 3.0 á 3.9........ | 43 | 7.3 | 26 | 8.7 | 28 | 16.3 | 23 | 13.7 | 87 | 15.3 | | |
| 4.0 á 4.9........ | | | 121 | 10.7 | | | | | | | | |
| | 152 | 7.9 | | | 161 | 14.9 | 108 | 13.7 | 309 | 15.9 | 64 | 18.5 |
| 5.0 y más débil .. | | | 38 | 12.6 | | | | | | | | |

* Rechazando una ó dos velocidades anormales.

*Nota.* — Los datos usados en estas tablas, han sido tomados de los catálogos de Campbell de la velocidad radial, en los Boletines números 195, 211 y 229 del Observatorio de Lick.

TABLA NÚMERO 2

| Clase | Magnitud | 0° — ± 20° | | ± 20° — ± 40° | | ± 40° — ± 90° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | N° | V | N° | V | N° | V |
| B | 2.9 y más brillantes.... | 24 | 7k5 | 1 | 4k9 | 5 | 6k1 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 132 | 8.1 | 33 | 8.4 | 26 | 4.1 |
| A*p* | 2.9 y más brillantes.... | 2 | 22.1 | 0 | | 3 | 4.3 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 1 | 14.8 | 4 | 7.4 | 5 | 5.3 |
| A | 2.9 y más brillantes.... | 7 | 16.1 | 2 | 7.0 | 3 | 8.3 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 21 | 10.8 | 16 | 10.2 | 34 | 9.3 |
| $A_1 — A_3$ | 2.9 y más brillantes.... | 3 | 22.9 | 1 | 0.6 | 3 | 8.9 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 21 | 12.2 | 12 | 13.8 | 27 | 8.8 |
| $A_5 — A_8$ | 2.9 y más brillantes.... | 2 | 14.6 | 0 | | 1 | 4.9 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 16 | 13.2 | 5 | 8.7 | 23 | 13.1 |
| F | 2.9 y más brillantes.... | 8 | 13.6 | 2 | 7.3 | 1 | 2.8 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 65 | 15.9 | 35 | 17.8 | 84 | 13.4 |
| G | 2.9 y más brillantes.... | 3 | 17.9 | 0 | | 4 | 8.5 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 46 | 26.5 | 32 | 29.2 | 60 | 16.0 |
| K | 2.9 y más brillantes.... | 15 | 11.7 | 9 | 10.9 | 8 | 23.2 |
| | | | | | | * 6 | 13.0 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 156 | 17.8 | 103 | 19.4 | 152 | 16.5 |
| M | 2.9 y más brillantes.... | 3 | 9.4 | 2 | 9.5 | 2 | † 18.6 |
| | 3.0 y más débiles ...... | 16 | 19.5 | 17 | 17.4 | 35 | 15.4 |

Rechazando dos grandes valores de 68k7 y 38k4.

† Los valores individuales son 35k7 y 1k5.

TABLA NÚMERO 3

| | 2.9 y más brillantes | 3.0 y más débiles |
|---|---|---|
| Clase B........ | 6.6 | 7.6 |
| — A........ | 12.5 | |
| | * 8.0 | 10.8 |
| — F........ | 11.5 | 15.6 |
| — G........ | 12.5 | 13.7 |
| — K........ | 12.0 | 15.6 |
| — M........ | 10.6 | 18.5 |
| — Todos .... | 11.0 | 13.6 |

* Omitiendo las 7 estrellas en la vía láctea, con grandes velocidades. Las velocidades de estas siete estrellas varían de 21 á 31 kilómetros, siendo el término medio 25.7.

TABLA NÚMERO 4

*Estrellas de la clase B*

| Límites de magnitud | Vía láctea | | No vía láctea | | Todos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nº | V | Nº | V | Nº | V | % |
| 2.2 y más brillantes. | 15 | 3.2 | 3 | 2.7 | 17 | 3.2 | 0 |
| 2.3 á 2.9.......... | 14 | 5.9 | 2 | 9.9 | 13 | 6.7 | 23 |
| 3.0 á 3.9.......... | 38 | 5.6 | 5 | 2.1 | 43 | 5.2 | 14 |
| 4.0 á 4.9.......... | 80 | 6.2 | 33 | 6.7 | 112 | 6.6 | 19 |
| 5.0 ............... | 21 | 9.3 | 15 | 6.4 | 36 | 8.2 | 31 |
| Variables .......... | » | » | » | » | 4 | 5.5 | 0 |
| * 4.0 á 4.9......... | » | » | 12 | 9.0 | » | » | » |

* Latitudes de la vía láctea — 40 á — 90.

*Nota.* — La última columna contiene el tanto por ciento de estrellas en cada grupo que tienen velocidades de 10 kilómetros y más.

Los límites de la vía láctea fueron tomados como á 20° de cada lado del llano de la vía láctea, abrazando un área un poco mayor que la tercera parte del cielo.

Haciendo una razonable concesión para los efectos de unas cuantas

velocidades irregulares en tan insuficientes y variables datos, se ve claramente en las tablas que preceden, que á una diminución de brillo corresponde un aumento de velocidad. Á primera vista, parece que hubiera una excepción en el caso de las estrellas de la clase A, pero un examen más detenido nos indica que esta excepción es debida á siete de las estrellas más brillantes de la vía láctea que tienen grandes velocidades. Tres de estas por lo menos, pertenecen á la conocida corriente Osa Mayor.

Como las estrellas comprendidas en la investigación ya citada, llegan á la mitad más ó menos de estas de quinta magnitud y más brillantes, se cree que la condición arriba mencionada es representativa de tales estrellas. No se sabe de una manera cierta hasta dónde podrá extenderse debajo de la magnitud quinta ó sexta.

Se encuentra una fuerte corroboración de esta conclusión en el hecho que las velocidades más altas se encuentran solamente entre las estrellas más débiles, no habiéndose conocido un solo ejemplo contrario. De las 38 estrellas que están en la lista de las que tienen velocidades de 50 kilómetros y más, solamente una es tan brillante como la magnitud 2.4 y cuatro están entre 3.0 y 4.0. Hay cinco estrellas de 100 kilómetros y más, siendo la magnitud media de estas, 6.9.

Un examen ha demostrado que el mayor número de grandes velocidades (las mayores velocidades y el promedio más alto para las grandes velocidades), ocurre generalmente en las clases F y G. Como estas estrellas están, la mayor parte de ellas, más cerca de nosotros su brillo absoluto tiene que ser mucho menos que el de las primeras y últimas clases del mismo brillo aparentemente.

La causa de semejante dependencia sobre magnitud puede ser obscura, pero a primera vista parece ser muy probable que resulte de una de las dos causas siguientes :

A. Una diferencia en el tamaño ó densidad, ó los dos, en conjunción con alguna substancia resistente en el espacio.

B. Que las estrellas más débiles son aquellas que están más lejos de nosotros y más cerca de un lugar de acción de gravedad ó que han sido las más débiles bajo la acción de gravedad un tiempo más largo.

Es probable que la vía láctea esté muy comprometida en cualquiera de estos casos.

Observatorio nacional argentino, Córdoba.

C. D. PERRINE.

SOCIOS ACTIVOS *(Conclusión)*

González Litardo, Donato.
González Litardo, Justo.
González, Agustín.
Granero, Miguel.
Gradin, Carlos.
Gregorina, Juan.
Gegorini, Juan A.
Grieben, Arturo.
Grianta, Luis.
Groizard, Alfonso.
Guido, Miguel.
Guglialmelli, Luis C.
Gutiérrez, Ricardo J.
Guesalaga, Alejandro.
Guerrero, Mariano A.
Hauman Merck, Lucien.
Harrington, Daniel.
Herzfeld, Raúl.
Hermitte, Enrique.
Herrera Vega, Marcelino.
Herrero, Ducloux E.
Henry, Julio.
Hicken. Cristóbal M.
Hileman, Guillermo.
Holmberg, Eduardo L.
Hoyo, Arturo.
Huergo, Luis A. (hijo)
Huergo, Eduardo.
Huergo, José M.
Hughes, Miguel.
Ibarra, Luis de.
Iribarne, Pedro.
Iribarne, Julio.
Isbert, Casimiro V.
Issouribehere, Pedro J.
Isnardi, Vicente.
Israel, Alfredo C.
Iturbe, Miguel.
Ivanissevich, Ludovico.
Jesinghaus, Carlos.
Jurado, Ricardo.
Kock, Víctor.
Klein, Hermán.
Kreusberg, Jorge.
Kurt Hossens, Carlos.
Laclau, Narciso C.
Lafone Quevedo, Samuel A.
Labarthe, Julio.
Lahille, Fernando.
Landeira, Pedro, V.
Laporte, Luis B.
Lara, Juan B.
Larreguy, José.
Larco, Esteban.

Lathan Urtubey, Augusto.
Latzina, Eduardo.
Laub, Jacobo J.
Lavarello, Pedro.
Lea, Allan B.
Ledesma, Pedro M.
Leguizamón, Pondal Martno.
Lejeune, Luis M.
Lemos, Carlos.
Lepori, Lorenzo.
Leonardis, Leonardo de.
Lesage, Julio.
Letiche, Enrique.
Levylier, H. M.
Logarte, Ramón.
Lizer, Carlos.
López, Martín J.
Longobardi, Ernesto.
Lozano, Narciso, M.
Lozano, Nicolás.
Lugones, Arturo M.
Lucero, Octavio.
Luro, Rufino.
Ludwig, Carlos.
Lutscher, Andrés A.
Madrid, Enrique de.
Mégy, Luis A.
Magnin, Jorge.
Maligne, Eduardo.
Mallol, Emilio.
Mamberto, Benito.
Maradona, Santiago.
Marín, Plácido.
Marreins, Juan.
Marcó del Pont, E.
Marotta, Pedro.
Marino, Alfredo.
Martínez Pita, Rodolfo.
Marti, Ricardo.
Massini, Estéban.
Maupas, Ernesto.
Mattos, Manuel E. de.
Mazza, Aurelio F.
Mazza, Salvador.
Medina, José A.
Meoli, Gabriel.
Mercante, Victor.
Mercâu, Agustín.
Mermos, Alberto.
Merzwacher, Luis.
Meyer, Camilo.
Mignaqui, Luis P.
Millan, Máximo.
Molina y Vedia, Delfina.

Molina y Vedia, Adolfo.
Monge Muñoz, Arturo.
Molina, Waldino.
Molina Civit, Juan.
Morales, Carlos María
Moreno, Francisco P.
Moreno, Evaristo V.
Moreno, Josué F.
Morón, Ventura.
Möhring, Walther.
Mordeglia, Domingo.
Mormes. Andrés.
Morteo, Carlos F.
Mosconi, Enrique.
Mugica, Adolfo.
Narbondo, Juan L.
Nacher, Francisco.
Nágera, Juan José.
Navarro Viola, Jorge.
Natale, Alfredo.
Negri, Galdino.
Nelson, Ernesto.
Nelson, Enrique M.
Newton, Artemio R.
Niebuhr, Adolfo.
Nielsen. Juan.
Newbery, Jorge.
Newbery, Ernesto.
Noceti, Domingo.
Nogués, Domingo.
Nougues, Luis F.
Nouguier, Pablo.
O'Connor, Eduardo.
Ochoa. Arturo.
Ojeda, José T.
Olmos, Miguel.
Olivera, Carlos E.
Oliveri. Alfredo.
Orcoyen, Francisco.
Orús, José M.
Orús, Antonio (hijo).
Otamendi, Eduardo.
Otamendi, Rómulo.
Otamendi, Alberto.
Otamendi, Gustavo.
Otamendi, Belisario.
Outes, Felix F.
Padilla, José.
Padilla, Isaías.
Paita, Pedro J.
Paitoví Oliveras, Antonio.
Palacio, Emilio.
Palet, Luciano.
Panelo, Estéban.

Paoli, Humberto.
Paolera, Carlos M. della.
Parera Denis, Fortuno.
Parodi, Edmundo.
Pasman, Raúl G.
Pastore, Franco.
Paquet, Carlos.
Parckinson, Pedro P.
Paz, José M.
Pattó, Gustavo.
Pelosi, Elías.
Pelleschi, Juan.
Peralta Ramos, Enrique.
Pereyra, Emilio.
Pérez, Alberto J.
Pértile, José C.
Petersen, Teodoro H.
Pigazzi, Santiago.
Piana, Juan.
Piaggio, Antonio.
Pouyssegur, Hipólito B.
Podestá, Santiago.
Ponte, Federico N. del.
Pol, Víctor de.
Posadas, Carlos.
Puente, Guillermo A.
Pueyrredón, Carlos A.
Puiggari, Pío.
Puiggari, Miguel M.
Quiroga, Atanasio.
Quiroga, Modesto.
Rabinovich, Delfín.
Ranzenhoffer, Oscar.
Recagorri, Pedro S.
Rebuelto, Emilio.
Rebuelto, Antonio.
Retes, Antonio.
Repetto, Roberto.
Repetto, Nicolás.
Repossini, José.
Reyna Almandos, Luis.
Reyes, J. Miguel.
Riccheri, Pablo.
Risso Domínguez, Juan C.
Rivara, Juan.
Rivarola, Rodolfo.
Rodríguez, Aravena Santos.
Rodriguez de Vicente, Roman
Rodriguez Etchart, Carlos.
Rodríguez Larreta, Eduardo.
Roffo, Angel.
Roffo, Juan.
Rojas, Estéban C.
Rojas, Juan R.
Rom, Carlos A.
Romero, Julián.
Romero, Antonio.
Rossel Soler, Pedro A.
Rospide, Juan.
Rouge, Marcos.
Rubio, José M.
Rua, José M. de la.
Rumi, Tomás J.
Sabaría, Enrique.
Sabatini, Angel.
Sáenz Valiente, Eduardo.
Sáenz Valiente, Anselmo.
Sagastume, José M.
Sánchez Díaz, Abel.
Sánchez, Juan A.
Sánchez, Zacarías.
Sanromán, Iberio.
Santángelo, Rodolfo.
Segovia, Fernando.
Sáuze, Eduardo.
Sarhy, José S.
Sarhy, Juan F.
Saubidet, Alberto.
Scala, Augusto.
Schaefer, Guillermo F.
Schmiedel, O.
Seguí, Francisco.
Schneidewind, Alberto.
Selva, Domingo.
Sella, Federico.
Senet, Rodolfo.
Senillosa, Juan A.
Serra Renón, José.
Severini, Decio.
Silva, Angel.
Sires, Marcelo C.
Sirí, Juan M.
Sòldano, Ferruccio.
Sordelli, Alfredo.
Sorkau, Walther.
Suárez, Eleodoro.
Spinetto, Silvio.
Spinedi, Hermenegildo F.
Storni, Segundo.
Sunblad Rosetti, Gustavo.
Tamini Crannuel, L. A.
Tarelli, Carlos A.
Tejeda Sorzano, Carlos.
Tello, Eugenio.
Tieghi, Segundo.
Thedy, Héctor.
Toledo, Enrique A. de.
Tornquist, Adolfo.
Torres Armengol, M.
Torre, Bertucci Pedro.
Torrado, Samuel.
Traverso, Nicolás.
Ugarte, Trifón.
Uhart, Pedro.
Uriarte Castro, Alfredo.
Uriburu, Arenales.
Uriburu, David.
Vallebella, Colón B.
Vaccario, Pedro.
Vilar, Juan.
Valenzuela, Moisés.
Valentini, Argentino.
Valerga, Orente A.
Valiente Noailles, Luis.
Valle Iberlucea, Enrique del
Varela, Rufino (hijo).
Vassalli, Miguel E.
Vasquez de Navoa, Vicente.
Velasco, Salvador.
Vernengo, Roberto E.
Vico, Domingo.
Vignau, Pedro T.
Vidal, Antonio.
Videla, Baldomero.
Villanova Sanz, Florencio.
Virasoro, Valentín.
Vivot, Eduaro.
Volpatti, Eduardo.
Volpi, Carlos A.
Vucetich, Juan.
Wauters, Carlos
Windhausen, Anselmo.
Widakovich, Víctor.
Wernicke, Roberto.
Wernicke, Raúl.
White, Guillermo.
White, Guillermo J.
Wollenweide, Albino.
Zakrzewski, Bernardo.
Zamboni, Agustín.
Zamudio, Eugenio.
Zappi, Enrique V.
Zemborain, Saturnino (hijo).
Zelada, José.
Zuberbühler, Carlos E.
Zuleta, Enrique.

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

DIRECTOR : DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH

SEPTIEMBRE-OCTUBRE 1915. — ENTREGAS III-IV
TOMO LXXX

ÍNDICE



BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS
684 — CALLE PERÚ — 684
1915

## JUNTA DIRECTIVA

| | |
|---|---|
| *Presidente* | Ingeniero **Nicolás Besio Moreno** |
| *Vicepresidente 1º* | Ingeniero **Alberto D. Otamendi** |
| *Vicepresidente 2º* | Doctor **Guillermo Schaefer** |
| *Secretario de actas* | Ingeniero **Pedro A. Rossell Soler** |
| *Secretario de correspondencia* | Señor **José M. Orús** |
| *Tesorero* | Ingeniero **Juan José Carabelli** |
| *Protesorero* | Ingeniero **Emilio Mallol** |
| *Bibliotecario* | Profesor **José T. Ojeda** |
| *Vocales* | Ingeniero **Eduardo Huergo** |
| | Doctor **Claro C. Dassen** |
| | Doctor **Luciano P. J. Palet** |
| | Ingeniero **Anecto J. Bosisio** |
| | Ingeniero **Benno J. Schnack** |
| | Arquitecto **Raúl G. Pasman** |
| | Ingeniero **Enrique Butty** |
| | Doctor **Juan B. González** |
| *Gerente* | Señor **Juan Botto** |

---

## ADVERTENCIA

Los colaboradores de los *Anales*, que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos deben solicitarlo por escrito a la Dirección, la que le dará el tramite reglamentario. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con los editores señores Coni hermanos.

Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas.

Los manuscritos, correspondencia, etc., deben enviarse a la Dirección **Cevallos, 269**.

*Cada colaborador es personalmente responsable de la tesis que sustenta en sus escritos.*

**La Dirección.**

---

## PUNTOS Y PRECIOS DE SUBSCRIPCIÓN

**Local de la Sociedad, Cevallos 269, y principales librerías**

| | Pesos moneda nacional |
|---|---|
| Por mes | 1.00 |
| Por año | 12.00 |
| Número atrasado | 2.00 |
| — para los socios | 1.00 |

LA SUBSCRIPCIÓN SE PAGA ADELANTADA

**El local social permanece abierto de 3 á 7 y de 8 á 12 pasado meridiano**

# LA RADIACIÓN Y LA TEORÍA DE LOS QUANTA

Por CAMILO MEYER

*(Continuación)*

## SEGUNDA PARTE

## LA TEORÍA DE MAX PLANCK



### CAPÍTULO I

### LA LEY DE LA RADIACIÓN NEGRA

32. **Cuerpo negro. Ley de Stefan.** — En la introducción dimos á conocer que se puede fácilmente determinar la densidad de la luz en equilibrio en un recinto isotermo, mediante una ventanilla abierta en la pared de ésta; basta estudiar la radiación emitida por el orificio.

En efecto, si este es bastante pequeño, la perturbación que se verifica en la radiación interna por la influencia del mismo, se puede considerar como del todo despreciable. Resulta que la cantidad de luz que sale por segundo, siendo $\sigma$ la superficie del orificio, es igual a la cantidad $\sigma E$ que cae durante el mismo tiempo sobre cualquier porción superficial de la pared igual á $\sigma$.

Por otra parte, como por la abertura no se puede alumbrar el espacio interno de un modo sensible mediante un rayo proyectado desde afuera, pues éste, una vez adentro, se agota en seguida por reflexiones sucesivas sobre las paredes y no tiene ninguna probabilidad de volver á salir, estamos autorizados á considerar la pequeña abertura como un cuerpo *perfectamente negro*, conforme al sentido físico de la pala-

bra, ó sea si se admite que la característica de un cuerpo negro consiste en no devolver nada de la luz que recibe. Resulta que su poder absorbente es igual á 1, quedando su poder emisivo reducido al producto $\sigma E$ ya indicado.

Mediante un dispositivo experimental bastante sencillo se ha podido averiguar que el poder emisivo es proporcional á $T^4$, siendo T la temperatura absoluta del cuerpo negro, de modo que se tiene :

$$E = \alpha T^4 \qquad (1)$$

expresando esta relación la ley de Stefan, en la cual $\alpha$ designa una constante conocida con el nombre de constante de Stefan.

La misma relación nos enseña también que el poder emisivo E aumenta con rapidez, cuando se calienta el recinto : quedando la energía irradiada multiplicada por 16 cuando la temperatura se vuelve dos veces mayor.

Ahora bien, la ley de Stefan ha sido comprobada entre límites extensos de la temperatura, desde la liquefacción del aire hasta la fusión del hierro, y los sabios están de acuerdo para considerarla como rigurosa y no sólo como aproximada.

En un recinto rodeado de hielo fundente, cada centímetro cuadrado de *superficie negra* á la temperatura del agua hirviente pierde por minuto 1,05 caloría más del calor que recibe, ó sea una energía en *erg* :

$$E = 1{,}05 \,.\, 4{,}18 \,.\, 10^7 \text{ en 60 segundos}, \qquad (2)$$

lo que da por segundo :

$$E = \frac{1{,}05 \,.\, 4{,}18 \,.\, 10^7}{60} \cdot$$

De allí se deduce el valor de la constante $\alpha$ de Stefan :

$$\alpha = 6{,}3 \,.\, 10^{-5} \text{ unidades C. G. S.} \qquad (3)$$

Resulta que la densidad de la luz en equilibrio térmico para la temperatura absoluta T, proporcional al poder emisivo E, es proporcional á su vez á $T^4$ y tiene por expresión :

$$D = 8{,}4 \,.\, 10^{-15} \,.\, T^4. \qquad (4)$$

Este valor, muy pequeño en las temperaturas comunes, aumenta muy rápidamente.

Por último, el *calor específico del vacío,* ó sea la cantidad de calor necesaria para elevar de 1 grado la temperatura de la radiación contenida en un centímetro cúbico, aumenta proporcionalmente *al cubo* de la temperatura absoluta. En efecto, sabemos que este calor específico es la derivada de la densidad con respecto á T, ó sea :

$$C_{\phi}=\frac{dD}{dT}=4.8,4.10^{-15}.T^{3}=33,6.10^{-15}.T^{3}. \qquad (5)$$

33. **Composición de la luz emitida por un cuerpo negro.** — Se puede recibir sobre un prisma, ó mejor sobre la hendidura de un electroscopio, la luz compleja que sale por un pequeño orificio hecho en la pared de un recinto isotermo. Esta luz se comporta entonces como si fuera el resultado de la superposición de una infinidad continua de luces simples monocromáticas que tuvieran, cada una, una longitud de onda propia y dieran, al través del aparato, una imagen de la hendidura. La serie de estas imágenes ó rayas espectrales no ofrece ninguna interrupción y se presenta en la forma de una faja luminosa continua que resulta ser el espectro del cuerpo negro considerado. Sobra decir que este espectro no se limita á la parte visible, sino que comprende también infrarrojo y ultravioleta. Entonces se puede, por medio de pantallas, hacer penetrar en otro cuerpo negro receptor, actuando como calorímetro, la energía que corresponde sólo á una faja angosta del espectro en la cual la longitud de onda está comprendida entre $\lambda$ y $\lambda'$. La cantidad Q de energía recibida y dividida por $(\lambda'-\lambda)$ ha de tender hacia un limite I cuando, poniéndose la faja cada vez más angosta, $\lambda'$ tiende hacia $\lambda$. Este límite I define la intensidad de la luz de longitud de onda $\lambda$ en el espectro del cuerpo negro. Si llevamos en abscisa la longitud de onda y en ordenada el valor de I, obtendremos la *curva de la energía total* del espectro en función de la longitud de onda. De este modo, hace tiempo que se ha podido averiguar que la intensidad, despreciable para el infrarrojo y el extremo ultravioleta, pasa siempre por un máximo cuya posición varía con la temperatura y se desplaza hacia las pequeñas longitudes de onda, o sea hacia el ultravioleta, á medida que la temperatura del cuerpo negro va aumentando.

Observaremos que así no se tiene sino indicaciones cualitativas : pero otra ley más precisa se debe á Wien que consiguió demostrar que los principios de la termodinámica, sin suministrar la ley de repartición buscada, restringen mucho los términos posibles *a priori* para la expresión de ella. Según el raciocinio de Wien, el producto de la in-

tensidad por la quinta potencia de $\lambda$, como ya lo mencionamos, no depende sino del producto $\lambda T$, de modo que se puede escribir la ley de Wien como sigue, siendo I la intensidad :

$$I\lambda^5 = f(\lambda T)$$

de donde :

$$I = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T), \qquad (1)$$

designando $f$ á una función que es preciso determinar.

Por otra parte, ya sabemos como, en la teoría cinética de los gases, se obtiene para $f$ una función líneal.

Pero, si la curva de repartición presenta, como acabamos de verlo, un máximo para una temperatura dada, tiene que presentar otro para cualquier temperatura distinta, y la posición de este máximo varía en razón inversa de la temperatura absoluta, lo que significa que, si se representa por $\lambda_M$ y $\lambda'_M$ las longitudes de onda que corresponden a los máximos para las temperatnras absolutas T, T' respectivas, podemos escribir :

$$\lambda_M T = \lambda'_M T' = \text{const.} \qquad (2)$$

En efecto, se ha podido averiguar experimentalmente que el producto $\lambda_M T$ es constante, teniéndose sensiblemente :

$$\lambda_M T = 0.29.$$

Resulta que, á los 2900°, temperatura poco inferior á la del arco eléctrico, la intensidad máxima corresponde á una longitud de onda igual á un *micron* y se halla aún en el infrarrojo. Para una temperatura de 6000° que sería la de un cuerpo negro colocado en el sitio del sol y dando tanta luz como él, la intensidad máxima se hallaría en el amarillo.

Así la posición del máximo queda determinada mediante la ley de Wien.

De la misma se deduce también que la intensidad máxima es proporcional á la quinta potencia de la temperatura absoluta, ó sea 32 veces mayor por ejemplo á los 2000° que á los 1000°.

Pero había que resolver otra dificultad que consiste en dar á la función $f$ una forma distinta de la lineal, deducida de la teoría cinética y dando cuenta satisfactoria de la curva de intensidad. Max Planck, profesor de física teórica de la Universidad de Berlín, propuso en 1906

una expresión de I que corresponde con exactitud á todas las medidas efectuadas por Lummer, Kurlbaum, Paschen, Rubens, Warburg, en un dominio que se extiende de los 1000° á los 2000° en cuanto á las temperaturas, y de $60\mu$ á $\frac{1}{2}\mu$, en cuanto á las longitudes de onda. Esta expresión es la siguiente:

$$I = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

siendo $c_1$ y $c_2$ dos constantes, y $e$ la base de los logaritmos neperianos.

34. **Base de la teoría de Planck.** — Para dar una idea clara del punto de partida de los trabajos del físico prusiano, me parece que lo mejor es analizar el principio de la memoria que presentó en 1911 á la Conferencia reunida en Bruselas bajo los auspicios del gran industrial belga E. Solvay.

La fórmula anterior se puede escribir:

$$u_\lambda d\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \qquad (1)$$

siendo $u_\lambda d\lambda$ la densidad de la energía de la radiación negra entre las longitudes de onda $\lambda$ y $(\lambda + d\lambda)$. Si no es rigurosamente exacta, su validez es suficiente como para decir que, con ella, se pudo por la primera vez conseguir una expresión cómoda de los hechos experimentales.

Al contrario, con Jeans y lord Rayleigh, se tenía:

$$u_\lambda d\lambda = \frac{cT}{\lambda^5} \lambda d\lambda. \qquad (2)$$

Ahora bien, para los valores grandes del producto $\lambda T$, las expresiones (1) y (2) se vuelven idénticas, mientras existe entre ellas para los pequeños, una discrepancia muy notable.

Planck principia por observar que la cuestión planteada es de saber cómo la teoría se puede poner de acuerdo con los hechos, y, para ello, da un resumen rápido de las investigaciones proseguidas con este objeto. Primero la teoría de Jeans que trata de subsanar la contradicción con la hipótesis de que la magnitud medida en la relación (1) no

corresponde á la radiación negra normal. Para el físico inglés, la energía irradiada que sale por un pequeño orificio abierto en un recinto isotermo no corresponde á la radiación en equilibrio en un ambiente completamente aislado, pues, en este caso, la densidad de la radiación debería, según la fórmula (2), crecer indefinidamente á medida que disminuye la longitud de onda. Al considerar así las cosas, ya no se puede tratar de una repartición espectral determinada de una cantidad finita de energía radiante en equilibrio, pues la integral de la ecuación (2) sería infinita, si se le asignara todas las longitudes de onda por campo de integración. Es menester admitir que el fenómeno observado corresponde á una transformación continua en la cual la energía radiante interna pasa constantemente de las grandes longitudes de onda á las pequeñas, pero con tal lentitud que las radiaciones recientemente formadas tienen siempre tiempo suficiente para salir al través de las paredes, de modo que se establece algo como un estado estacionario de transformación cuyos caracteres varían de un caso á otro. Estas son efectivamente las ideas de Jeans, cuya imagen este sabio encuentra en los depósitos de agua comunicantes con escapes apropiados.

Pero, objeta Planck, ningún hecho experimental puede justificar aquel concepto extraño, mientras lo contradicen muchas observaciones, entre las cuales se encuentra la opacidad prácticamente absoluta de las paredes usadas en las mediciones, y también el hecho de que la radiación observada no depende de la naturaleza de las substancias contenidas en el recinto aislado ó formando las paredes. Por este motivo, prosigue Planck, la hipótesis de Jeans no ha tenido aceptación entre los sabios. Pero casi todas las investigaciones, en cuanto á la teoría de la radiación, tienen por fundamento la hipótesis, debida á Kirchhoff y Boltzmann y verificada por Wien y Lummer, de un verdadero estado de equilibrio, en el sentido termodinámico de la palabra, dentro de un recinto isotermo. Desde este punto de vista veremos colocarse á Planck continuamente para fundar su nueva teoría.

Una confirmación importante de aquella hipótesis de Kirchhoff, la encontramos en la averiguación experimental de todas las consecuencias conseguidas por la aplicación á este equilibrio de las leyes termodinámicas y electrodinámicas. Algunas de aquellas consecuencias son especialmente notables y fecundas, como por ejemplo la ley de la radiación total de Stefan-Boltzmann :

$$\int_0^\infty u_\lambda d\lambda = c\mathrm{T}^4 \tag{3}$$

y la del desplazamiento de Wien :

$$u_\lambda d\lambda = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T) d\lambda, \tag{4}$$

observando que la relación (4) es compatible con la (2) y con la (1), mientras la ley de Stefan-Boltzmann está en contradicción con la misma relación (1).

Pero observaremos que la aplicación de los principios generales de la termodinámica y de la electrodinámica no puede llevarnos más allá de la ley de desplazamiento de Wien, la forma de la función $f$ no pudiendo ser determinada sino por un análisis más profundo del mecanismo molecular de la emisión y absorción de la radiación. Sin embargo podemos prever casi con toda seguridad que todos los métodos han de llevarnos á la ley de radiación de Jeans, al menos mientras los movimientos y las fuerzas que actúan entre las moléculas y los electrones se calculen mediante los principios clásicos de la dinámica y electrodinámica.

Resulta que, para librarnos de la ley de la radiación expresada por la relación (2), es imprescindible introducir en la teoría clásica una modificación fundamental mediante un concepto nuevo de la *significación dinámica* de la temperatura. En efecto, según la relación (2), la energía de la radiación es, para toda longitud de onda, proporcional a la temperatura, mientras según (1), cuando la temperatura toma valores infinitamente pequeños del primer orden, la energía de la radiación es infinitamente pequeña *del orden infinito*.

35. **Definición general de la temperatura.** — La relación general entre la energía y la temperatura no puede ser definida sino por condiciones de probabilidad. Supongamos, pues, que dos sistemas físicos, cuyo estado se define por un número muy grande de variables independientes, puedan experimentar intercambio de energía ; estarán en equilibrio estadístico cuando otro cambio de energía no corresponda ya á ningún incremento de la probabilidad.

Por consiguiente, si $W_1 = f(E_1)$ es la probabilidad para que el primer sistema goce de la energía $E_1$ y $W_2 = \varphi(E_2)$ la probabilidad para que el otro tenga la energía $E_2$, para que los dos sistemas tengan respectivamente las energías $E_1$ y $E_2$, la probabilidad resultará :

$$W = W_1 W_2 \tag{1}$$

y la condición para que se verifique el máximo de esta magnitud será:

$$d(W_1 W_2)=0$$

ó bien:

$$dW_1 . W_2 + dW_2 . W_1 = 0,$$

lo que da también:

$$\frac{dW_1}{W_1} + \frac{dW_2}{W_2} = 0. \quad (2)$$

Por otra parte, no hemos de olvidar que debemos tener:

$$E_1 + E_2 = \text{const.}$$

de donde:

$$dE_1 + dE_2 = 0.$$

Resulta como condición general del equilibrio estadístico:

$$\frac{dW_1}{W_1} = -\frac{dW_2}{W_2}$$

$$dE_1 = -dE_2 \quad (3)$$

y, por lo tanto, dividiendo miembro á miembro:

$$\frac{1}{W_1}\frac{dW_1}{dE_1} = \frac{1}{W_2}\frac{dW_2}{dE_2}$$

$$\frac{1}{W_1}\frac{dW_1}{dE_1} - \frac{1}{W_2}\frac{dW_2}{dE_2} = 0. \quad (4)$$

Pero la condición termodinámica del equilibrio consiste en el hecho de que los dos sistemas han de encontrarse á la misma temperatura, y es preciso que se tenga:

$$\frac{dE_1}{T} = -\frac{dE_2}{T}$$

de donde:

$$\frac{d(E_1 + E_2)}{T} = 0,$$

ó bien:

$$\frac{dE}{T} = 0. \quad (6)$$

Identificándose esta condición con la relación (2):

$$\frac{dW_1}{W_1} + \frac{dW_2}{W_2} = 0.$$

se tiene:

$$\frac{dE}{T} = \frac{dW_1}{W_1} + \frac{dW_2}{W_2} = d(\log W_1) + d(\log W_2) = d \log (W_1 W_2)$$

lo que se puede escribir también:

$$\frac{dE}{T} = d(\log W);$$

de donde:

$$\frac{1}{T} = \frac{d(\log W)}{dE} \tag{7}$$

ó más exactamente:

$$\frac{1}{T} = k \frac{d(\log W)}{dE}, \tag{8}$$

siendo $k$ una constante universal que depende sólo de las unidades elegidas para medir la energía y la temperatura.

Se ve con esta fórmula que es la definición general de la temperatura, que la busca de las leyes de la radiación negra queda reducida al cálculo de la probabilidad W para que la energía de la radiación tenga un valor determinado E, y así se vislumbra ya la cuestión fundamental de la cual depende la solución de todo el problema.

36. **Hipótesis de las cantidades elementales de acción.** — La probabilidad para que una magnitud tome un valor dado al variar de un modo continuo se obtiene cuando se puede definir *dominios elementales de igual probabilidad.*

La probabilidad para que un sistema físico definido por un gran número de variables goce de una energía E queda así expresada por el número de reparticiones, compatibles con la energía E, de las variables independientes del sistema entre los distintos dominios elementales de probabilidad igual.

En la dinámica clásica, para determinar estos dominios elementales, podemos valernos del teorema en virtud del cual dos estados de un sistema que suceden necesariamente el uno al otro, conforme a las leyes del movimiento, tienen la misma probabilidad. Si designamos por $q$ una de aquellas coordenadas generalizadas, de las cuales depen-

de el estado del sistema y por $p$ la derivada $\frac{dT}{dq}$, conforme á la transformación de Poisson, el teorema de Liouville nos enseña que el dominio :

$$\int\int dqdp,$$

tomado á una época dada, no varía con el tiempo si las variaciones de las $q$ y $p$ quedan determinadas por las ecuaciones de Lagrange y Hamilton. Por otra parte, á cualquier época, las $q$ y $p$ pueden tomar por separado todos los valores posibles. Resulta por lo tanto que el dominio elemental de las probabilidades es infinitamente pequeño y tiene una extensión igual á :

$$dpdq. \tag{1}$$

Si, con esto sentado, calculamos la probabilidad W para que la densidad de energía en la radiación negra sea $u_\lambda$, para la longitud de onda $\lambda$, llegamos otra vez por aplicación de la ecuación de definición de la temperatura :

$$\frac{1}{T} = k\frac{d(\log W)}{dE}$$

á la ley de la radiación de Jeans.

Hemos, pues, de evitar este resultado y arreglar para que se pueda obtener la relación :

$$u_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}, \tag{2}$$

única de acuerdo con los resultados experimentales.

Para ello, no hay otro procedimiento que el de modificar la expresión (1) mediante una hipótesis física conveniente, y es menester examinar más detenidamente lo que se verifica á las temperaturas bajas ó para las pequeñas longitudes de onda, puesto que en estos casos aparece más claramente la discrepancia entre la fórmula (2) y la de la radiación de Jeans, el valor dado por ésta :

$$u_\lambda = \frac{cT}{\lambda^4}$$

quedando entonces muy grande con respecto á (2).

Para longitudes de onda infinitamente pequeñas $u_\lambda$, según (3), se pone *infinitamente grande del cuarto orden,* y según (2), al contrario, *infinitamente pequeña de orden infinito,* tomando un valor de la forma :

$$\frac{A}{\infty}$$

Este resultado se debe al hecho de que, para las longitudes de onda decrecientes, ó sea para las frecuencias crecientes, el número de las variables independientes ó, lo que es equivalente, el número de los grados de libertad que corresponden á un intervalo dado de longitud de onda $d\lambda$ *aumenta fuera de todos límites.*

Por consiguiente la nueva hipótesis se debe elegir de modo que se introduzcan ciertas limitaciones en los sistemas de valores posibles de las variables $p$ y $q$, admitiéndose por ejemplo que están parcialmente ligadas, ó que experimentan *variaciones discontinuas.* En resumen es menester reducir el número de los dominios independientes *dpdq* de igual probabilidad, y se puede conseguir este objeto haciendo crecer *la extensión de cada uno de aquellos.*

Ahora bien, la hipótesis de las cantidades elementales de acción realiza este cambio en una forma precisa si, en vez de dominios elementales infinitamente pequeños *dpdq,* se introducen dominios *finitos* cuya extensión está representada por una integral constante :

$$\int\int dqdp = h.$$

siendo $h$ la cantidad elemental de acción, ó sea una constante universal cuyas *dimensiones* son una energía por un tiempo.

Si se toma para el cálculo de la probabilidad W de una densidad de energía $u_\lambda$, en vez del infinitamente pequeño *dqdp,* la cantidad finita $h$, se obtiene por aplicación de las relaciones :

$$u_\lambda d\lambda = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T) d\lambda,$$

$$\frac{1}{T} = k \frac{d \log W}{dE},$$

la fórmula (2) y no la de Jeans, encontrándose así la ley teórica de la radiación otra vez en concordancia con los resultados experimentales.

37. **Significación física de la constante $h$.** — Antes de detenernos en el examen de los cálculos, es conveniente como lo hace Planck, de buscar la significación física de esta constante notable.

Es pues de primera importancia añadir algo al principio de que el dominio elemental de probabilidad tiene una extensión finita y constante, y es menester encontrar las relaciones que existen entre el *quantum* de acción $h$ y otras constantes físicas, debiendo dichas relaciones servir á definir y á ampliar al propio tiempo su significación.

Por lo pronto tropezamos con una cuestión de principio: se trata de saber si el elemento de acción $h$ tiene una significación física en cuanto á la propagación de la energía radiante en el vacío, ó si por su misma naturaleza no interviene sino en los fenómenos de producción y destrucción de energía radiante, ó sea en la emisión y absorción. Es claro que, según la solución dada á esta cuestión preliminar, los desarrollos ulteriores habrán de tomar rumbos muy distintos.

Veremos más adelante que la primera solución fué adoptada por Einstein en su hipótesis de los *quanta de luz* y también por otros físicos.

Según esta hipótesis, la energía de un rayo luminoso de frecuencia $\nu$ no está distribuída en una forma continua en el espacio, sino que se propaga en línea recta por *quanta* determinados de magnitud $h\nu$, como las partículas luminosas en la teoría de la emisión de Newton. Para justificar la hipótesis, se señala el hecho de que la velocidad de los rayos catódicos secundarios engendrados por los de Röntgen es independiente de la intensidad de los mismos.

El profesor J. J. Thomson fué llevado á un concepto análogo por el estudio de los fenómenos fotoeléctricos y le pareció imposible explicar el número pequeño de electrones emitidos y la independencia entre su velocidad y la intensidad de la luz incidente, sin admitir, en vez de una repartición uniforme de la energía sobre el frente de las ondas luminosas, acumulaciones locales de la misma energía. Es indudable, por otra parte, que estas hipótesis no se pueden conciliar con las ecuaciones de Maxwell ni con las demás teorías electromagnéticas de la luz, actualmente conocidas. En efecto, todas suponen que la perturbación más mínima se propaga en el espacio, sino con la misma intensidad en todas las direcciones, al menos con una distribución continua sobre esferas concéntricas, cuyo radio va aumentando con la velocidad de la luz. Y cuando se tiene en cuenta la confirmación experimental completa que encontró la electrodinámica de Maxwell en el estudio de los fenómenos de interferencia más sutiles, cuando se

consideran las dificultades extraordinarias que engendraría el hecho de abandonarla en cuanto á la teoría total de los fenómenos eléctricos y magnéticos, cada sabio no puede sin repugnancia resolverse á derrumbar un edificio tan armonioso cuya construcción costó tanto trabajo.

Por esto mismo, Planck vaciló á introducir desde luego los quanta de luz, y sin embargo veremos más adelante como Lorentz pudo modificar su teoría y ponerla de acuerdo con la del físico de Berlín.

Veamos ahora el desarrollo que da Planck á su hipótesis del *quantum* de acción en el estudio de la radiación.

38. **Explicación de la radiación mediante la hipótesis de los resonadores.** — Admite primero que todos los fenómenos que se verifican en el vacío, son regidos por las ecuaciones de Maxwell, que, por otra parte, no tienen ninguna relación directa con el *quantum* de acción *h*. De esto resulta que la radiación térmica, encerrada en un *recinto vacío* de paredes perfectamente reflectoras, ha de conservar indefinidamente su repartición inicial de energía en el espectro. Por otra parte, es inadmisible suponer que dicha repartición evoluciona lentamente hacia la de la radiación negra. En efecto, aquí aparece una diferencia fundamental entre la teoría de la radiación y la teoría cinética de los gases.

Para un gas encerrado en un recinto, una distribución inicial arbitraria de las velocidades se transforma con el tiempo y se convierte en la distribución más probable conforme á la ley de Maxwell. La diferencia procede del hecho de que las moléculas del gas experimentan choques, mientras *las radiaciones se atraviesan*. Ahora bien, el resultado de los choques no se puede calcular sino por los métodos de probabilidad, mientras estos cálculos no son aplicables á la radiación en el vacío, pues cada haz de rayos en este ambiente conserva siempre la energía inicial que le es comunicada de una vez cuando se produce la emisión y no puede después ser modificada sino por una absorción ó emisión nueva. Luego si una distribución cualquiera de la energía se conserva indefinidamente en el vacío absoluto, por otra parte la introducción de la menor cantidad de una substancia capaz de absorber ó de emitir basta para modificar progresivamente la composición de la radiación y transformarla en *radiación negra* indefinidamente estable. Desde este punto de vista pues, no se podría calcular la probabilidad de la energía radiante, sin recurrir al fenómeno mismo de la emisión, lo que nos obliga á efectuar un examen detenido del mecanismo de la emisión y absorción del calor radiante.

Como, según Kirchhoff, la intensidad de la radiación negra encerrada en un recinto es independiente de la substancia emisora ó absorbente, hemos de admitir que todo mecanismo compatible con los principios de la termodinámica y de la electrodinámica puede suministrarnos una expresión correcta para la composición de la radiación negra. Ahora bien, el sistema radiante más sencillo, lo representa un oscilador ó resonador eléctrico rectilíneo de período propio definido, tal como un electrón que se mueve sobre una recta cuyo uno de los puntos lo atrae proporcionalmente á la distancia.

Se sabe que, según las teorías de Maxwell y Lorentz, su energía es de la forma:

$$E = \frac{1}{2} A q^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \qquad (1)$$

siendo $q$ el momento eléctrico del oscilador, A y $m$ constantes positivas.

Por otra parte, su movimiento es periódico, y si se designa por $\nu$ la frecuencia del mismo, se tiene:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{m}}. \qquad (2)$$

Recordemos ahora la expresión:

$$h = \int dp dq. \qquad (3)$$

Las relaciones anteriores nos permiten calcular la magnitud de la energía $\varepsilon$ que corresponde á un dominio elemental de probabilidad, ó sea á la magnitud del *quantum* de acción $h$.

Apliquemos la integral (3) a los límites E y $(E + \varepsilon)$, y tendremos:

$$h = \int_E^{E+\varepsilon} dp dq. \qquad (4)$$

Por otra parte, se tiene según la transformación de Poisson y Hamilton:

$$p = \frac{dT}{dq'} = \frac{dE}{dq'} = m\frac{dq}{dt} = mq',$$

de donde:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{p^2}{m^2} \qquad \frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}.$$

lo que da al substituír en (1):

$$E=\frac{1}{2}Aq^2+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}. \tag{5}$$

Si se toman $q$ y $p$ por coordenadas, se ve que la integral doble (4) representa la superficie comprendida en el plano de los ejes entre la elipse:

$$E=\text{const.}$$

y la elipse:

$$E+\varepsilon=\text{const.}$$

El área de la primera tiene por expresión:

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{A}}$$

y el área de la segunda:

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{A}}+2\pi\varepsilon\sqrt{\frac{m}{A}}$$

lo que da para la diferencia:

$$h=2\pi\sqrt{\frac{m}{A}}.\varepsilon.$$

Pero tenemos según la relación (2):

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{m}},$$

de donde:

$$h=2\pi\sqrt{\frac{m}{A}}\cdot\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\nu}. \tag{6}$$

Para un oscilador de frecuencia propia dada $\nu$, hay pues elementos determinados de energía:

$$\varepsilon=h\nu, \tag{7}$$

lo que significa que la probabilidad de un valor determinado de la energía no depende sino del número de los elementos que contiene esta energía.

Tenemos ahora que resolver la cuestión de saber cómo debemos

interpretar físicamente los *elementos de energía*, ó sea cual es la ley dinámica que ha de servir de fundamento á las vibraciones del resonador, si queremos volver á encontrar la ley estadística más arriba enunciada.

Pero lo más sencillo que podemos suponer es admitir que la energía del resonador corresponde siempre á un *múltiplo entero* del elemento de energía $h\nu$. Con esta hipótesis es bastante fácil calcular la probabilidad para que un sistema compuesto de un gran número N de oscilaciones idénticas encierre una energía dada $E_N$. En efecto, si P designa el número de los elementos de energía contenidos en la energía total $E_N$, ó sea si se tiene :

$$P = \frac{E_N}{\varepsilon} = \frac{E_N}{h\nu} \tag{8}$$

la probabilidad buscada W se mide por el número de modos distintos de que se dispone para repartir los resonadores entre los dominios de energía correspondientes á los múltiplos enteros de $\varepsilon$, y aquel número es igual al de las reparticiones de P elementos de energía entre N resonadores, siempre que se tenga en cuenta sólo el número y no la individualidad de los elementos de energía que recibe un resonador en cada distribución considerada; de donde resulta para la probabilidad :

$$W = \frac{(N+P)!}{N!\,P!} = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N . P^P}, \tag{9}$$

expresión cuyo primer término representa el número de las permutaciones con repetición que se pueden formar con $(N+P)$ objetos descompuestos en N y P objetos respectivamente iguales :

Recordaremos ahora la relación que da la temperatura :

$$\frac{1}{T} = K\frac{d \log W}{dE} \tag{10}$$

y también :

$$P = \frac{E_N}{h\nu} \tag{8}$$

de donde :

$$E_N = Ph\nu.$$

Combinando las tres relaciones (8), (9) y (10), Planck acaba por encontrar la expresión de $E_N$:

$$E_N = \frac{Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \quad (11)$$

y, como lo observa el físico de Berlín, se puede llegar al mismo resultado de varias maneras distintas.

Admitiremos pues como verificada la relación (11) y veremos como Planck, partiendo de esta base, puede llegar á la ley de la radiación negra en una forma susceptible de averiguación experimental.

La fórmula da la relación entre la energía de los resonadores y la temperatura. Por lo tanto, hay que determinar la relación entre la energía media de uno de los resonadores :

$$\frac{E_N}{N} = \overline{E}$$

y la densidad $u_\nu$ de la energía correspondiente á la frecuencia del resonador para la radiación actual en el espacio.

Ahora bien, según las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell, se tiene :

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{V^3} \overline{E} d\nu \quad (12)$$

y se deduce para la ley de la radiación negra :

$$u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi h\nu^3}{V^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} = \frac{8\pi h V}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hV}{KT\lambda}} - 1} \quad (13)$$

siendo V la velocidad de la luz. Esta relación es exactamente de la misma forma que la ley experimental que nos sirvió de punto de partida :

$$u_\lambda d\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

en la cual se tendría :

$$c_1 = 8\pi h V.$$

$$c_2 = \frac{hV}{K}$$

siendo ésta la que da cuenta del modo más satisfactorio de los resultados obtenidos mediante las mediciones efectuadas.

Tal es la exposición de Planck, resumida y condensada en la forma más sencilla. Como él mismo lo confiesa, el cálculo se podría hacer de varios modos: en virtud del carácter algo delicado del análisis anterior, cuyos desarrollos no dimos por otra parte con todos los detalles, me parece interesante exponer ahora otro método desarrollado por Edmundo Bauer en una conferencia dada por él bajo el patronato de la Société française de physique.

39. **Otro procedimiento para llegar teóricamente á la fórmula de la radiación negra verificada experimentalmente.** — Consideremos un recinto isotermo en forma de paralelepípedo de paredes perfectamente reflectoras, y supongamos que contiene N osciladores de Planck de frecuencia dada $\nu$ y $N_0$ moléculas materiales de un gas que servirá de termómetro.

La energía total se repartirá entre las moléculas, los osciladores y los grados de libertad del éter. El equilibrio estadístico se verificará cuando dicha repartición haya tomado su forma más probable. Por otra parte, del punto de vista energético, los grados de libertad del éter son comparables exactamente á los osciladores, y su energía se presenta como una suma de dos cuadrados, pudiéndose comparar la energía electromagnética á la cinética y la energía electrotástica á la potencial.

Existe de cierto modo, según la imagen acertada de Edmundo Bauer, entre un oscilador de Planck y el recinto estudiado por Jeans, una relación análoga á la que se observa entra un diapasón que emite un sonido absolutamente puro y un tubo sonoro de forma paralelepipédica.

Antes de proseguir esta análisis, vamos primero á resumir la doble hipótesis de Planck.

1° La energía de un resonador de frecuencia $\nu$ no puede ser sino un múltiple entero de la magnitud:

$$\varepsilon = h\nu;$$

2° Todo se verifica como si las cantidades $\varepsilon$ se repartiesen al azar entre los varios resonadores de igual frecuencia, lo que equivale á decir que el punto representativo del resonador á una época dada no se puede hallar sino en una ú otra de las dos elipses de Planck, las cuales están separadas por una porción del plano cuya área es siempre constante é igual á $h$. De este modo se puede enunciar en una forma

concisa la hipótesis de los quanta observando que el punto representativo puede ubicarse con probabilidades iguales en una ú otra de las dos curvas.

La misma hipótesis se generaliza en seguida á los grados de libertad del éter cuya frecuencia está infinitamente vecina de $\nu$, pues su energía procede toda de los resonadores, que no han podido perderla sino mediante la emisión de uno ó varios quanta. Con esto hemos de admitir, del punto de vista estadístico como del punto de vista energético, que los grados de libertad del éter han de considerarse como si fueran resonadores de frecuencia $\nu$, y ya se ve, de acuerdo con el deseo de Planck, que tal hipótesis no está en pugna con la validez de las ecuaciones de Maxwell en cuanto á la propaganda libre de las ondas, pues no se refiere sino á los intercambios de energía entre la materia, los resonadores y el éter.

Admitiremos pues que las moléculas materiales actúan como las de un gas común, y tendremos que determinar la distribución más probable de la energía E del recinto entre los resonadores de frecuencia $\nu$, las moléculas y los grados de libertad del éter.

Primero es menester recordar la fórmula de la teoría cinética de los gases, en la cual el número de las partículas cuyas componentes de velocidad están comprendidas entre $\xi$ y $(\xi+d\xi)$ es dado por la relación :

$$N = f d\tau,$$

siendo $d\tau$ el elemento de volumen.

Si se designan por $x$, $y$, $z$ las coordenadas de las moléculas y si se introduce la condición de que se encuentren siempre comprendidas entre $x$, $y$, $z$ y $(x+dx)$ $(y+dy)$ $(z+dz)$, se tiene un hiperespacio de seis dimensiones en el cual $d\tau$ será un elemento de volumen de dimensiones:

$$dx,\ dy,\ dz,\ d\xi,\ d\eta,\ d\zeta$$

que se podría llamar, según Gibbs, *elemento de extensión en fase*. Con esto, $f$ designa la densidad de las moléculas en aquel espacio ó *densidad en fase*. Para cada distribución en fase de las moléculas representadas por una función dada $f$, Boltzmann calculó que corresponde una probabilidad determinada $W_0$ suministrada por la relación :

$$\log W_0 = -\int f . \log f . d\tau + \text{const.}, \qquad (1)$$

comprendiendo el campo de integración á todas las fases posibles.

No daremos este cálculo estadístico que nos llevaría fuera de los límites que nos hemos fijado en la presente monografia.

Por otra parte, podemos suponer $N_0$ resonadores de frecuencia $\nu$ y buscar la probabilidad $W_1$ de la repartición de cierto número de quanta de energía idénticos entre dichos resonadores, de modo que entre ellos haya $P_0$ que no contengan ningún quantum, $P_1$ que contengan uno solo, $P_2$ dos, y así sucesivamente hasta $P_n$ que contengan $n$.

Este problema de probabilidad ha sido resuelto por Boltzmann en un caso análogo relativo á una distribución de puntos de velocidades distintas en varios elementos de volumen (t. I, pág. 39), de modo que, con el mismo procedimiento de cálculo, se obtiene para $W_1$ :

$$W_1 = \frac{N_0!}{P_0!\, P_1! \dots P_n!} \tag{2}$$

ó sea un número de permutaciones con repetición de $N_0$ objetos tales que se tenga :

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = N_0.$$

Ahora bien, según una fórmula conocida debida á Stirling, se tiene, tomando el logaritmo de $W_1$ :

$$\log W_1 = -\Sigma P_n \log P_n + \text{const.}, \tag{3}$$

comprendiendo la suma á todas las P, ó sea á todos los grupos posibles de resonadores cuya frecuencia es igual á $\nu$.

Si el recinto contiene resonadores de frecuencias distintas, á cada una de estas, $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots \nu_n$ va á corresponder para la probabilidad un término análogo á (3), de modo que el logaritmo de la probabilidad total sea igual á la suma de todos los términos :

$$\log W_1 = -\sum_{P}\sum_{\nu} P_n \log P_n + \text{const.} \tag{4}$$

Ahora podemos considerar los grados de libertad del éter y aislar los que tienen frecuencias comprendidas entre $\nu$ y $(\nu + d\nu)$. Según la teoría cinética, el número de ellos es dado por la expresión :

$$N_2 = \frac{8\pi V \nu^2 d\nu}{c^3}$$

siendo $c$ la velocidad de la luz y V el volumen del recinto considerado.

Pero estos grados de libertad no podrán intercambiar energía, sino con los resonadores de frecuencia $\nu$ en forma de quanta $\varepsilon$ determinados cada uno por la expresión:

$$\varepsilon = h\nu.$$

Una repartición dada de cierto número de estos quanta entre los $N_2$ resonadores ó grados de libertad del éter estará definida por los números:

$$P_0', P_1' \dots P_n'$$

de los que comprenden:

$$0, 1, 2, 3, \dots n \text{ quanta}.$$

Aplicando pues la fórmula (3) se tendrá para el logaritmo de la probabilidad correspondiente:

$$-\Sigma P_n' \log P_n' + \text{const}.$$

y, como el recinto comprende grados de libertad relativos á todas las frecuencias posibles, se tendrá análogamente á lo que se tenía para los resonadores materiales:

$$\log W_2 = -\sum_{P'}\sum_{\nu} P_n' . \log P_n' + \text{const}. \qquad (6)$$

comprendiendo la primera suma á todos los grados de libertad P' de frecuencia $\nu$ y la segunda á todas las frecuencias posibles.

Admitamos ahora, como es lógico, que las tres probabilidades $W_0$, $W_1$, $W_2$ son indepedientes la una de la otra, y sea W la probabilidad de un estado dado dentro del recinto, se tendrá:

$$W = W_0 . W_1 . W_2$$

de donde:

$$\log W = -\int f \log f . d\tau - \Sigma\Sigma P_n . \log P_n - \Sigma\Sigma P_n' . \log P_n' + C. \qquad (7)$$

Para tener la probabilidad máxima, basta igualar á cero la variación de $W_1$ obtenida modificando infinitamente poco la forma de la función $f$ y también los números P y P', lo que da:

$$0 = \delta \log W = \int (1 + \log f)\delta f . d\tau + \Sigma\Sigma(1 + \log P_n)\delta P_n + + \Sigma\Sigma(1 + \log P_n')\delta P_n'. \qquad (8)$$

Observemos ahora que los números $N_0$, $N_1$, $N_2$, de las moléculas, de los resonadores y de los grados de libertad del éter que corresponden á cada frecuencia $\nu$ son constantes y no dependen sino de la forma y naturaleza del recinto y de los cuerpos que éste contiene. Luego se puede escribir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int f d\tau = N_0 \\ \Sigma P_n = N_1 \\ \Sigma P_n' = N_2 \end{array} \right. \tag{9}$$

y resulta que, si queremos satisfacer á la ecuación (8) cualquiera sea la variación $\delta$ Log W, se ha de tener:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \delta f d\tau = 0 \\ \Sigma \delta P_n = 0 \\ \Sigma \delta P_n' = 0, \end{array} \right. \tag{10}$$

correspondiendo los sistemas (9) y (10) á un número infinito de sistemas de dos ecuaciones cada uno, que se refieren á todas las frecuencias posibles.

Sentados los resultados suministrados por las fórmulas que anteceden, nos corresponde ahora expresar la condición de que la energía interna del recinto queda constantemente igual á E.

Sea pues $w$ la energía de una molécula cuyas coordenadas están comprendidas entre $x$, $y$, $z$, y $(x+dx)$, $(y+dy)$, $(z+dz)$, mientras las componentes de velocidad están entre $\xi$, $\eta$, $\zeta$ y $(\xi+d\xi)$, $(\eta+d\eta)$, $(\zeta+d\zeta)$. Se tiene primero para la expresión de E:

$$E = \int w f d\tau + \Sigma\Sigma n \varepsilon P_n + \Sigma\Sigma n \varepsilon P_n', \tag{11}$$

lo que da para la variación:

$$\delta E = \int w \delta f d\tau + \Sigma\Sigma n \varepsilon \delta P_n + \Sigma\Sigma n \varepsilon \delta P_n' = 0. \tag{12}$$

Tratemos de introducir las relaciones (10) y (12) en la ecuación (8). El método que se debe usar nos es suministrado por la teoría del cálculo de las variaciones y conocido con el nombre de procedimiento de los coeficientes indeterminados de Lagrange. Se multiplica cada una de las ecuaciones (10) respectivamente por los coeficientes indetermi-

nados $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ y también la ecuación (12) por otro $\alpha$, y se suman todas las ecuaciones nuevas al primer miembro de la ecuación (8); así se tiene:

$$\Sigma\Sigma(\log P_n + a + \alpha n\varepsilon)\delta P_n + \Sigma\Sigma(\log P_n' + b + \alpha n\varepsilon)\delta P_n' + \\ + \int (\log f + c + \alpha w)\delta f d\tau = 0 \qquad (13)$$

lo que da la condición necesaria:

$$\begin{cases} \log P_n + a + \alpha n\varepsilon = 0 \\ \log P_n' + b + \alpha n\varepsilon = 0 \\ \log f \quad + c + \alpha w = 0 \end{cases}$$

de donde se deduce:

$$\begin{cases} P_n = e^{-a-\alpha n\varepsilon} \\ P_n' = e^{-b-\alpha n\varepsilon} \\ f = e^{-c-\alpha w} \end{cases}$$

ó bien:

$$\begin{cases} P_n = Ae^{-\alpha n\varepsilon} \\ P_n' = Be^{-\alpha n\varepsilon} \\ f = Ce^{-\alpha w} \end{cases} \qquad (14)$$

La última de las ecuaciones (14) representa sencillamente la ley de repartición de las velocidades de Maxwell.

Luego, si se aplica la teoría cinética, debemos tener:

$$\alpha = \frac{N}{RT}$$

y substituyendo las dos primeras relaciones (14) en las dos últimas del sistema (9):

$$\begin{cases} \int f d\tau = N_0 \\ \Sigma P_n = N_1 \\ \Sigma P_n' = N_2 \end{cases} \qquad (9)$$

tendremos:

$$\Sigma Ae^{-\alpha n\varepsilon} = N_1,$$

de donde:

$$A\Sigma e^{-\alpha n\varepsilon}=N_1 \tag{15}$$

$$\Sigma e^{-\alpha n\varepsilon}=1+e^{-\alpha\varepsilon}+e^{-2\alpha\varepsilon}+...+e^{-n\alpha\varepsilon}$$

$$\Sigma e^{-\alpha n\varepsilon}=\frac{e^{-(n+1)\alpha\varepsilon}-1}{e^{-\alpha\varepsilon}-1}$$

de lo que resulta, si se substituye en (10) A y $\Sigma e^{-\alpha n\varepsilon}$ por sus valores:

$$P_n=N_1[e^{-n\alpha\varepsilon}-e^{-(n+1)\alpha\varepsilon}], \tag{16}$$

y del mismo modo se tendría:

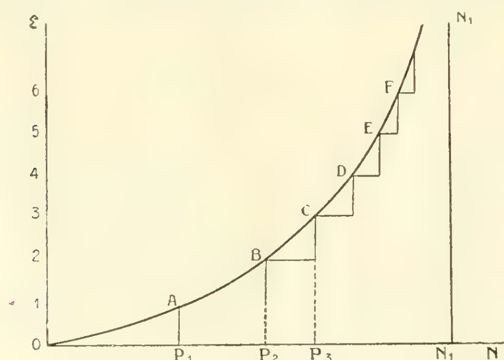
$$P_n'=N_2[e^{-n\alpha\varepsilon}-e^{-(n+1)\alpha\varepsilon}]. \tag{17}$$

Tengamos presente que $P_n$ y $P_n'$ expresan respectivamente los números de los resonadores y de los grados de libertad del éter que poseen la energía $n\varepsilon$. Ahora bien, los productos de los segundos miembros representan los números de las cuya energía estaría comprendida entre $n\varepsilon$ y $(n+1)\varepsilon$, *si la ley estadística de repartición de Maxwell fuese aplicable.*

Si llevamos como ordenadas las energías $\varepsilon$ y como abscisas los números P de los resonadores cuya energía es igual á la ordenada correspondiente ó menor, podremos trazar una curva que suponiéndose aplicable la ley de Maxwell, tendría por ecuación:

$$N=N_1(1-e^{-\alpha\varepsilon}), \tag{18}$$

Esta curva sería asíntota á lo ordenada que corresponde á la abs-




cisa $N_1$, para $\varepsilon=\infty$. Pero, si se aplica la teoría de los quanta, la curva

está reemplazada por una línea quebrada *en escalera* en la cual la altura de cada escalón es igual al quantum $\varepsilon = h\nu$, la abscisa N correspondiente siendo tal como para que la parte superior del escalón se encuentre sobre la curva continua.

Para calcular la energía $E_1$ de los $N_1$ resonadores, hay que determinar el área de la curva, que tiene por valor:

$$E_1 = \varepsilon P_1 + 2\varepsilon P_2 + 3\varepsilon P^3 + \ldots + n\varepsilon P_n$$

ó bien:

$$E_1 = \varepsilon(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots). \qquad (13)$$

Para reemplazar las $P_1$ hay que calcularlas en función de $N_1$ mediante la fórmula (11).

Se tiene:

$$P_1 = N_1(e^{-\alpha\varepsilon} - e^{-2\alpha\varepsilon})$$
$$2P_2 = N_1(2e^{-2\alpha\varepsilon} - 2e^{-3\alpha\varepsilon})$$
$$3P_3 = N_1(3e^{-3\alpha\varepsilon} - 3e^{-4\alpha\varepsilon})$$
$$4P_4 = N_1(4e^{-4\alpha\varepsilon} - 4e^{-5\alpha\varepsilon})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

lo que da para la suma:

$$E_1 = N_1\varepsilon[e^{-\alpha\varepsilon} + e^{-2\alpha\varepsilon} + e^{-3\alpha\varepsilon} + e^{-4\alpha\varepsilon} + \ldots],$$

ó bien:

$$E_1 = N_1\varepsilon e^{-\alpha\varepsilon}[1 + e^{-\alpha\varepsilon} + e^{-2\alpha\varepsilon} + e^{-3\alpha\varepsilon} + \ldots].$$

Calculemos el paréntesis para los $(n-1)$ primeros términos, y tendremos:

$$S = \frac{1 - e^{-n\alpha\varepsilon}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{n\alpha\varepsilon}}}{1 - \frac{1}{e^{\alpha\varepsilon}}},$$

y para $n = \infty$:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{\alpha\varepsilon}}} = \frac{e^{\alpha\varepsilon}}{e^{\alpha\varepsilon} - 1}$$

lo que da si se substituye:

$$E_1 = N_1 \varepsilon \frac{e^{-\alpha\varepsilon} \cdot e^{\alpha\varepsilon}}{e^{\alpha\varepsilon}-1} = \frac{N_1\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon}-1}. \tag{19}$$

Del mismo modo se hallaría para la energía correspondiente á los $N_2$ grados de libertad cuyas frecuencias están comprendidas entre $\nu$ y $(\nu+d\nu)$:

$$E_2 = \frac{N_2\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon}-1}, \tag{20}$$

y para los grados de libertad cuyas frecuencias son diferentes, se encontraría expresiones idénticas á (20), pero con otros valores del quantum de energía $\varepsilon$.

Lo mismo sucedería con otra serie de resonadores que recibirían quanta de energía de valor diferente: á cada una de las series correspondería una expresión de la energía idéntica á (19).

**40. Ley de la radiación integral.** — Ahora ya podemos averiguar si todos los desarrollos que anteceden nos llevan al objeto que tenemos ó sea á la comprobación de la fórmula de Planck que expresa la ley nueva:

$$u_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}-1} \tag{1}$$

La ley experimental de Wien que representa la distribución de la energía en todo el espectro visible, verificada exactamente por experiencias bolométricas, espectrofotométricas y fotográficas hasta el ultravioleta, se pueda expresar por otra parte como sigue:

$$u_\lambda = \frac{c}{\lambda^5} e^{-\frac{\chi}{\lambda T}} \tag{2}$$

siendo $c$ y $\chi$ constantes, y teniendo $\chi$ por valor 1,45 unidades C. G. S. con una aproximación de uno á dos por ciento.

La fórmula de Planck está de acuerdo con la de Wien en lo que se refiere á la constante $c_2$ que es igual á $\chi$, lo que permite escribir:

$$u_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{\chi}{\lambda T}}-1}. \tag{3}$$

Si se substituyen las longitudes de onda $\lambda$ por las frecuencias $\nu$, se convierte en :

$$u_\nu = K \frac{\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1}, \qquad (4)$$

siendo $c$ la velocidad de la luz y K otra constante.

Para calcular la radiación integral, buscaremos la energía repartida entre las frecuencias comprendidas entre $\nu$ y $(\nu + d\nu)$. Para ello, tengamos presente que el número de grados de libertad $N_2$ que corresponden á las frecuencias así delimitadas en las cuales se tiene :

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

siendo $c$ la velocidad de la luz, tiene por expresión :

$$N_2 = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \qquad (5)$$

siendo V el volumen del recinto.

En cuanto á $\alpha$, sabemos que tiene por expresión :

$$\alpha = \frac{N}{RT} \qquad (6)$$

conforme á la teoría cinética de los gases.

Volvamos pues á la fórmula :

$$E_2 = \frac{N_2 \varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon} - 1}$$

y substituyendo en ella $N_2$ y $\alpha$ por sus valores tendremos :

$$E_2 = \frac{8\pi V \nu^2 d\nu}{c^3} \cdot \frac{\varepsilon}{e^{\frac{N\varepsilon}{RT}} - 1} \qquad (7)$$

La densidad de la energía se obtiene dividiendo por V, lo que da :

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon}{e^{\frac{N\varepsilon}{RT}} - 1} d\nu. \qquad (8)$$

Si ahora comparamos esta última relación con la ley de Wien según la cual se tiene:

$$u_\nu = \nu^3 F\left(\frac{T}{\nu}\right)$$

vemos que no se puede satisfacerla sino cuando se pone:

$$\varepsilon = h\nu,$$

siendo $h$ una constante universal.

Por lo visto resulta claramente que esta constante sólo se introduce si se quiere poner la hipótesis de los quanta de acuerdo con la ley de Wien.

Haciendo, pues, el cambio en (8) se tiene:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{Nh\nu}{RT}} - 1} \qquad (9)$$

expresión que no es sino la fórmula (4) de Planck en la cual resulta:

$$K = 8\pi h$$

$$\beta = \frac{Nh}{R}.$$

Observemos que la constante R es la de los gases referida, no á una molécula gramo, sino á una verdadera molécula aislada. Con esto se ve que puede resultar un método seguro para el cálculo del número de las moléculas y también de las magnitudes moleculares, cuya precisión es mucho mayor de la ofrecida por todos los métodos usados anteriormente.

Como observa Planck con razón, si se tiene en cuenta que estos fueron perfeccionados muchos en los últimos años, el acuerdo de los resultados con el obtenido mediante la teoría de los quanta constituye una confirmación muy notable de esta última hipótesis.

11. **Modificación introducida por Planck en su teoría.** — Sin embargo, y á pesar de este acuerdo con la experiencia, Planck pone en evidencia una contradicción fundamental que entraña la teoría de la radiación negra cuya exposición acabamos de hacer.

En efecto, como pudimos observarlo, se tiene sucesivamente y mediante raciocinios de orden distinto, las relaciones:

$$E_N = \frac{Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (1)$$

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{V^3} \bar{E} d\nu. \qquad (2)$$

En la última, $\bar{E}$ representa la energía media $\frac{E_N}{N}$ de un resonador, y esta ecuación expresa una relación entre esta energía media y la densidad $u_\nu$ que corresponde á su período para la radiación presente en el espacio.

Ahora bien, dice Planck, las hipótesis que sirvieron de base al cálculo de estas dos ecuaciones son contradictorias. En efecto, para obtener la relación (1) se supone que la energía de un oscilador es un múltiplo entero $\varepsilon = h\nu$, mientras los raciocinios que llevan á la relación (2) suponen que la misma varía de una manera continua, pues, para obtenerla, se fundan sobre las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell, y parece imposible adoptar cualquiera de las dos alternativas sin que la otra resulte ilusoria al menos á primera vista. Esta contradicción, por otra parte, se vuelve á encontrar en todos los modelos propuestos para representar las propiedades de un resonador capaz de emitir y absorber la energía radiante conforme á la teoría de los quanta.

Y entonces Plank propone la modificación criticada por Poincaré en la forma que referí en la introducción de este trabajo. Le parece imprescindible abandonar la hipótesis de que la energía de un resonador sea necesariamente un múltiplo entero del elemento de energía, siendo al propio tiempo esencialmente continuo el fenómeno de absorción de la radiación libre, si se quiere evitar que las cantidades de energía se amontonen en una espacie de antecámara, como dice Poincaré, antes de ser absorbidas por el resonador. Sólo de este modo, según Planck, se puede conservar la idea fundamental de la hipótesis de los quanta, si se admite por otra parte que la emisión de calor radiante por un resonador de frecuencia $\nu$ es discontinua y se verifica, únicamente por múltiplos enteros del elemento de energía.

Según el físico prusiano se puede en efecto en estas condiciones, aunque la energía de un resonador varíe continuamente, definir todavía los dominios elementales de igual probabilidad mediante el quantum finito de acción $h$. Si se representa la energía E de un resonador en la forma :

$$E = n\varepsilon + \rho,$$

siendo $\rho$ un residuo igual á la diferencia entre esta energía E y los $n$ quanta $\varepsilon$ que contiene el resonador, y menor que $\varepsilon$, el número entero $n$ es la única cantidad que depende del azar, mientras $\rho$ al tomar valores distintos para resonadores diferentes en una radiación estacionaria, crece continua y uniformemente en función del tiempo. En estas condiciones, la probabilidad de la energía E ya no depende de $\rho$, sino sólo del número entero $n$, única variable sometida á las leyes del azar. Si $n$ es igual á cero, siendo E menor que $\varepsilon$, el resonador no emite nada y su energía crece constantemente por absorción hasta que el primer *quantum* de energía $\varepsilon$ sea alcanzado, y después la emisión se verifica más ó menos tarde.

Esta nueva hipótesis del *quantum de emisión* nos lleva otra vez á la fórmula :

$$n_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{V^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1}.$$

pero la relación entre la energía media $\overline{E}$ de un resonador y la temperatura ya no es dada por la expresión :

$$E_N = \frac{Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1},$$

sino por la ecuación :

$$\overline{E} = \frac{E_N}{N} = \frac{h\nu}{2} \cdot \frac{e^{\frac{h\nu}{KT}} + 1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} = \frac{h\nu}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}}}}{1 - \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}}}}.$$

fórmula que expresa que, para las temperaturas muy bajas, se tiene sensiblemente :

$$E = \frac{h\nu}{2}.$$

ó sea que los resonadores no poseen entonces sino la energía $\rho < \varepsilon$ que ya no pueden perder y cuyo valor medio es :

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{h\nu}{2}.$$

Planck observa que este hecho de que la energía de un resonador

no tiende á cero cuando la temperatura va bajando indefinidamente, sino que permanece sólo menor que $\varepsilon$, parece una solución satisfactoria de la dificultad que llevó á J. J. Thomson y Einstein á admitir una estructura discontinua de la radiación libre.

En efecto, si ondas luminosas ó rayos de Röntgen caen sobre un metal, libertando electrones, no es necesario que la radiación, en la hipótesis de los quanta de emisión, suministre la totalidad de la energía utilizada. Basta que la radiación complete la energía $\rho$ de un resonador hasta alcanzar un *quantum* entero $\varepsilon$ para que la emisión de un electrón se haga posible. Cuanto menor sea la intensidad de la radiación exterior, tanto menor resultará el número de los osciladores cuya energía se podrá completar de este modo y por consiguiente tanto menor el número de los electrones emitidos.

Por último Planck observa con insistencia que la hipótesis de los quanta no es verdaderamente una hipótesis de energía, sino más bien de acción, pues el concepto fundamental es el de un dominio elemental de *extensión probable h*. El quantum de energía ó de radiación $h\nu$ se deduce de allí sin duda, pero no ofrece significación sino para los fenómenos periódicos con una frecuencia $\nu$ dada. Sin embargo la adaptación de la teoría de los quanta á los fenómenos de la mecánica común plantea un problema de transcendencia fundamental ¿no desempeñarán los quanta algún papel en estos fenómenos por ser muy pequeña la aceleración, ó bien porque la teoría de los quanta les es inaplicable por su misma esencia? Esta cuestión se reduce á preguntar si la diferencia entre las leyes de los fenómenos mecánicos y eléctricos comunes y las de la emisión en el resonador óptico es fundamental ó sólo cuantitativa. Planck opina por la primera solución porque existe una diferencia esencial entre los fenómenos que se verifican por quanta de acción y los cuya evolución es continua, conforme á las ecuaciones de la dinámica clásica. Cree que la frontera está allí donde se diferencian los fenómenos físicos y los químicos.

Moléculas enteras, átomos y hasta electrones *libres* han de tener movimientos conformes á las leyes de la dinámica, pero los átomos ó electrones sometidos al vínculo molecular obedecen á las leyes de los quanta. De este modo las fuerzas químicas no actúan sino por quanta de acción, mientras las fuerzas como la gravitación, las atracciones ó repulsiones eléctricas, la cohesión, se ejercen en una forma continua.

Según el físico berlinés, esta ley tendría una conexión bien definida con la que, en física, permite á las masas actuar mutuamente las unas sobre las otras cualquiera sea su pequeñez, mientras en química no

pueden obrar sino en proporciones perfectamente determinadas y variables en una forma discontinua.

Tal es, en resumen, la modificación, ó más bien la restricción introducida por Planck en su teoría de los quanta, tal como resulta del informe leído por él en la conferencia de Bruselas. Esta lectura dió lugar á una discusión muy interesante en la cual intervinieron Lorentz, Einstein, Poincaré, Jeans, Langevin, Wien, Brillouin, Sommerfeld, Nernst, la señora de Curie, etc.

El análisis de esta discusión nos haría salir de los límites asignados á este trabajo, pero se comprende todo el interés que ha de ofrecer la lectura de este intercambio de ideas entre sabios que ocupaban entonces el primer rango entre los que se dedicaron á las ciencias físicas.

Por ahora, hemos de explicar cómo la hipótesis electrónica, base de la teoría electromagnética moderna, ha podido mantenerse frente á la ley de la radiación de Planck. Esta explicación la encontraremos en la memoria presentada por Lorentz en la misma conferencia de 1911, al análisis de la cual dedicaré el capítulo siguiente.

## CAPÍTULO II

### LOS QUANTA Y LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE LORENTZ

42. **Insuficiencia de las antiguas teorías.** — El gran físico holandés Hendricke Lorentz presentó á la conferencia de Bruselas un informe muy notable, que tiene por título : *Aplicación á la radiación del teorema de la equirrepartición de la energía*. Empieza por poner en evidencia la insuficiencia de las antiguas teorías y esto con tanta claridad y precisión que no me resisto á la tentación de presentar aquí un análisis de esta primera parte, resultando esta el mejor resumen que se pueda hacer de todo lo que dijimos anteriormente.

Sobra decir que Lorentz, en toda esta exposición, se coloca del punto de vista de la teoría electrónica cuyo autor es él.

Desde Kirchhoff sabemos que la relación entre el poder emisivo y el poder absorbente de un cuerpo no depende de su naturaleza; el valor de la razón entre uno de estos poderes y el otro, ó sea la intensidad de la radiación de un cuerpo negro, fué determinado ya mediante numerosas experiencias. Por otra parte, por la aplicación de los principios de la termodinámica, Boltzmann y Wien han conseguido fundar

leyes generales importantes que, á su vez, fueron verificadas por investigaciones experimentales.

Sin embargo no se puede negar que las ideas admitidas aun hace unos quince años ya no bastaban para explicar porque, por ejemplo, un trozo de fierro no emite luz á la temperatura común. En efecto, si el metal contiene partículas que pueden vibrar con una frecuencia definida por su naturaleza, ¿por qué estos osciladores permanecen del todo mudos mientras no se alcanza una temperatura bastante elevada? Ahora si, en vez de imaginar tales osciladores, preferimos admitir movimientos irregulares en la materia que dan lugar en el éter á un estado vibratorio descomponible en vibraciones harmónicas arbitrarias, ¿cómo explicar que en dicha descomposición, las altas frecuencias desaparecen cuando la energía total disminuye suficientemente?

No podemos admitir que ninguna conexión existe entre las ondas luminosas y los fenómenos que se verifican en un cuerpo frío, pues en resumen el cuerpo absorbe luz aunque no emita ninguna. Es menester pues encontrar un mecanismo que permita el paso de la energía en forma de vibraciones rápidas, del éter á la materia ponderable, pero que impida el paso en sentido opuesto.

Ahora bien las antiguas teorías quedaban del todo insuficientes para la construcción de tal mecanismo. La energía de la radiación en un recinto, perfectamente reflector interiormente, que contiene un cuerpo ponderable cualquiera mantenido á una temperatura constante T, el resto del espacio quedando ocupado por el éter, tiene por expresión por unidad de volumen, según las leyes de Boltzmann y Wien, el producto siguiente:

$$\frac{d\lambda}{\lambda^5}\varphi(\lambda T), \qquad (1)$$

siendo $\varphi$ una función de la variable $\lambda T$.

Pero se puede determinar la forma de la función $\varphi$ mediante la aplicación al éter y á la materia ponderable del teorema de equirrepartición de la energía, cuyo papel tiene tanta trascendencia en todas las teorías moleculares.

Este teorema se puede enunciar como sigue: si dos cuerpos ó sistetemas susceptibles de intercambiar calor son tales que, para cada uno de ellos, la energía cinética interna se pueda escribir en la forma:

$$\sum \frac{1}{2} a q'^2,$$

las magnitudes $q'$ siendo velocidades en el sentido de Lagrange cuyo número es igual al de los grados de libertad, el equilibrio térmico, ó sea la igualdad de temperatura de los dos sistemas, no se puede verificar sino con la condición de que *las energías cinéticas sean proporcionales al número de los grados de libertad.*

También se puede decir que, término medio, los sistemas tendrán para cada grado de libertad, la misma cantidad de energía cinética, pudiendo ésta ser determinada si se considera un caso sencillo, como es por ejemplo el de un gas monoatómico. Si se usa la notación de Planck, la energía cinética media de tal molécula gaseosa á la temperatura T está expresada por $\frac{3}{2}$KT. Por consiguiente hay que atribuír á cada grado de libertad la energía cinética $\frac{1}{2}$KT.

Observemos que el método es general y que, si por ejemplo se quiere aplicarlo al éter encerrado en el recinto, no hay necesidad de imaginar allí un cuerpo ponderable y se puede considerar el espacio interno como *vacío de toda materia*. En estas condiciones habrá que buscar los varios estados elementales en los cuales todos los campos electromagnéticos posibles se pueden descomponer. Ahora bien, cada uno de estos estados no es sino un sistema de ondas estacíonarias de *frecuencia definida* que corresponde á un grado de libertad; luego, término medio, habrá una energía cinética igual á $\frac{1}{2}$KT.

Hemos de observar que, de este modo, no se encontrará la *energía total* de la radiación negra, pues esta se compone de dos partes: la energía eléctrica y la electromagnética, correspondiendo una de ellas á la energía cinética de un sistema mecánico. Pero, como en la radiación las dos energías son iguales, habrá que atribuír á la energía total la cantidad KT por cada grado de libertad.

Supongamos para simplificar que el recinto tiene la forma de un paralelepípedo rectángulo de dimensiones $f$, $g$, $h$. Se encuentra entonces para el número de sistemas estacionarios de longitud de onda comprendida entre los límites $\lambda$ y $(\lambda + d\lambda)$:

$$\frac{8\pi}{\lambda^4} f . g . h . d\lambda, \qquad (2)$$

de donde se deduce para la energía de la radiación propia del intervalo $d\lambda$:

$$\frac{8\pi KT}{\lambda^4} fgh d\lambda, \tag{3}$$

lo que da para la función $\varphi(\lambda T)$ :

$$\varphi(\lambda T) = 8\pi K . \lambda T, \tag{4}$$

y esta es la fórmula de lord Rayleigh y Jeans.

Pero es fácil darse cuenta de que la misma permite prever fenómenos muy distintos de los que la experiencia nos permite observar.

En efecto, si para calcular la energía total de la radiación negra por unidad de volumen, se toma la integral :

$$\int_0^\infty \frac{8\pi KT}{\lambda^4} d\lambda \tag{5}$$

entre los límites *o* y $\infty$, se encuentra un valor infinito, lo que significa que, para comunicar una elevación de temperatura finita á un sistema que encierra éter, es necesario suministrarle una cantidad de calor infinitamente grande. Por otra parte, en un sistema compuesto de materia y éter, la energía acabaría siempre por amontonarse totalmente en el éter, en donde se hallaría en la forma de ondas de longitud sumamente pequeña, y éstas son consecuencias inevitables del teorema de equirrepartición, cuando se aplica á dos sistemas cuyo uno tiene, en virtud de su continuidad perfecta, un número infinito de grados de libertad, mientras este número resulta finito para el otro supuesto ponderable, en razón de su estructura molecular.

Conviene observar que la fórmula de lord Rayleigh se verifica muy satisfactoriamente para las grandes longitudes de onda, por ejemplo para el infrarrojo extremo.

Pero, para las vibraciones de frecuencia grande, deja de ser aplicable y la divergencia se vuelve mayor á medida que $\lambda$ va disminuyendo. Podemos decir que estas consecuencias inadmisibles proceden del hecho de que la integración se hizo desde el límite inferior $\lambda = 0$.

Por otra parte, observaremos que uno de los resultados más importantes debidos á la experiencia es el de que, para cada temperatura dada, la función de Rayleigh habría de pasar por un máximo para cierto valor de $\lambda$, y es fácil averiguar que la naturaleza de dicha función hace imposible este máximo, pues su derivada :

$$-\frac{32\pi KT}{\lambda^3}$$

no se puede anular sino para $\lambda = \infty$.

Por último, ni se puede imaginar una proporcionalidad, para una longitud de onda definida, entre la intensidad de la radiación negra y la temperatura. En efecto, si tal proporcionalidad se verificase, sería necesario que un cuerpo negro que brilla intensamente á la temperatura de 1200° siquiera visible en la obscuridad á 15°, siendo la temperatura absoluta T en este último caso, más ó menos la quinta parte del valor que tiene á 1200°, é igual resultado se debería verificar para cada cuerpo poco transparente. Por ejemplo una chapa de plata pulida que, á 15°, tiene un poder absorbente para la luz de más ó menos $\frac{1}{10}$, habría de resplandecer con un brillo igual á $\frac{1}{50}$ del que se observa en un cuerpo negro á la temperatura de 1200°. Ahora bien, si se quiere atribuír á la chapa cierta emisión, es preciso, para que desaparezca todo brillo, que sea millares de veces menor de lo que exige la fórmula.

En resumidas cuentas, nos encontramos siempre ante el mismo enigma: ¿por qué un cuerpo frío, que puede absorber las vibraciones luminosas externas, no emite ninguna cantidad de luz?

43. **Papel atribuído por Lorentz al cálculo de las probabilidades.** — El gran físico holandés trata, pues, de encontrar un medio que permita prescindir del teorema de la equirrepartición en general, ó bien de su aplicación al problema de la radiación.

No olvidemos desde luego que la demostración del teorema está fundada en consideraciones de probabilidad, lo que significa que se considera el estado de un sistema compuesto de un sinnúmero de partículas como *el más probable*. Para ello hay que introducir en los raciocinios el concepto de un gran número de estados, más ó menos distintos. Se puede, por ejemplo, medir la probabilidad de los estados que, durante los movimientos internos, se suceden el uno al otro en un sistema, mediante intervalos de tiempo durante los cuales aquellos existen. Pero divergencias algo notables con el estado más probable se encuentran limitadas á intervalos tan pequeños que quedan inaccesibles á la observación, y todas nuestras mediciones no pueden enseñarnos que este estado es el más probable durante casi toda la totalidad del tiempo. Se

puede también considerar un gran número de sistemas, copias los unos de los otros, pero que, á una época dada, se encuentran en fases muy diferentes. Conjuntos de esta clase se pueden imaginar de varias maneras, aunque sea necesario imponerse la restricción de que, del punto de vista estadístico, el estado de conjunto es *estacionario*. Una vez elegido el conjunto, se mide la probabilidad de un estado cualquiera mediante el número de veces que se halla entre los sistemas del conjunto, y se admite que nuestras observaciones de un cuerpo real nos revelan el estado que, en el mismo conjunto, se verifica más á menudo.

Pero, aquí también, divergencias algo notables no se presentan sino raras veces, y por este mismo, para las magnitudes mensurables que se refieren al sistema más probable se pueden substituír los valores medios que se hallan en el conjunto.

Sentado esto, Lorentz pasa á estudiar algunos conjuntos que han sido definidos. Por ejemplo, se puede introducir un conjunto de la clase que Boltzmann llamó *orgódica* y Gibbs *microcanónica,* que abarca todos los estados compatibles con un valor dado de la energía total.

Hay también los conjuntos *canónicos* debidos á Gibbs, en los cuales se admiten, hasta para la energía, todos los valores imaginables, pero suponiéndolos distribuídos en los varios sistemas según cierta ley elegida de modo que, en la mayor parte de los sistemas, la energía pueda considerarse como teniendo un valor común. Se ve que en resumen un conjunto canónico así definido es equivalente á otro *microcanónico*.

Lorentz observa que en los varios modos de aplicar el cálculo de las probabilidades queda siempre un elemento de incertidumbre en cuanto á la identidad del estado que se considera como el más probable con el estado *real,* pues tal identidad no se puede demostrar con todo el rigor satisfactorio. Es cierto, por otra parte, que se podría tener más confianza en cuanto á los resultados, si fuera posible alcanzarlos mediante el teorema de Boltzmann, ó sea introduciendo la función H de este sabio, y mostrar que, en un mismo sistema, esta magnitud va decreciendo necesariamente hasta cierto límite que caracteriza el estado de equilibrio. Pero, por desgracia, sólo en los casos sencillos, como el de una mezcla gaseosa, podemos demostrar de este modo el teorema de equirrepartición de la energía; por lo general, al contrario, es preciso recurrir á los procedimientos menos seguros que acabamos de definir.

Sin embargo, según Lorentz, no convendría observar una prudencia exagerada, pues hemos siempre de esperar que un día sea posible impugnar el teorema mediante una crítica rigurosa de la demostración

conocida. Pero cree que, en la mecánica estadística, los métodos del cálculo de las probabilidades llevan generalmente á resultados á su vez muy probables, y, con este motivo, se propone recurrir á ellos sin demasiados escrúpulos, eligiendo para esto el procedimiento de los conjuntos canónicos que le parece el más favorable.

11. **Los conjuntos canónicos y las ecuaciones de Hamilton.** — Ya sabemos lo que es un conjunto canónico; sean $q_1$, $q_2$, $q_3$ ... las coordenadas generalizadas en el sentido de las ecuaciones de Lagrange, que determinan la posición y la estructura de un sistema; $q_1'$, $q_2'$, $q_3'$, las velocidades, ó sea las derivadas de las $q$ con respeto al tiempo; $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... los *momentos correspondientes* de Boltzmann que, si W representa la energía cinética (porque reservamos el símbolo T á la expresión de la temperatura absoluta), satisfacen cada uno á la relación:

$$p_1 = \frac{dW}{dq_1'} \qquad (1)$$

Sea también E la energía total; sabemos que cada sistema se puede representar por un punto en un espacio de varias dimensiones, en el cual $q_1$, $q_2$, $q_3$, ... $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... serían las coordenadas, lo que significa que el sistema se encuentra en el punto:

$$M(q_1, q_2, q_3, \dots p_1, p_2, p_3, \dots)$$

de aquel hiperespacio.

Sea $d\tau$ un elemento cuyo valor es:

$$d\tau = dp_1 dp_2 dp_3 \dots dq_1 dq_2 dq_3 \dots \qquad (2)$$

se tendrá por definición un conjunto *canónico* si el número de los sistemas que se hallan en aquel elemento tiene por expresión:

$$Ce^{\frac{E}{\Theta}} d\tau, \qquad (3)$$

siendo C y $\Theta$ constantes, y además $\Theta$ el *módulo* del conjunto que desempeña por lo general el papel de la temperatura.

Recordemos ahora el teorema de Liouville: *si los sistemas se encuentran á una época t en un elemento $d\tau$ del hiperespacio y ocupan el elemento $d\tau'$ ó otra época posterior,* se tiene:

$$d\tau' = d\tau. \qquad (4)$$

Por otra parte, sabemos que este teorema es una consecuencia de las ecuaciones del movimiento puestas en la forma que debemos á Hamilton. Esto significa, en resumidas cuentas, que los resultados obtenidos cuando se considera un conjunto canónico descansan sobre la hipótesis de que, cualesquiera sean los fenómenos que se verifiquen en el sistema estudiado, las ecuaciones de Hamilton permanecen aplicables.

Ahora bien, hemos de averiguar si efectivamente se puede construír un conjunto canónico *estacionario* con un sistema formado de materia y éter y rodeado por una envoltura supuesta perfectamente *conductora*, ó sea del todo *reflectora*. Por lo pronto, es necesario observar que, para ello, no es preciso suministrar una explicación mecánica de los fenómenos electromagnéticos, pues basta que las ecuaciones que determinan estos fenómenos se puedan escribir en la forma de las de Hamilton.

**45. Las ecuaciones de Lorentz.** — Recordaremos primero algunas de las ecuaciones fundamentales de Lorentz aplicables al caso de que la materia ponderable contiene electrones móviles.

Entre otras relaciones escribiremos las siguientes:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum \frac{df}{dx} = \rho \\ &\sum \frac{dF}{dx} = 0 \\ &\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi A u \\ &\frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy} = \frac{A}{4\pi}\frac{d\alpha}{dt} \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

siendo $f$, $g$, $h$ las componentes del desplazamiento eléctrico de Maxwell, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ las de la fuerza magnética, F, G, H las del potencial vector, $\rho$ la densidad eléctrica, A la recíproca $\frac{1}{V}$ de la velocidad de propagación de la luz, $u$, $v$, $w$ las componentes de la corriente.

Lorentz ha adoptado un sistema especial de unidades que permite eliminar los factores $4\pi$ de las fórmulas. Con este sistema, las relaciones (1) se convierten en las siguientes:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum\frac{df}{dx}=\rho \\ &\sum\frac{dF}{dx}=0 \\ &\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=Au \\ &\frac{dg}{dz}-\frac{dh}{dy}=A\frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Además se tiene para la corriente *(u, v, w)* :

$$u=\frac{df}{dt}+\rho\xi \tag{3}$$

siendo $\xi$, $\eta$, $\zeta$ las componentes de la velocidad del electrón, $\frac{df}{dt}$ la primera componente de la corriente de desplazamiento y $\rho\xi$ la primera componente de la corriente de convexión.

Observaremos por último que, en virtud de la elección de las unidades, el vector $(f, g, h)$ no representa sólo al desplazamiento eléctrico, sino también á la fuerza eléctrica cuyas componentes en la antigua notación eran :

$$\left\{\begin{aligned} P&=4\pi f \\ Q&=4\pi g \\ R&=4\pi h. \end{aligned}\right.$$

A estas ecuaciones hay que agregar las condiciones de que, en cada punto de la pared, el vector $(f, g, h)$ ha de ser normal y el vector $(\alpha, \beta, \gamma)$ paralelo á su superficie. Por fin Lorentz supone que los electrones no llegan á ésta, de modo que se tiene en todos los puntos de la pared :

$$\rho=0.$$

En cuanto á las fuerzas que ejerce el campo electromagnético sobre los electrones, sus componentes por unidad de carga son dadas por las expresiones de la forma :

$$X=f+A(\eta\gamma-\beta\zeta). \tag{4}$$

Además se puede, como lo hizo Poincaré en su memoria sobre *la dinámica del electrón,* elegir las unidades de longitud y tiempo de modo que la velocidad V de la luz quede reducida á 1. Mediante este artificio, no sólo los factores $4\pi$, sino también los factores $A = \frac{1}{V}$ desaparecen de las fórmulas anteriores.

46. **El principio de menor acción.** — Lorentz demostró que sus fórmulas se pueden deducir del principio de menor acción. Este principio, menos general que el de Hamilton, se aplica al movimiento de un sistema sujetado á uniones independientes del tiempo y sometido á fuerzas que derivan de una *función de las fuerzas* ó función potencial U; expresa una propiedad geométrica independiente de la noción de tiempo.

Sea W la semifuerza viva del sistema; si aplicamos al movimiento el teorema de las fuerzas vivas, tendremos por ser las uniones independientes del tiempo y U también:

$$\frac{d\Sigma m r^2}{2} = dU = dW$$

de donde:

$$\frac{\Sigma m r^2}{2} = U + h,$$

siendo $h$ la constante de integración.

Por otra parte, la posición del sistema depende de $k$ parámetros geométricos independientes $q_1, q_2, \dots q_k$, que son las coordenadas generalizadas del sistema, de modo que las de un punto cualquiera $(x, y, z)$ se expresan en función de los mismos parámetros, sin que $t$ entre en sus expresiones y se puede escribir:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(q_1, q_2, \dots q_k) \\ y = \psi(q_1, q_2, \dots q_k) \\ z = \chi(q_1, q_2, \dots q_k) \end{array} \right. \qquad (1)$$

Para obtener un desplazamiento infinitamente pequeño del sistema, basta atribuír á estos parámetros incrementos $dq_1, dq_2, \dots dq_k$, y entonces $x, y, z$ experimentarán á su vez incrementos $dx, dy, dz$.

Pongamos pues:

$$ds^2 = \Sigma m(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2}$$

extendiéndose la suma á todos los puntos del sistema.

Si se substituye $dx$, $dy$, $dz$ por sus expresiones en función de $dq_1$, $dq_2$, ... $dq_k$, encontraremos para $ds^2$ una forma cuadrática de estas diferenciales:

$$ds^2 = \Sigma a_{ij} dq_i dq_j \tag{3}$$

en la cual se tiene:

$$a_{ij} = a_{ji},$$

estos coeficientes siendo á su vez funciones de las $q$.

Pero entonces la fuerza viva $\Sigma mv^2 = 2W$ es igual á $\frac{ds^2}{dt^2}$ · y se puede escribir para la integral de las fuerzas vivas:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2U + 2h}, \tag{4}$$

y podemos admitir en adelante que la constante $h$ de las fuerzas vivas tiene un valor determinado.

Es posible ahora considerar dos posiciones $P_0$, $P_1$ del sistema que corresponden á los valores:

$$(q_1)_0, (q_2)_0 \dots (q_k)_0$$
$$(q_1)_1, (q_2)_1 \dots (q_k)_1$$

de los parámetros $q$. Del punto de vista meramente geométrico, se puede llevar el sistema de una posición á la otra de un número infinito de maneras distintas, y para obtener una de ellas, basta expresar las $q$ en forma de funciones continuas de un parámetro cualquiera $\lambda$, y escribir por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = f_1(\lambda) \\ q_2 = f_2(\lambda) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_k = f_k(\lambda) \end{array} \right. \tag{5}$$

de modo que para:

$$\lambda = \lambda_0$$

las $q$ tomen los valores $(q)_0$ que corresponden á la posición $P_0$, y para :

$$\lambda = \lambda_1$$

los valores $(q)_1$ que corresponden á la posición $P_1$.

Si entonces $\lambda$ varía continuamente desde $\lambda_0$ á $\lambda_1$, el sistema pasará de una manera continua también del estado $P_0$ al estado $P_1$ y á cada forma atribuída á las funciones $f_1, f_2, \dots f_k$ corresponderá una manera de llevar el sistema de la posición $P_0$ á la posición $P_1$.

Si volvemos al lenguaje geométrico, las $q$ pueden ser consideradas como las coordenadas de un punto en un espacio de $k$ dimensiones, y las posiciones $P_0$, $P_1$ corresponden á dos puntos de este hiperespacio que tendrían por coordenadas respectivas :

$$\begin{cases} (q_1)_0, (q_2)_0 \dots (q_k)_0 \\ (q_1)_1, (q_2)_1 \dots (q_k)_1 \end{cases}$$

La sucesión de los puntos definidos por las relaciones (5), cuando varía $\lambda$ continuamente de $\lambda_0$ á $\lambda_1$, forma una curva $c$ que une los puntos $P_0$ y $P_1$, y se llama *acción de* $P_0$ *á* $P_1$ *á lo largo de la curva c á la integral :*

$$I = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2U + 2h} \cdot ds \tag{6}$$

*tomada sobre toda la extensión de la curva.*

Designando por $\dot{q}$ á las derivadas de las $q$ con respecto á $\lambda$, tendremos á lo largo de la curva $c$, en donde las $q$ son funciones de $\lambda$ :

$$ds = \sqrt{\Sigma a_{ij} dq_i dq_j} = \sqrt{\Sigma a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j} \cdot d\lambda, \tag{7}$$

pues se tiene :

$$dq_i = \dot{q}_i d\lambda.$$

Designemos ahora por $\Theta$ la forma cuadrática :

$$\Theta = \frac{1}{2} \Sigma a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\lambda^2} \tag{8}$$

y tendremos para la integral de acción :

$$I = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{2U + 2h} \sqrt{2\Theta} \cdot d\lambda. \tag{9}$$

Observemos que, para cada curva cualquiera que une los dos puntos $P_0$ $P_1$, ó sea para cada forma dada á las funciones $f_1, f_2, \ldots f_k$, esta acción tendrá un valor determinado.

Ahora bien, el *principio de menor acción* se puede enunciar como sigue:

Si se busca la curva $c$ que ha de unir los dos puntos para que I sea mínima, *resulta que esta curva ha de ser una de las trayectorias que adoptaría naturalmente el sistema puesto en movimiento desde* $P_0$ *de modo que llegase á* $P_1$, siendo $h$ la constante de las fuerzas vivas.

No daremos aquí la demostración de este teorema del todo clásico. Queríamos sólo referirnos con toda precisión al enunciado, pues la demostración se encuentra en todos los tratados de mecánica (*).

**47. Aplicación del principio á las ecuaciones de Lorentz.** — Volvamos ahora á las condiciones más arriba expresadas, y admitamos como ya lo dijimos que el factor $A = \frac{1}{V}$ queda reducido á la unidad.

Tenemos:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum \frac{df}{dx} = \rho \\ &\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ &u = \frac{df}{dt} + \rho\xi. \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

La integral:

$$J = \int \left[ \frac{\Sigma f^2}{2} + \frac{\Sigma \alpha^2}{2} - \Sigma F u \right] dt d\tau \qquad (2)$$

ha de ser un mínimo, según el principio de menor acción, si:

1° Esta integral se entiende con respecto á $d\tau$ al espacio total y con respecto á $t$, al intervalo comprendido entre las épocas $t_0$ y $t_1$, estando perfectamente determinado el estado del sistema á estas dos épocas;

2° Las cantidades $f$, $\alpha$, F y $u$ satisfacen á las relaciones (1).

La condición de que el estado del sistema está determinado nos permitirá transformar las varias integrales parciales contenidas en J.

En efecto, sea de un modo general una integral de la forma:

(*) Véase Appell, *Mécanique rationnelle*, tomo II, página 436.

$$\int A \frac{dB\delta c}{dt} dt d\tau, \tag{3}$$

siendo $c$ una de las cantidades que definen el estado del sistema y $\delta c$ su variación. Si se integra por partes, con respecto al tiempo, se tiene :

$$\int d\tau \Big[ AB\delta c \Big]_{t=t_0}^{t=t_1} - \int dt d\tau \frac{dA}{dt} dB\delta c. \tag{4}$$

Ahora bien, siendo determinado el estado del sistema á las dos épocas límites, resulta :

$$\delta c = 0$$

para $t = t_0$ y para $t = t_1$, lo que significa que la primera integral es *nula*.

Se puede también integrar por partes con respecto á $x$, $y$, $z$, y se tendrá por ejemplo :

$$\int A \frac{dB}{dx} dxdydzdt = \int ABdydzdt - \int B \frac{dA}{dx} dxdydzdt. \tag{5}$$

Como nuestras integraciones se extienden hasta el infinito, hay que poner :

$$x = \pm \infty$$

en la primera integral del segundo miembro, y si admitimos que todas nuestras funciones se anulan en el infinito, esta integral es *nula* y resulta :

$$\int A \frac{dB}{dx} d\tau dt = - \int \frac{dA}{dx} d\tau dt. \tag{6}$$

Observemos ahora que si el sistema estuviera sometido á uniones, habría por supuesto que agregar estas condiciones de unión á las ya impuestas á las distintas cantidades contenidas en la integral J.

Empezaremos por dar á F, G, H incrementos $\delta F$, $\delta G$, $\delta H$, y tendremos :

$$\delta\alpha = \frac{d}{dy}\delta H - \frac{d}{dz}\delta G, \tag{7}$$

de donde se deduce :

$$\delta J = \int dt d\tau \left[ \Sigma\alpha \left( \frac{d}{dy}\delta H - \frac{d}{dz}\delta G \right) - \Sigma u \delta F \right] = 0 \tag{8}$$

relación que expresa la condición del mínimo, y si integramos por partes:

$$\delta J = \int dt d\tau \left[ \Sigma \left( \delta G \frac{d\alpha}{dz} - \delta H \frac{d\alpha}{dy} \right) - \Sigma u \delta F \right] = \\ = - \int dt d\tau \Sigma \delta F \left( u - \frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz} \right) = 0, \qquad (9)$$

y como $\delta F$ es arbitraria, resulta:

$$u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \qquad (10)$$

ó sea una relación ya conocida que, á su vez, mediante una integración por partes, da:

$$\int \Sigma F u d\tau = \int \Sigma F \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) d\tau = \int \Sigma \left( \beta \frac{dF}{dz} - \gamma \frac{dF}{dy} \right) d\tau = \\ = \int \Sigma \alpha \left( \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) d\tau.$$

De allí se deduce:

$$\int \Sigma F u d\tau = \int \Sigma \alpha^2 d\tau,$$

de donde:

$$J = \int dt d\tau \left( \frac{\Sigma f^2}{2} - \frac{\Sigma \alpha^2}{2} \right),$$

lo que da por unidad de volumen:

$$J_1 = \int \left( \frac{\Sigma f^2}{2} - \frac{\Sigma \alpha^2}{2} \right) dt. \qquad (10)$$

Si integramos entre $t_0$ y $t_1$ y aplicamos el principio de menor acción, igualando á 0 la variación, tenemos:

$$\delta J_1 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\Sigma f^2}{2} - \frac{\Sigma \alpha^2}{2} \right) dt = 0,$$

ó bien:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\Sigma \alpha^2}{2} - \frac{\Sigma f^2}{2} \right) dt = 0.$$

Observemos ahora que $\Sigma \alpha^2$ representa la energía magnética W y $\Sigma f^2$ la energía eléctrica V, lo que permite escribir:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{W} - \mathrm{V}) dt = 0. \qquad (11)$$

18. **El estado y el movimiento variados de Lorentz.** — De la expresión anterior:

$$\delta \int_{t}^{t_1} (\mathrm{W} - \mathrm{V}) dt = 0 \qquad (1)$$

se ve que resulta un principio muy análogo al de Hamilton. Pero Lorentz observa que el signo de variación $\delta$ se refiere al paso de un estado *real* á un estado *ficticio* que llama *estado variado* ó movimiento variado y define del modo siguiente.

Desde el estado real existente á una época cualquiera $t$ se dan desplazamientos infinitamente pequeños á los electrones y cambios infinitamente pequeños á las componentes $f$, $g$, $h$, tales que cada elemento de volumen de un electrón conserve su carga, conservando á su vez el vector $(f, g, h)$ su dirección normal á la pared, y quedando la ecuación:

$$\sum \frac{df}{dx} = \rho$$

siempre verificada.

Estos desplazamientos y variaciones podrán resultar funciones continuas cualesquiera del tiempo; en este caso, se conocerá para cada instante la *posición variada* de los electrones y también el *campo eléctrico variado* en el éter. El movimiento *variado* por otra parte es sencillamente la sucesión de los *estados variados*.

De este modo, los valores de:

$$\frac{df}{dt}, \ \frac{dg}{dt}, \ \frac{dh}{dt}$$

como también las magnitudes:

$$\frac{df}{dt} + \rho\xi$$

que podemos llamar las componentes de la *corriente variada* quedan perfectamente definidas.

El vector $(\alpha, \beta, \gamma)$ está sujetado á la condición de ser tangente á la pared y de satisfacer á las relaciones:

$$\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=u$$

$$\sum\frac{d\alpha}{dx}=0.$$

y no hay sino un solo y único vector capaz de satisfacer á estas propiedades.

Calculemos pues el valor de W de la integral (1) para los dos movimientos mediante la fórmula :

$$W=\frac{1}{2}\int\Sigma\alpha^2 d\tau. \tag{2}$$

De este modo podremos obtener el valor de $\delta W$. Análogamente se tendrá $\delta V$, tomando para los dos movimientos la fórmula conocida :

$$V=\frac{1}{2}\int\Sigma f^2 d\tau. \tag{3}$$

Por otra parte, es fácil demostrar que la expresión (1) permanece *cierta,* siempre que los desplazamientos de los electrones y las variaciones del vector $(f, g, h)$ se anulen á las épocas arbitrariamente elegidas $t_0$, $t_1$.

Sin embargo, habría que tener en cuenta partículas sin carga y acciones no electromagnéticas. Se podrá hacerlo si se comprende en el símbolo V la energía potencial que corresponde á aquellas acciones y en el símbolo W la energía cinética de las moléculas ó átomos. Por último, si se quiere atribuir á las partículas cargadas cierta masa material, habrá que comprender también en W la energía cinética propia de dicha masa.

**19. Intervención de las ecuaciones de Lagrange y Hamilton. Concepto del sistema ficticio de Lorentz.** — Para pasar de la expresión :

$$\delta\int_{t}^{t_1}(W-V)dt=0 \tag{1}$$

á fórmulas de la forma de las ecuaciones de Hamilton, es necesario introducir un sistema de coordenadas generalizadas $q_1$ que determinen las posiciones de las partículas no cargadas y otro sistema de coordenadas $q_2$ que definan la posición de los electrones.

Además hay que elegir coordenadas para el campo electromagnético en el éter. Ahora bien, cualquiera sea este campo, se puede siempre descomponer en dos partes que se considerarán como sobrepuestas, siendo la primera el campo que existiría si los electrones se encontraran en estado de reposo en las posiciones indicadas por el sistema de coordenadas $q_2$, mientras la segunda satisfaría en todas partes á la relación :

$$\sum \frac{df}{dx} = 0 \tag{2}$$

admitiendo por supuesto que cada una de las dos partes satisfaga además á las condiciones en las paredes.

La primera se halla del todo determinada por las coordenadas $q_2$ y si se da al recinto la forma de un paralelepípedo rectangular de dimensiones $a$, $b$, $c$, se puede designar por $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ los cosenos de direcciones arbitrariamente elegidas, siempre que sean rectangulares, y también á una tercera determinada por los cosenos :

$$\frac{u}{a}, \frac{v}{b}, \frac{w}{c}$$

siendo $u$, $v$, $w$, números enteros cualesquiera y *positivos*.

Lorentz entonces aplica el teorema de Fourier, y encuentra así para la segunda parte del campo las relaciones siguientes :

$$\left\{\begin{aligned} f &= \Sigma(q_3\alpha + q_3'\alpha') \cos\frac{\pi u}{a}x . \operatorname{sen}\frac{\pi v}{b}y . \operatorname{sen}\frac{\pi w}{c}z \\ g &= \Sigma(q_3\beta + q_3'\beta') \operatorname{sen}\frac{\pi u}{a}x . \cos\frac{\pi v}{b}y . \operatorname{sen}\frac{\pi w}{c}z \\ h &= \Sigma(q_3\gamma + q_3'\gamma') \operatorname{sen}\frac{\pi u}{a}x . \operatorname{sen}\frac{\pi v}{b}y . \cos\frac{\pi w}{c}z \end{aligned}\right. \tag{3}$$

siendo los tres ejes coordenados las tres aristas del paralelepípedo.

Observemos que para cada sistema de números enteros ($u$, $v$, $w$). existen dos coeficientes que Lorentz designa por $q_3$ y $q_3'$ y también que las sumas (3) han de comprender todas las combinaciones posibles de los números ($u$, $v$, $w$), siendo las magnitudes $q_3$ y $q_3'$ las coordenadas generalizadas en lo que se refiere al éter.

Se ve que á cada sistema de números ($u$, $v$, $w$) corresponden para $q_3$ y $q_3'$ ó sea para las dos direcciones ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) y ($\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$) dos *estados ele-*

*mentales* que Lorentz llama *estados conjugados,* teniendo cada uno una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}}}. \qquad (4)$$

Las magnitudes $q_1$, $q_2$, $q_3$ determinan la posición de todas las partículas, y también el campo eléctrico en el éter. Resulta que la energía eléctrica y potencial V puede expresarse en función de aquellas coordenadas. Ahora bien, si se designa, como lo hace Lorentz, por:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$$

las velocidades, ó sea las derivadas de las $q_1$, $q_2$, $q_3$ con respecto al tiempo, estas velocidades darán á conocer el movimiento de las partículas y también la corriente en cada punto del espacio, ó en resumen las magnitudes de las cuales depende la energía magnética y cinética W.

No me propongo referir aquí el cálculo de Lorentz que nos llevaría más allá de los límites asignados á este trabajo y sólo daré la expresión que consiguió para V.

$$V = V_0 + \frac{1}{16} abc \Sigma \dot{q}_3{}^2 \qquad (5)$$

siendo $V_0$ una función de las coordenadas $q_1$ y $q_2$.

Encontró también la expresión siguiente de W:

$$W = W_0 + \frac{abc}{64\pi^2 v^2} \Sigma \lambda^2 q_3{}^2 + \Sigma l_{ij} \dot{q}_{2i} \dot{q}_{3j}\ , \qquad (6)$$

siendo $W_0$ una función homogénea del segundo grado de las velocidades $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$, $v$ la velocidad de la luz que no desapareció porque Lorentz emplea un sistema de unidades que da lugar solamente á la desaparición del factor $4\pi$, como lo explicamos más arriba. En cuanto á la segunda suma, ha de comprender á todos los productos de cada una de las $\dot{q}_2$ por una $\dot{q}_3$, siendo el coeficiente $l$ de cada uno de los productos función de las coordenadas del electrón al cual se refiere $\dot{q}_{2i}$.

Si ahora suponemos que los electrones son esferas de radio R y llevan una carga superficial $e$, designándose por $q_{(1)}$, $q_{(2)}$, $q_{(3)}$, las coordenadas rectangulares del centro de una de estas partículas, se encuen-

tra para la expresión del coeficiente $l_{(1)j}$ que corresponde á la primera de las tres coordenadas y á una $q_{3j}$ cualquiera:

$$l_{(1)j} = \frac{\varkappa\lambda^3 e}{8\pi^3 v^2 R} \operatorname{sen} \frac{2\pi R}{\lambda} \cos \frac{\pi u}{a} q_{(1)} \operatorname{sen} \frac{\pi v}{b} q_{(2)} \operatorname{sen} \frac{\pi w}{c} q_{(3)}. \tag{7}$$

Siendo W una función homogénea del segundo grado de las velocidades $\dot{q}$, mientras V depende solamente de las coordenadas, se ve que existe aquí gran analogía con las energías cinética y potencial de los sistemas que se consideran comúnmente en mecánica, con la diferencia que estos tienen por lo general un número finito de coordenadas, mientras el sistema de que nos ocupamos ahora tiene una infinidad de ellas, lo que significa un número infinito de grados de libertad.

Lorentz, para evitar las dificultades que podrían resultar de dicha diferencia, imagina que, mediante la introducción de nuevas uniones, todos los campos eléctricos representados por la fórmula (3) y para los cuales la longitud de onda resultaría *menor que cierto límite* $\lambda_0$, se encuentran excluídos, lo que siempre es posible si se imponen ciertas condiciones al desplazamiento eléctrico ($f$, $g$, $h$).

Así se obtiene un *sistema ficticio* S, con el cual se puede razonar como lo hacemos con los sistemas mecánicos comunes, de modo que sea dable alcanzar el concepto de lo que se verifica en el *sistema real*, mediante el examen de los resultados que se obtienen con el sistema ficticio para el límite:

$$\lambda_0 = 0.$$

Por lo pronto observaremos que la expresión:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W - V) dt = 0$$

lleva para este sistema S á las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{dW}{d\dot{q}} = \frac{d}{dq}(W - V). \tag{8}$$

Ahora bien, después de introducir los valores de V (5) y de W (6), se puede pasar al límite:

$$\lambda_0 = 0.$$

De este modo se llega á fórmulas que determinan por una parte el

campo electromagnético que procede del movimiento de los electrones, y, por la otra, la influencia del campo electromagnético sobre este mismo movimiento.

Además siempre se puede, para el sistema ficticio S, introducir, en vez de las velocidades $\dot{q}$ las cantidades que Lorentz llama los *momentos p correspondientes* definidos por la relación:

$$p = \frac{dW}{d\dot{q}} = \frac{dE}{d\dot{q}}. \tag{9}$$

siendo E la energía total W + V.

Entonces, si se considera W y V como funciones de las coordenadas y momentos, se obtiene las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{p} = -\frac{dE}{dq} \tag{10}$$

y estas relaciones (9) y (10) nos llevan al teorema de Liouville, lo que significa que se puede, sin objeción posible á los raciocinios, constituír con el sistema ficticio S un *conjunto canónico estacionario.*

50. **Demostración de la ley de Rayleigh.** — Entre las propiedades que caracterizan el conjunto canónico estacionario, Lorentz pone en evidencia una de las más interesantes. Imaginemos que una de las coordenadas $q$ ó uno de los momentos $p$ no entra en la expresión de la energía W sino en uno de los términos de la fórmula:

$$Aq^2 \qquad ó \qquad Bp^2.$$

Se demuestra que el *valor medio* de la parte de energía designada por aquel término, ó sea de la parte de energía que corresponde á la ordenada $q$ ó al momento $p$, está determinado por la mitad del módulo $\Theta$ que figura en la expresión del número de sistemas existentes en un elemento $d\tau$ del hiperespacio.

$$N = Ce^{-\frac{E}{\Theta}} d\tau. \tag{1}$$

Ahora bien este resultado se aplica á algunas de las variables que hemos de considerar.

Por lo pronto, si $m$ es la masa de una partícula no cargada, molécula ó átomo de un cuerpo M colocado en el recinto, y $q_1$ una de las

coordenadas rectangulares del centro de gravedad de dicha partícula, la energía W contiene el término:

$$\frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 \qquad \text{ó} \qquad \frac{1}{2} \dot{p}_1^2,$$

$p_1$ siendo el momento que corresponde á $q_1$.

Por otra parte es evidente que este momento $p_1$ no se vuelve á encontrar en ninguno de los demás términos de W, y el *valor medio* en el conjunto canónico de la parte de W que le corresponde es igual á $\frac{\Theta}{2}$. Pero se halla $\frac{3}{2}\Theta$ por el valor medio de la energía debida al movimiento del centro de gravedad de la molécula, pues se puede repetir el raciocinio anterior y considerar $q_1$ como la segunda ó la tercera coordenada de aquel punto.

Sentadas estas observaciones, consideremos un grupo numeroso de moléculas iguales contenidas en el cuerpo M, y sea $\nu$ el número de ellas. La energía total que poseen en virtud del movimiento de sus centros de gravedad representa en el conjunto canónico el valor medio:

$$\frac{3}{2}\nu\Theta \tag{2}$$

y es preciso atribuirle un valor igual en el cuerpo real M. Pero ya sabemos que aquella energía tiene por expresión:

$$\frac{3}{2} K\nu T. \tag{3}$$

Por consiguiente se tiene:

$$\Theta = KT. \tag{4}$$

Por otra parte, cada coordenada del éter, que designamos en una forma general por $q_3$, no aparece sino en un solo término:

$$\frac{1}{16} abc q_3^2$$

de la expresión de la energía eléctrica.

Resulta que, en el conjunto canónico, la energía que pertenece á una sola coordenada $q_3$ es dada término medio por la expresión:

$$\frac{1}{2}\Theta = \frac{1}{2}\text{KT}, \qquad (5)$$

y, de este modo, volvemos al teorema de la equirrepartición de la energía, aunque la forma actual sea algo diferente de la que antes se observaba. Pero si se prolonga el raciocinio, se vuelve á encontrar la fórmula de lord Rayleigh. En efecto, como el número de los estados elementales $q_3$ para los cuales la longitud de onda está incluída entre $\lambda$ y $(\lambda + d\lambda)$ es igual á :

$$\frac{8\pi}{\lambda^4} abcd\lambda$$

se obtiene :

$$\frac{4\pi \text{KT}}{\lambda^4} abcd\lambda$$

para la energía eléctrica media en los sistemas que constituyen el conjunto canónico, siempre que dicha energía pertenezca al intervalo comprendido entre las longitudes de onda $\lambda$ y $(\lambda + d\lambda)$. Ahora bien la energía ha de tener este mismo valor para los sistemas que estudiamos, lo que da por unidad de volumen:

$$\frac{4\pi \text{KT}}{\lambda^4} d\lambda$$

que es precisamente la ley de lord Rayleigh :

$$\frac{8\pi \text{KT}}{\lambda^4} d\lambda,$$

siempre que se tenga en cuenta que, en el éter que rodea el cuerpo M, la energía magnética es igual á la energía eléctrica ; por lo tanto hay que duplicar el valor encontrado.

Observemos que esta demostración de la ley de Rayleigh, ideada por Lorentz, tiene un alcance completamente general, y abarca á todos los movimientos de los electrones y también todas las acciones que se ejercen entre estas partículas y la materia, pues no es preciso distinguir los electrones libres de los que sólo vibran en torno de una posición de equilibrio.

Además podemos afirmar que, al menos implícitamente, se tuvo en cuenta la influencia de la radiación sobre el movimiento de los electrones y también la modificación que éstos producen en los rayos por

una especie de difracción, pudiendo ser acompañada por un cambio en la frecuencia, conforme al principio de Doppler-Fizeau, cuando los electrones tienen un movimiento de traslación.

**51. Valor medio del cuadrado de la velocidad de traslación de un electrón.** — Podemos buscar ahora el valor medio del cuadrado de la velocidad de traslación $v$ de un electrón, siendo $c_1$ la velocidad de propagación de la luz.

Para ello observemos que los componentes de esta velocidad $\xi, \eta, \zeta$, figuran implícitamente en la expresión :

$$W = W_0 \frac{abc}{64\pi^2 c_1^2} \Sigma \lambda^2 \dot{q}_3^2 + \Sigma l_{ij} \dot{q}_{2i} \dot{q}_{3j} \tag{1}$$

de *tres modos distintos*. Hay primero una parte $W_1$ que es una función homogénea del segundo grado de las tres componentes $\xi, \eta, \zeta$; otra $W_2$ contiene los productos de estas magnitudes por las componentes que se refieren á los demás electrones. Por último hay que tener en cuenta términos que, entre los de la segunda suma de (1), se refieren al electrón considerado; los designaremos por $W_3$.

Supongamos, pues, que la distancia de este electrón al más cercano entre los demás, y también su menor distancia á la pared sean mucho mayores que el diámetro 2R. Entonces se puede despreciar $W_2$ y atribuír á $W_1$ el valor :

$$W_1 = \frac{1}{2} m v^2 \tag{2}$$

siendo $m$ :

$$m = \frac{e^2}{6\pi c_1^2 R} \tag{3}$$

ó sea la masa electromagnética del electrón para velocidades pequeñas, y esta energía $W_1$ se puede llamarla energía cinética de la partícula.

En cuanto el valor medio buscado del cuadrado $v^2$, está dado por la expresión :

$$\overline{v^2} = \frac{\int v^2 e^{-\frac{E}{\Theta}} d\tau}{\int e^{-\frac{E}{\Theta}} d\tau} \tag{4}$$

debiendo los campos de integración comprender al conjunto canónico total.

El cálculo de esta expresión nos da la relación:

$$\frac{1}{2} m' \overline{v^2} = \frac{3}{2} \mathrm{KT} \tag{5}$$

teniendo el factor $m'$ por valor:

$$m' = m \frac{e^2}{6\pi^3 c_1{}^2 \mathrm{R}^2} \int_{\lambda_0}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi \mathrm{R}}{\lambda} d\lambda. \tag{6}$$

Si ahora se supone que el límite inferior $\lambda_0$ de las longitudes de onda es mucho mayor que el diámetro 2R del electrón, se puede substituir sen $\frac{2\pi \mathrm{R}}{\lambda}$ por $\frac{2\pi \mathrm{R}}{\lambda}$ lo que da para $m'$:

$$m' = m + \left[ \frac{4\pi^2 \mathrm{R}^2 e^2}{\lambda 6\pi^3 c_1{}^2 \mathrm{R}^2} \right]_{\lambda_0}^{\infty} = m + \frac{2e^2}{3\pi c_1{}^2 \lambda_0}$$

expresión en la cual el último término es muy pequeño con respecto á $m$, de modo que se puede suprimirlo, y se tiene:

$$\frac{1}{2} m' \overline{v^2} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} \mathrm{KT}. \tag{7}$$

Resulta que, si se puede prescindir de las ondas de longitudes muy pequeñas, la *energía cinética media* de un electrón es igual á la de una molécula. Pero ya no es así cuando la longitud $\lambda_0$ se vuelve comparable á las dimensiones del electrón ó menor que éstas, y en el límite:

$$\lambda_0 = 0$$

el segundo término se pone igual á $m$, de modo que se tiene:

$$m' = 0.$$

de donde, según la relación (5), el cuadrado medio $\overline{v^2}$ toma un valor infinito.

Ahora bien este resultado no tiene ningún sentido físico, y lo mismo sucede con las consecuencias relativas á la energía del éter que se sacan del teorema de equirrepartición, cuando éste se aplica hasta á las vibraciones más rápidas.

52. **Las ecuaciones de Hamilton ya no son aplicables cuando los electrones carecen de masa material.** — Van der Waals (junior) ha demostrado que, cuando los electrones carecen de masa material, sus velocidades quedan completamente determinadas, siempre que el campo electromagnético sea perfectamente definido. Si, por ejemplo, se los considera como partículas de forma invariable, la fuerza y el par resultantes que proceden de las acciones de la forma :

$$X = f + \frac{1}{c_1}(\eta\gamma - \zeta\beta)$$

tienen que anularse, lo que nos suministra las componentes de las velocidades de traslación y rotación. Pero como las ecuaciones de Hamilton determinan las magnitudes de las aceleraciones y dejan sin determinación las de las velocidades, ya no son aplicables, y sería imposible construír un conjunto *canónico* en el sentido habitual dado á esta palabra.

Si se consideran las fórmulas obtenidas más arriba, no se ve claramente á primera vista porque las ecuaciones de Hamilton fallan en el caso presente. Sin embargo, con un examen más detenido, se puede averiguar que, si se generalizan los raciocinios á todas las longitudes de onda, hasta á las más pequeñas, se presenta el obstáculo que precisamente llamó la atención de Van der Waals. En efecto, la expresión :

$$W = W_0 + \frac{abc}{64\pi^2 c_1^2} \Sigma\lambda^2 \dot{q}_3^2 + \Sigma l_{ij} \dot{q}_{2i} \dot{q}_{3i} \qquad (1)$$

se puede transformar y escribir :

$$W = (W) + \sum\left[\frac{1}{2}\sigma_j(\dot{q}_{3j} + \Sigma s_{ij}\dot{q}_{2i})^2\right] \qquad (2)$$

no conteniendo (W) sino las velocidades $\dot{q}_1$ y teniendo por expresiones las cantidades $\sigma_j$ y $s_{ij}$ :

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{abc\lambda^2}{32\pi^2 c_1^2} \\ s_{ij} &= \frac{l_{ij}}{\sigma_j} \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

En cuanto al último término :

$$\sum\left[\frac{1}{2}\sigma_j(\Sigma s_{ij}\dot{q}_{2i})^2\right]$$

es igual á la parte de $W_0$ en la fórmula (1) que contiene las velocidades de los electrones.

Formemos pues las ecuaciones de Lagrange para una coordenada $q_{2j}$ y para otra $q_{3j}$, y tendremos :

$$\sum\left[\sigma_j s_{ij}\frac{d}{dt}(\dot{q}_{3j}+\Sigma s_{ij}\dot{q}_{2i})\right]+\Sigma[\sigma_j s_{ij}(\dot{q}_{2i}+\Sigma s_{ij}\dot{q}_{2i})]=\frac{d}{dq_{2i}}(W-V) \qquad (4)$$

$$\sigma_j\frac{d}{dt}(\dot{q}_{3j}+\Sigma s_{ij}\dot{q}_{2i})=\frac{d}{dq_{3j}}(W-V), \qquad (5)$$

relaciones cuyos primeros términos contienen las aceleraciones.

Ahora bien, estos términos desaparecen, si para una $i$ arbitrariamente elegida, se toma la suma de todas las ecuaciones (5), después de multiplicadas por el factor $S_{ij}$ correspondiente ; restando esta suma de la ecuación (4), se obtiene otra relación que no contiene sino coordenadas y velocidades, y como existe una fórmula de esta clase por cada valor de $i$, se pueden determinar todas las velocidades $\dot{q}_2$ en función de las coordenadas y de las velocidades $\dot{q}_3$.

Hemos de observar que, en la exposición de Lorentz, esta dificultad fué subsanada mediante el artificio de las uniones ficticias que imponen á la longitud de onda el límite inferior $\lambda_0$. En efecto, si en la suma :

$$\sum\left[\frac{1}{2}\sigma_j(\Sigma s_{ij}\dot{q}_{2i})^2\right] \qquad (6)$$

se prescinde de todas las $j$ para las cuales se tiene :

$$\lambda<\lambda_0$$

esta suma ya no resultará igual á la parte de $W_0$ en la fórmula (1) que contiene las velocidades $\dot{q}_2$, sino que habrá que agregar al segundo miembro de (2) una función homogénea y del segundo grado de estas velocidades. Hasta en el caso que se tomase $\lambda_0$ mucho mayor que el diámetro de un electrón, el valor de (6) se volvería muy pequeño con relación á la parte de $W_0$ de la cual acabamos de hablar.

El término que hay que agregar á (2) toma entonces la forma :

$$\sum\frac{1}{2}mv^2.$$

si nos colocamos en las condiciones antes indicadas, y todo se verifica como si los electrones estuviesen provistos de una masa material $m$.

El artificio de las uniones ficticias de Lorentz que garantizan la desigualdad $\lambda > \lambda_0$ no deja de ser algo criticable; sin embargo no hemos de olvidar que en las verificaciones experimentales, siempre se trata de longitudes de onda mucho mayores que $\lambda_0$ que escapan á la exclusión artificial del físico holandés, y por esto, le parece natural admitir que, si por una ú otra razón las vibraciones más rápidas no intervienen, los fenómenos debidos á la vibraciones más lentas se verifican como si las pequeñas longitudes de onda se hallaran eliminadas mediante ciertas uniones existentes en el sistema.

53. **El teorema de la equirrepartición y la radiación negra según Lorentz.** — Algunos han afirmado, dice Lorentz, que la fórmula de la radiación negra, deducida del teorema de la equirrepartición de la energía, es cierta, resultando su contradicción con la observación del hecho de que el estado que representa sería un estado *final* verificable sólo después de un tiempo infinito, realizándose el intercambio de energía entre la materia y el éter con suma lentitud, cuando se trata de las pequeñas longitudes de onda. De este punto de vista resultaría experimentalmente otro estado, representado posiblemente por la fórmula de Planck, que se manifestaría como si fuera el estado final del sistema.

Pero el gran sabio holandés rechaza esta explicación y no cree que la distinción anterior puede resolver las dificultades. En efecto, se podría considerarla como satisfactoria si sólo para las ondas muy pequeñas, por ejemplo para el ultravioleta, el teorema de la equirrepartición nos llevara á consecuencias incompatibles con la experiencia. Pero no hemos de olvidar que el desacuerdo es muy sensible entre los resultados teóricos y experimentales dentro de los límites del espectro infrarrojo y visible. Una chapa de plata pulida á 15° tiene un poder absorbente para la luz igual á $\frac{1}{10}$, y ya observamos que la misma debería resplandecer con un brillo igual á $\frac{1}{50}$ del que se verifica en un cuerpo negro á la temperatura de 1200°. Consideremos rayos amarillos: según el teorema de la equirrepartición, un sistema de ellos, de intensidad dada por la fórmula de lord Rayleigh, que se entrecruzan en todas las direcciones podría evidentemente estar en equilibrio con la chapa á 15°, que supondremos colocada en un recinto

de paredes perfectamente reflectoras. No vemos ningún motivo que nos impida atribuír el equilibrio á la igualdad de las cantidades de luz absorbida y emitida en un intervalo de tiempo dado. Resulta necesariamente, en razón de lo que sabemos acerca de la magnitud del poder absorbente, que el poder emisivo tendría que presentar la magnitud antes definida, tal que, si al principio las radiaciones amarillas no existiesen en el recinto que rodea la placa, lo llenarían después de una fracción sumamente pequeña de segundo.

Sin embargo hemos de observar que, para llegar á esta conclusión, Lorentz por supuesto admite que, á una temperatura dada, el poder emisivo de la chapa permanece siempre igual, estando llenado ya el espacio ambiente de rayos ó vacío de ellos. De este modo rechaza completamente la aplicación directa del teorema de la equirrepartición al fenómeno de la radiación negra.

54. **Adaptación de la teoría de Planck.** — Mientras el teorema de equirrepartición no permite explicar el máximo de la función:

$$F(\lambda T) = \frac{1}{\lambda^5}\varphi(\lambda T) \qquad (1)$$

para cada valor $\lambda_m$ de la longitud de onda, la fórmula de Planck suministra una explicación del mismo y da para el producto $\lambda_m T$, constante según la ley de Wien, el valor:

$$\lambda_m T = 0{,}201 \frac{ch}{K}$$

desígnado $h$ la segunda constante introducida por Planck en la teoría de la radiación al lado de la constante única que encontramos en la fórmula de lord Rayleigh. Según Lorentz, uno se da cuenta fácilmente de que, para la radiación negra, la fórmula ha de contener al menos *dos constantes,* la una para determinar la intensidad total:

$$\int_0^{\infty} F(\lambda T)d\lambda,$$

y la otra para fijar la posición del máximo, debiendo estas dos constantes ser universales, ó debiendo sus valores depender de algo común á todos los cuerpos ponderables, ó de algo que caracterice al éter.

Ahora bien, la carga eleéctrica $e$ de un electrón, su masa $m$ y su radio R son precisamente magnitudes de esta clase. Si se tiene en

cuenta las dimensiones y si la carga está expresada en unidades electrostáticas, es menester que $h$ sea proporcional á :

$$\frac{e^2}{c}$$

ó bien á :

$$cm\mathrm{R}.$$

cualquiera sea el sistema de unidades, pues el factor de proporcionalidad no depende de la elección hecha.

Por otra parte, si $\overline{v^2}$ es el cuadrado medio de la velocidad de un electrón á la temperatura T y $l$ la distancia para la cual la energía potencial mutua $\frac{e^2}{l}$ de dos electrones es igual á la energía KT, es preciso también que la longitud de onda $\lambda m$ sea proporcional á $\frac{e^2\mathrm{R}}{\overline{v^2}}$ ó á $\frac{l^2}{m\overline{v^2}}$ quedando el factor de proporcionalidad á su vez independiente de la elección de las unidades. Luego si fuera posible fundar una fórmula satisfactoria de la radiación sin recurrir á otros elementos que los suministrados por la teoría común de los electrones, habríamos de encontrar para aquellas proporciones una deducción teórica y al propio tiempo una definición del valor del coeficiente numérico. Pero, según Lorentz, no podemos confiar mucho en el éxito, y por esto, la constante $h$ ha de interpretarse mediante consideraciones de orden del todo distinto. Por otra parte, por constituír las ecuaciones de Hamilton el verdadero fundamento del teorema de equirrepartición, hemos de prever que, en la teoría de los electrones, será preciso imaginar acciones á las cuales estas ecuaciones ya no sean aplicables y del todo diferentes de las que intervienen en los problemas de la mecánica común.

Supongamos que la emisión de la luz y del calor radiante se verifique siempre por cantidades finitas de energía de magnitud determinada para cada frecuencia, podemos admitir dos hipótesis : ó bien estos elementos de energía conservan su individualidad propia durante su propagación, lo que significa que quedan concentrados en espacios más ó menos pequeños, ó bien cada elemento puede extenderse en espacios cada vez mayores á medida que se aleja de su punto de origen.

Ahora bien, si nos limitamos á la aplicación de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, tendremos que optar por la segunda hipótesis, pues en dichas ecuaciones no hay nada susceptible

de mantener una cantidad de energía en un volumen limitado, y por otra parte, ya sabemos las dificultades enormes que surgirían si quisiéramos modificar aquellas ecuaciones que resumen en una forma maravillosa todos nuestros conocimientos respecto á los fenómenos electromagnéticos en el éter.

Por otra parte, hasta si se prescinde de ellas, y si se tiene sólo en cuenta las observaciones y los raciocinios generales, se puede demostrar que una concentración de las unidades de energía en espacios muy pequeños es imposible, por ser incompatible con un gran número de fenómenos de difracción é interferencias. En efecto es preciso admitir que los varios elementos de energía no tienen entre sí ningún lazo de coherencia, pues están emitidos en una forma tal que quedan independientes los unos de los otros, y por lo tanto que las vibraciones capaces de dar origen á una interferencia nítida han de pertenecer al mismo elemento. Ahora bien, hay casos en que, en el haz primitivo considerado, las vibraciones que van á interferir se hallan á distancias las unas de las otras mayores que 10 centímetros, sea en la dirección de los rayos, sea en una dirección lateral. Sería necesario pues que cada elemento pudiese extenderse en un espacio mayor que 1 decímetro cúbico, y si esta posibilidad se admitiese, ya no se ve por qué el mismo elemento no podría extenderse mucho más allá.

55. **Hipótesis de una estructura de la radiación.** — En un espacio lleno de radiación negra, la energía no está nunca distribuída en una forma uniforme. Al contrario, la intensidad del campo electromagnético varía allí de un modo irregular de un punto al otro, y en el mismo punto con el tiempo. Estas desigualdades son debidas evidentemente á las interferencias de los rayos que, sin tener ninguna coherencia, se entrecruzan en todas las direcciones. Se ponen mayores si en cada haz considerado por separado existen acumulaciones locales de energía, ó sea si fuera de los efectos de interferencias, la radiación está dotada de *cierta estructura*. Tal es el concepto general de Lorentz. Si la estructura no es propia de la misma naturaleza de los rayos, no puede verificarse sino á distancias muy pequeñas mediante las irregularidades y fluctuaciones del movimiento molecular en la materia que desprende los rayos. Es cierto que las mismas irregularidades se manifestarán en las radiaciones elementales desprendidas de las varias moléculas; pero á distancias del cuerpo radiante muy grandes con respecto á las dimensiones moleculares, se borrarán en razón de que el movimiento se compone allí de una infinidad de movimientos ele-

mentales en cada uno de los cuales la energía resulta como *infinitamente diluída.*

Cualquiera sea el origen de las desigualdades de la radiación, podemos imaginar caso en que son susceptibles de producir efectos sensibles. Supongamos, por ejemplo, que un corpúsculo M de naturaleza cualquiera se encuentra en el espacio ocupado por la radiación negra; experimentará presiones que no serán iguales en todas las direcciones. Empujado ora en un sentido, ora en otro, tomará un movimiento análogo al *browniano* que tiene una partícula en suspensión en un líquido. Pero sabemos que la intensidad de este movimiento depende de la temperatura del líquido ambiente, y por lo tanto se puede prever una agitación del corpúsculo M que va á depender también de la temperatura.

Esta observación, la debemos á Einstein, y de ella podemos sacar una idea de la magnitud de las desigualdades de la radiación. En efecto, han de ser tales que, si hay un gran número de corpúsculos idénticos á M, reciban término medio por cada grado de libertad una energía cinética igual á $\frac{1}{2}$ KT. Ahora bien Einstein ideó un método ingenioso para efectuar este cálculo.

Supongamos, para precisar los datos, que el corpúsculo M no pueda moverse sino en la dirección del eje de las $x$, y sean $v$, $v'$, los valores de su velocidad á dos épocas separadas por un intervalo $(t_2 - t_1) = \tau$, muy grande con respecto á los períodos vibratorios, y, sin embargo, bastante corto para que la diferencia $(v' - v)$ sea muy pequeña.

Se admite generalmente que la fuerza ejercida por la radiación se compone de otras dos, la una proporcional á la velocidad $v$, que puede ser considerada como una resistencia, la designaremos por A$v$, siendo A un factor independiente de las desigualdades que consideramos, pero determinado por el valor medio de la energía por unidad de volumen. En cuanto á la otra, depende al contrario de dichas desigualdades.

Representemos por $\mathfrak{Q}$ la cantidad de movimiento comunicada al corpúsculo por esta última componente de la fuerza durante el tiempo $\tau$ y su masa por $m$, se tendrá:

$$mv' - mv = \mathfrak{Q} - \mathrm{A}v\tau \qquad (1)$$

de donde:

$$v' = v\left(1 - \frac{\mathrm{A}\tau}{m}\right) + \frac{\mathfrak{Q}}{m}. \qquad (2)$$

Si ahora admitimos que hay un gran número de corpúsculos idénticos á M, y formamos para cada uno una ecuación análoga á (2), podremos después tomar los *valores medios para el conjunto* de las dos miembros después de elevados al cuadrado. Observemos que suponemos el sistema en un estado estacionario, lo que da :

$$\overline{r'^2} = r^2 \qquad (3)$$

y, en virtud de la pequeñez de $\frac{A\tau}{m}$ podemos prescindir del cuadrado de esta magnitud. Por otra parte, como $r$ y $\mathfrak{Q}$ tienen indiferentemente el signo + ó —, resulta :

$$\overline{r\mathfrak{Q}} = 0.$$

De este modo, se encuentra :

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{\mathfrak{Q}^2}{4A\tau}. \qquad (4)$$

Ahora habría que hacer hipótesis sobre la constitución de la radiación y sobre la naturaleza de los corpúsculos M, y la fórmula (4) permitiría calcular la intensidad de la agitación que se les comunica.

56. **Aplicación del método al electrón.** — Observaremos desde luego que, aplicando el método á un resonador líneal, Planck, Einstein y Hopf, al admitir que las desigualdades debidas á las interferencias son las únicas que se deben tener en cuenta, han encontrado para $\frac{1}{2} m\overline{v^2}$ un valor sensiblemente menor que $\frac{1}{2}$ KT. De esto se podría deducir la existencia de una estructura de la radiación, por ejemplo la requerida por la hipótesis de los elementos de energía *persistentes*, siempre que se conociera de un modo seguro lo que pasa en el resonador. Pero desgraciadamente cuando se adopta lo teoría de las unidades de energía. los fenómenos que se verifican en el resonador escapan á todo análisis, y evidentemente el detalle de los mismos puede tener gran influencia sobre las fuerzas que ejercen los rayos.

Por esto mismo á Lorentz le pareció conveniente someter al cálculo el caso más sensible que se pueda imaginar, y quizás el sobre el cual estamos autorizados á razonar con mayor confianza, y el gran sabio

aplicó la ecuación (4) del párrafo anterior á un *solo electrón considerado como libre.*

En efecto esta hipótesis no se opone á la aplicación de la fórmula, siempre que se la multiplique por 3 para tener el valor medio de la energía cinética total.

De este modo, Lorentz encontró :

$$A = \frac{8\pi R^2}{c} \int F d\lambda \tag{1}$$

$$\Omega^2 = \frac{5R^2\pi}{2c} \int \lambda^4 F^2 d\lambda \tag{2}$$

siendo F la *función* F(λ, T), y, para la energía :

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{15}{64\pi} \frac{\int \lambda^4 F^2 d\lambda}{\int F d\lambda}. \tag{3}$$

De estos resultados, el gran sabio holandés dedujo después varias consecuencias.

I. Supongamos primero que la repartición de la energía sea conforme al teorema de equirrepartición, excluyéndose las longitudes de onda menores que $\lambda_0$.

Se tendrá, según la fórmula conocida de lord Rayleigh :

$$F_1(\lambda, T) = \frac{8\pi KT}{\lambda^4} \tag{4}$$

y de un modo independiente de la longitud de onda $\lambda_0$ :

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{15}{8} KT. \tag{5}$$

Por supuesto Lorentz esperaba encontrar, como lo explicamos más arriba :

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{3}{2} KT \tag{6}$$

y explicó la divergencia atribuyéndola á un error en sus cálculos que, sin embargo, á pesar de repetidas averiguaciones, le fué imposible hallar.

II. Siendo el método adoptado actualmente del todo distinto del procedimiento de la mecánica estadística, se puede probar por F toda forma de función arbitrariamente elegida. Ahora bien, para todos los casos compatibles con las leyes de Boltzmann y Wien, se obtiene partiendo de la fórmula :

$$F(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} \varphi(\lambda T)$$

y poniendo :

$$x = \lambda T :$$

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{15T}{64\pi} \frac{\int \frac{\varphi^2(x)}{x^6} dx}{\int \frac{\varphi(x)}{x^5} dx}, \tag{7}$$

expresión en la cual la razón de las dos integrales es una *constante*, lo que significa que la energía media de un electrón resulta proporcional á la temperatura.

III. Es particularmente interesante calcular el valor que toma la energía cinética cuando la función F toma la forma :

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{ch}{K T \lambda}} - 1} \tag{8}$$

que le atribuye la teoría de Planck, pues esta forma puede ser considerada como la representación de la *distribución real de la energía.*

Ahora bien, poniendo :

$$x = \frac{ch}{\lambda K T},$$

Lorentz encontró :

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{15}{8} KT \frac{\int_0^\infty \frac{x^4}{(e^x - 1)^2} dx}{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx} \tag{9}$$

lo que da :

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = 0{,}315 KT, \tag{10}$$

la razón de las dos integrales teniendo por valor :

0,168.

Lorentz considera con satisfacción el hecho de que haya desaparecido la constante $h$, dependiendo entonces la energía tomada por el electrón únicamente de KT. Pero, lo que es menos satisfactorio, el coeficiente numérico resulta *casi cinco veces menor* de lo que habría de ser.

Lorentz trata de averiguar si el resultado sería mejor atribuyendo á F una forma distinta de la de Planck, siempre que fuera de acuerdo con las observaciones acerca de la radiación negra. En efecto no hay ninguna dificultad en encontrar una función que tenga un solo máximo y ofrezca así la característica principal de la función de la radiación, al mismo tiempo que dé para el segundo miembro de la relación:

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{15}{64\pi} \frac{\int \lambda^4 F^2 d\lambda}{\int F d\lambda}$$

un valor tan grande como se quisiese, pues si se supone el máximo cada vez más limitado, manteniéndose fijo el valor de $\int F d\lambda$, se hace crecer indefinidamente la integral que contiene $F^2$ con relación á la integral dominadora. Sin embargo, en virtud de la gran diferencia entre el valor de $\frac{1}{2} m\overline{v^2}$ dado por (10) y $\frac{3}{2}$ KT, opina Lorentz que hemos de temer que una función F que suministra este último valor se aleje mucho de la de Planck y por esto no quede en conformidad con la experiencia. Según el gran físico, la energía de la agitación comunicada á los electrones por la radiación negra, sólo en virtud de las desigualdades de interferencias, no parece poder alcanzar el valor $\frac{3}{2}$ KT, aunque conserve el mismo orden de magnitud.

57. **Resumen y discusión.** — Ya vemos por el análisis que antecede del informe presentado por Lorentz á la Conferencia de Bruselas, que el sabio holandés confiesa la necesidad de modificar la teoría electromagnética fundada sobre la hipótesis electrónica ideada por él, si se quiere deducir de ella la ley de la radiación de Planck. Pone de manifiesto que, en su forma primitiva, la teoría nos llevaría á la ley de lord Rayleigh para todas las longitudes de onda. La memoria de Lorentz, en esta forma, completa y generaliza los desarrollos suministrados por el físico de Berlín.

En resumen, todos los mecanismos posibles del electrón llevan á la

ley de Rayleigh, cuando son tales que las ecuaciones de Hamilton les sean aplicables.

En la discusión que tuvo lugar en la Conferencia de Bruselas después de la lectura del informe de Lorentz, Langevin observó que las ecuaciones dejan de revestir la forma de Hamilton cuando las velocidades de los electrones ya no son pequeñas con respecto á la propagación de la luz. Ahora bien, en este caso interviene una deformación de los electrones que depende de su velocidad, de modo que la energía potencial se convierte á su vez en función *no cuadrática* de las velocidades y no solamente de las coordenadas. Es cierto que el hecho no tendría ninguna influencia sobre los problemas que se refieren á la radiación negra, en las cuales las velocidades de los electrones son siempre bastante pequeñas.

Por otra parte, contestó Lorentz, para tener en cuenta los electrones deformables, habría que hacer intervenir la *tensión de Poincaré* ó tensión interna.

Por último Planck discutió la cuestión de saber si la fórmula :

$$r^2 = r\left(1 - \frac{A\tau}{m}\right) + \frac{2}{m}$$

del informe de Lorentz se puede aplicar á un electrón libre en un campo de radiación negra. Opina que la contradicción hallada entre el valor calculado :

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{15}{8} \mathrm{KT}$$

de la energía cinética media del electrón y el valor esperado $\frac{3}{2}$ KT, atribuída por Lorentz á un error de cálculo, se podría explicar fácilmente de este modo. Por otra parte según el físico de Berlín, no podemos como lo hizo el sabio de Leyden, introducir un tiempo $\tau$, grande con relación á los períodos vibratorios y á la vez bastante pequeño para que el cambio de velocidad del electrón durante el mismo tiempo permanezca pequeño.

En resumidas cuentas diremos que hay todavía mucho que hacer si se quiere poner la teoría electrónica en armonía con la de los quanta.

En otro campo de investigación, veremos ahora cómo el profesor Langevin se ocupó de la misma cuestión en cuanto al magnetismo.

# CAPÍTULO III

## LA TEORÍA CINÉTICA DEL MAGNETISMO Y LOS MAGNETONES

58. **Momento magnético molecular.** — La teoría cinética del paramagnetismo permite calcular los momentos magnéticos moleculares tomando por base los resultados experimentales.

Para las substancias paramagnéticas diluídas, como el oxígeno ó las soluciones poco concentradas de sales paramagnéticas, la experiencia suministra un coeficiente de imantación $\chi$ por unidad de volumen (susceptibilidad magnética) inversamente proporcional á la temperatura absoluta. Pero es más cómodo hacer intervenir el coeficiente de imantación molecular $\chi_m$ que no es sino el de proporcionalidad del campo magnético H con el momento magnético I tomado bajo la acción de dicho campo por una molécula gramo de la substancia considerada :

$$\chi_m = \frac{H}{I} \tag{1}$$

La ley de variación de este coeficiente con la temperatura está expresada por la relación :

$$\chi_m = \frac{C_m}{T} \tag{2}$$

siendo $C_m$ la *constante de Curie* referida á la molécula gramo.

Cada molécula es la sede de corrientes parciales *particulares* y se admite que tiene un momento magnético $\mu$ que se supone bastante grande, cuando no resulta nulo, ó sea cuando la substancia no es diamagnética, para que sus variaciones, bajo la influencia del campo H, sean despreciables.

Si todas las moléculas reales contenidas en una molécula gramo, de número N igual á la constante de Avogadro, estuviesen orientadas paralelamente, se tendría para la molécula gramo un momento magnético :

$$I_0 = \mu N, \tag{3}$$

correspondiente á la saturación absoluta.

Pero la agitación térmica hace que tal paralelismo resulte imposi-

ble : en el caso de las substancias diluídas en que las acciones directrices mutuas de los imanes moleculares son despreciables cuando falta todo campo exterior, no puede haber ninguna orientación privilegiada, de modo que el momento resultante I es necesariamente nulo.

Al contrario, si existe un campo exterior H, predomina la orientación para la cual el eje magnético de la molécula resulta paralelo á dicho campo. Sin embargo se comprende que este predominio queda tanto menos fuerte cuanto mayor es la agitación térmica. Suponiendo que se pueda aplicar á este caso los resultados generales de la mecánica estadística, fácil es calcular el momento magnético resultante I para una molécula gramo.

En efecto, sea $\alpha$ el ángulo que hace el eje magnético de una molécula de momento $\mu$ con la dirección del campo exterior H. La energía potencial relativa de la molécula y del campo tendrá por expresión :

$$-\mu \mathrm{H} \cos \alpha \tag{4}$$

y la ley de repartición de Boltzmann nos enseña que el número de las moléculas cuyos ejes magnéticos tienen direcciones comprendidas en un ángulo sólido $d\Omega$, alrededor de otra caracterizada por el ángulo $\alpha$, tiene por valor :

$$d\mathrm{N} = \mathrm{C}e^{\frac{\mu \mathrm{H} \cos \alpha}{\mathrm{KT}}} d\Omega = \mathrm{C}e^{\frac{\mathrm{I}_0 \mathrm{H} \cos \alpha}{\mathrm{RT}}} . d\Omega. \tag{5}$$

En cuanto á la constante C relativa á una molécula gramo, queda definida por la condicción de que el número total de las moléculas sea igual á N, ó sea poniendo :

$$\mathrm{N} = 2\pi c \int_0^{\pi} e^{a \cos \alpha} . \operatorname{sen} \alpha d\alpha = 2\pi c \int_{-1}^{+1} e^{ax} dx \tag{6}$$

expresión en la cual se tiene :

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{I}_0 \mathrm{H}}{\mathrm{RT}} \\ x &= \cos \alpha \\ dx &= -\operatorname{sen} \alpha d\alpha. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

La contribución de una molécula de dirección $\alpha$ al valor del momento magnético resultante I es $\mu \cos \alpha$, de donde por consiguiente :

$$I = 2\pi c\mu \int_0^\pi e^{a\cos\alpha} \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha d\alpha = 2\pi c\mu \int_{-1}^{+1} xe^{ax}dx. \qquad (8)$$

Si se compara (6) y (8), teniendo en cuenta (3), se tiene:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\int_{-1}^{+1} xe^{ax}dx}{\int_{-1}^{+1} e^{ax}dx} = \frac{Cha}{Sha} - \frac{1}{a}. \qquad (9)$$

Observemos ahora que los momentos magnéticos moleculares, determinados cuando se compara la teoría anterior con la experiencia, son tales que $I_0$ alcanza raras veces el valor:

$$3.10^4,$$

de modo que, á la temperatura común $a$, resulta á lo más del orden:

$$H.10^{-6},$$

y como los campos de que podemos disponer no pasan de 50.000 gauss, $a$ permanece siempre muy pequeña con relación á la unidad, cuando el campo exterior H actúa solo sobre las moléculas y tiende á orientarlas, caso que se verifica con las substancias diluídas.

Si ahora desarrollamos el segundo miembro de (9) en serie según las potencias crecientes de $a$, obtendremos para los dos primeros términos:

$$\frac{Cha}{Sha} - \frac{1}{a} = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots \qquad (10)$$

y podemos por lo tanto substituir á la relación (9) la siguiente:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{a}{3},$$

de donde:

$$I = \frac{I_0^2}{3RT} H, \qquad (11)$$

ecuación que expresa la ley del paramagnetismo con un coeficiente de imantación molecular:

$$\chi_m = \frac{I_0^2}{3RT}.$$

conforme á la ley de Curie, y con el valor de la constante del mismo sabio:

$$C_m = \frac{I_0^2}{3R}$$

Podemos así calcular el momento molecular saturado $I_0$, aprovechando la constante de Curie obtenida experimentalmente, pues tenemos:

$$I_0 = \sqrt{3RC_m}. \qquad (12)$$

Langevin aplicó esta fórmula al oxígeno, habiendo mostrado Curie que este gas obedece á la ley de variación del coeficiente de imantación en razón inversa de T. Obtuvo para $I_0$, ó sea para el momento magnético que tomaría una molécula gramo si todos los imanes elementales estuvieran orientados paralelamente, un número del mismo orden de magnitud que las imantaciones determinadas experimentalmente con el fierro saturado.

Weiss utilizó la misma fórmula para calcular los momentos magnéticos moleculares de muchas sales, tomando por base el coeficiente de imantación de sus soluciones diluídas que varía con la temperatura, conforme á la ley de Curie, y este método le suministró la mayor parte de los datos experimentales en los cuales fundó su hipótesis de los *magnetones*.

59. **Caso de las substancias ferromagnéticas.** — Los demás datos fueron deducidos de la teoría del campo molecular y corresponden al caso de las substancias ferromagnéticas.

Según dicha teoría, se da intervención á las acciones mutuas entre moléculas dejadas á un lado en el párrafo anterior. Según Weiss, la acción directriz que ejerce sobre una molécula la substancia imantada ambiente equivale á la superposición al campo magnético H de Maxwell de otro campo molecular proporcional á la intensidad de imantación de la substancia, dependiendo el coeficiente N de proporcionalidad de la naturaleza de ésta. En efecto parece lógico admitir que la acción directriz que ejercen las moléculas sobre una de ellas sea determinada por el grado de paralelismo efectuado.

Ahora bien, el orden de magnitud del coeficiente N, suministrado por aquella teoría y su variación en las aleaciones con la composición de estas, parecen incompatibles con la hipótesis de que las acciones mutuas de orientación son de origen magnético. Probablemente serían

de naturaleza igual á la de las acciones directrices que mantienen en un cristal una molécula orientada en la red correspondiente.

La hipótesis del campo molecular conserva el resultado expresado por la ecuación :

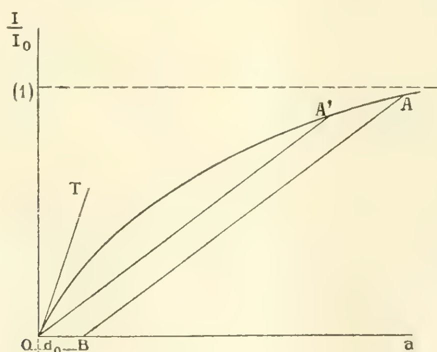
$$\frac{I}{I_0}=\frac{\int_{-1}^{+1} xe^{ax}dx}{\int_{-1}^{+1} e^{ax}dx}=\frac{Cha}{Sha}-\frac{1}{a}, \qquad (1)$$

con la condicion de atribuír á $a$ el valor :

$$a=\frac{I_0}{RT}(H+NI). \qquad (2)$$

Por otra parte la introducción del término NI permite á $a$ tomar valores mucho mayores para un mismo campo H de los que toma cuando no hay acciones mutuas, y por consiguiente al segundo miembro de (1) acercarse á la unidad, que corresponde á los grandes valores de $a$, ó, lo que es equivalente, permite á I acercarse á $I_0$ que corresponde á la *saturación absoluta*.

Por último la forma que entonces toma la expresión (1) es tal que la imantación I tomada por la substancia figura á la vez en los dos miembros, de modo que el medio más sencillo para resolver esta ecua-




ción con respecto á I consiste en un procedimiento meramente gráfico. Las relaciones (1) y (2) nos dan dos ecuaciones entre las incógnitas $a$ é $\frac{I}{I_0}$ y la solución es dada por la intersección de las curvas correspondientes, cuando se toma por coordenadas $a$ é $\frac{I}{I_0}$.

La curva que corresponde á la ecuación (1) se desprende del origen con una tangente OT cuyo coeficiente angular es $\frac{1}{3}$ y tiende hacia la asíntota :

$$\frac{I}{I_0} = 1$$

para $a = \infty$.

En cuanto á la ecuación (2) representa una recta, y se puede ponerla en la forma :

$$a = a_0 + \frac{NI_0^2}{RT} \cdot \frac{I}{I_0} \cdot \qquad (3)$$

ó bien :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{RT}{NI_0^2} a - \frac{H}{NI_0} \cdot \qquad (4)$$

La abscisa $a_0$ del punto en que esta recta BA corta el eje de las $a$ es el valor de $a$ que corresponde al campo exterior H, y como ya lo sabemos, queda siempre muy pequeño con respecto á la unidad para los campos realizables, de modo que la recta pasa siempre muy cerca del origen.

En cuanto al coeficiente angular que aparece en la ecuación (4) :

$$\frac{RT}{NI_0^2},$$

se ve que es proporcional á la temperatura absoluta T, de modo que el punto de intersección A que da el valor buscado de $\frac{I}{I_0}$ corresponde *á una saturación tanto mayor cuanto menor es la temperatura.*

Cerca del cero absoluto, la saturación $I_0$ está sensiblemente realizada y, de medidas hechas en estas condiciones, Weiss y Kamerlingh Onnes han podido deducir los momentos magnéticos del fierro, del níquel y del cobalto.

60. **Imantación espontánea.** — Imaginemos que el campo magnético H varía, mientras la temperatura T permanece constante y bastante baja para que el coeficiente angular $\frac{RT}{NI_0^2}$ permanezca sensiblemente menor que $\frac{1}{3}$. La recta se desplazará paralelamente y muy poco, conforme á lo observado; por otra parte la intensidad de imantación I

variará también muy poco y corresponderá á la saturación para la temperatura considerada. Por último, resulta de la forma en que se cortan la recta y la curva que el estado así alcanzado estará estable. Si el campo magnetizador se vuelve nulo, habrá otro punto de intersección en el origen y se ve fácilmente que este punto corresponde á un estado inestable si se supone como lo hicimos que la recta OA se encuentra debajo de la tangente OT en el origen. Resulta que la substancia ha de *imantarse así espontaneamente,* cuando falta el campo exterior H, bajo la acción mutua de sus moléculas.

Observaremos que este resultado es del todo compatible con los datos experimentales, pues las substancias ferromagnéticas están formadas por la aglomeración de un gran número de cristales. Cada uno se imanta espontáneamente en una dirección dada á la vez por la orientación de la red cristalina y por los accidentes de su forma exterior.

La dirección ha de variar de un cristal á otro, y si los cristales son suficientemente pequeños, la imantación *media* resulta nula, menos para las substancias como la *magnetita*, en las cuales los conjuntos de red uniforme pueden presentar una extensión mucho mayor que en el caso de los metales.

En resumen, la necesidad de un campo magnetizador para conseguir experimentalmente la saturación, corresponde á la de hacer paralelas las imantaciones de los varios cristales.

La existencia de una imantación espontánea es por otra parte la característica más nítida de la propiedad ferromagnética. Exige que la recta OA se encuentre debajo de la tangente á la curva en el origen, y es preciso tener :

$$\frac{RT}{NI_0^2} < \frac{1}{3}.$$

En cuanto á la temperatura, la relación :

$$\Theta = \frac{NI_0^2}{3R},$$

corresponde á la desaparición del ferromagnetismo cuando crece la temperatura : es el *punto de transformación* observado por Curie.

A temperaturas mayores, cuando no hay campo magnético exterior, la recta ya no encuentra la curva sino en el origen, pero de modo que el estado correspondiente sea estable, y entonces la substancia no se imanta espontáneamente.

Bajo la acción de un campo exterior H, se observa fácilmente en la figura que la imitación comunicada es tal que el campo molecular NI resulte del mismo orden de magnitud que H, lo que significa que $a$ es siempre muy pequeña, y se puede aplicar la relación:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{Cha}{Shg} - \frac{1}{a} \tag{1}$$

en la forma:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{a}{3}, \tag{2}$$

de donde, en virtud de la expresión:

$$a = \frac{I_0}{RT}(H + NI) \tag{3}$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{I_0}{3RT}(H + NI),$$

lo que da:

$$I\left(T - \frac{NI_0^2}{3R}\right) = \frac{I_0^2}{3R} H. \tag{4}$$

Luego, si se designa por $C_m$ la constante de Curie:

$$C_m = \frac{I_0^2}{3R}.$$

se tiene:

$$I(T - \Theta) = C_m H. \tag{5}$$

Es conveniente tener presente que, como en el caso del paramagnetismo estudiado más arriba, la imantación ha de ser proporcional al campo, teniendo por valor el coeficiente molecular correspondiente $\chi_m$:

$$\chi_m = \frac{C_m}{T - \Theta}. \tag{6}$$

Se ve que, en vez de variar en razón inversa de la temperatura absoluta T, como sucede cuando no existe ninguna acción mutua entre las moléculas, aquel coeficiente varía en razón inversa del exceso de esta temperatura sobre la del punto de transformación observado por Curie, y por lo tanto, no puede existir sino en el caso que dicho exceso resulte positivo.

Por último la determinación experimental de $\chi_m$ permite calcular la constante de Curie y deducir el momento molecular:

$$I_0 = \sqrt{3RC_m}.$$

Este fué el método que Weiss y sus discípulos aplicaron á un gran número de substancias, especialmente á la *magnetita,* á los metales ferromagnéticos y sus aleaciones.

61. **Hipótesis de los magnetones de Weiss.** — El caso de la magnetita tratado por el procedimiento que acabamos de definir fué uno de los primeros que llevaron á Weiss á su hipótesis de los magnetones.

En efecto, las determinaciones de la constante de Curie, hechas para la magnetita *arriba de su punto de transformación,* suministran valores constantes dentro de intervalos determinados de temperatura, pero *bruscamente variables* para intervalos distintos. Estas observaciones nos enseñan que, al pasar de uno á otro, la substancia experimenta un cambio de estado que modifica su momento magnético molecular, y los valores sucesivos de $C_m$ son entre sí como los números enteros 4, 5, 6, 8 y 10 (exactamente 4, 4,88, 6,05, 6,16, 10,06). Resulta que el momento molecular de la magnetita aumenta con la temperatura, pero en una forma discontinua y por múltiplos enteros de una misma cantidad.

Otra relación simple de igual clase existe entre los momentos magnéticos moleculares del fierro y del níquel deducidos de la imantación á saturación cerca del cero absoluto. En efecto los números obtenidos para el fierro (12410) y para el níquel (3381) son entre sí como 11 es á 3, ó sea múltiplos enteros de un *magnetón gramo* igual á 1123,5.

Admitido este valor del magnetón gramo, Pascal para las sales en disolución, y más adelante la señorita Feytis para las sales en estado sólido, han conseguido averiguar igual concordancia en cuanto al coeficiente de imantación molecular de varias substancias, como el ferrocianuro de potasio y amonio, el pirofosfato de hierro y amonio, el cloruro férrico, el sulfato férrico, etc., en las cuales se vuelve á encontrar siempre un múltiplo del magnetón.

Por otra parte, el estudio de los metales ferromagnéticos arriba del punto de transformación de Curie, mediante la aplicación de la fórmula:

$$I_0 = \sqrt{3R\chi_m(T - \Theta)}$$

dió también resultados de acuerdo con la hipótesis de Weiss; podemos citar el níquel que da:

$$I_0 = 9018,$$

ó sea 8.03 magnetones.

Si se hace decrecer progresivamente la proporción de fierro en las aleaciones de fierro y níquel, se obtiene para $I_0$ el límite:

$$I_0 = 10140$$

que corresponde á 9,03 magnetones, y, si se tiene en cuenta que la saturación magnética del níquel á las bajas temperaturas corresponde á 3 magnetones, y también que las sales de níquel en solución tienen un coeficiente de imantación paramagnético de 16 magnetones, se observa una variación de la imantación molecular con el estado físico ó químico de la substancia, siendo comparable esta variación á la que presenta la magnetita arriba del punto de Curie; además la misma se verifica siempre por números enteros de magnetones. Con estos resultados es indudable que la hipótesiss de Weiss aperece fundada en una base de observación muy seria.

62. **Los magnetones y los quanta de acción.** — Sommerfeld dió la teoría de Plank en una forma personal que fué criticada; la estudiaremos en uno de los capítulos siguientes. Si se adopta este modo nuevo de presentar la hipótesis de los elementos de acción, se puede poner en evidencia, como lo hizo el profesor Langevin en el informe leído por él en la Conferencia de Bruselas, una relación notable entre dicha teoría de Sommerfeld y la hipótesis de los magnetones de Weiss.

Imaginemos, dice Langevin, que el momento magnético molecular sea debido á la circulación de un electrón de carga $e$ y masa $m$ en torno de un centro de atracción que actúe, por ejemplo, en razón inversa de la $n^{ma}$ potencia de la distancia. Sea $r$ el radio de la órbita y ω la velocidad angular de rotación; el momento magnético será en el sistema electromagnético:

$$M = \frac{e\omega r^2}{2}. \qquad (1)$$

Si la fuerza atractiva tiene por valor:

$$\frac{A}{r^{n+1}},$$

la energía potencial es de la forma:

$$U = -\frac{1}{n}\frac{A}{r^n} \tag{2}$$

si suponemos el origen en el infinito.

Por otra parte, la igualdad de la fuerza atractiva y de la centrífuga se traduce por la relación:

$$m\omega^2 r = \frac{A}{r^{n+1}}, \tag{3}$$

de donde:

$$U = -\frac{m\omega^2 r^2}{n}, \tag{4}$$

teniendo la energía cinética á su vez por valor:

$$W = \frac{m\omega^2 r^2}{2}. \tag{5}$$

La hipótesis de Sommerfeld, como lo veremos, se puede resumir en la forma siguiente.

La acción que corresponde á un período:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

de revolución del electrón ha de ser igual á:

$$\frac{h}{4}.$$

Por otra parte, de la ecuación:

$$\int_0^\tau (W - U)dt = \frac{h}{4}$$

se saca:

$$m\omega^2 r^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\frac{2\pi}{\omega} = \frac{h}{4}, \tag{6}$$

de donde:

$$m\omega r^2 = \frac{h}{8\pi}\cdot\frac{2n}{n+2}. \tag{7}$$

Ahora bien, $m\omega r^2$ es proporcional al momento magnético M, lo que da :

$$M = \frac{e}{m} \frac{h}{8\pi} \frac{n}{n+2} \tag{8}$$

y, para el momento magnético de una molécula gramo :

$$I_0 = \frac{m}{Me} \frac{h}{8\pi} \frac{n}{n+2}. \tag{9}$$

Si la acción, para una revolución, en vez de corresponder á un elemento de acción $h$, da lugar á la intervención de un número entero cualquiera de estos elementos, resulta que $I_0$ se vuelve múltiplo de la cantidad expresada por (9).

De este modo se ve que, aplicándose la teoría de Sommerfeld, se obtiene una conexión notable entre la hipótesis de los magnetones y la de los elementos de acción.

Observemos además que la relación (9) permite calcular el momento $I_0$, tomando por base la constante $h$ de Planck, si se elige para el exponente $n$ un valor determinado. Si se admite, por ejemplo, una atracción en razón inversa del cuadrado de la distancia, ó sea si se pone :

$$n = 1$$

$$h = 6.5 . 10^{-27}$$

$$M = 7 . 10^{23}$$

$$\frac{e}{m} = 1.77 . 10^{7}$$

se encuentra para $I_0$ el valor :

$$I_0 = 1080,$$

lo que significa una coincidencia muy satisfactoria con el valor 1123,5 del magnetón gramo determinado especialmente por Weiss, tomando por base de sus cálculos la saturación del níquel y del fierro á bajas temperaturas y el estudio de las soluciones paramagnéticas.

# CAPÍTULO IV

## LA TEORÍA DE LOS QUANTA GENERALIZADA POR EINSTEIN Á LOS CALORES ESPECÍFICOS

63. **Insuficiencia de la mecánica molecular para explicar el calor atómico de los sólidos.** — La teoría cinética del calor encontró una de sus primeras y más hermosas confirmaciones en el dominio de los calores específicos, puesto que permitió deducir exactamente el calor específico de un gas monoatómico de su ecuación de estado.

Pero en este mismo dominio se manifestó hace algunos años la insuficiencia de la mecánica molecular. En efecto, según ella, la energía cinética media de un átomo, no unido por un vínculo rígido á otro ó á varios, es siempre, como ya lo sabemos, igual á :

$$\frac{3}{2}\frac{RT}{N},$$

siendo R la constante de los gases, T la temperatura absoluta, y N el número contenido en una molécula gramo.

Resulta que el calor específico de volumen constante de un gas perfecto monoatómico referido á una molécula gramo tiene por valor :

$$\frac{3}{2}R = 2{,}97 \text{ calorías}$$

por molécula-gramo-grado, lo que concuerda perfectamente con la experiencia.

Pero si el átomo, en vez de tener completa libertad de movimiento, está ligado de un modo cualquiera con una posición de equilibrio, ha de corresponderle, además de la energía cinética media indicada, una energía potencial. Y esto, hay que admitirlo necesariamente en el caso de los cuerpos sólidos.

Por otra parte, si el equilibrio de los átomos es estable, todo desplazamiento de uno de ellos corresponde á una energía potencial positiva, y como la diferencia media á partir de la posición de equilibrio tiene que aumentar con la agitación térmica, ó sea con la temperatura, á esta energía potencial ha de corresponder siempre un término

positivo en la expresión del calor específico. De este modo, el calor atómico de un sólido tendría que ser, según la mecánica molecular clásica, siempre mayor que 2,97. Ahora bien, sabemos que, si las fuerzas que ligan un átomo á su posición de equilibrio son proporcionales á la distancia entre ésta y la actual, la teoría da al calor atómico el valor :

$$2 \cdot 2{,}97 = 5{,}94,$$

conforme, por otra parte, á la ley de Dulong y Petit, según la cual el calor atómico de los sólidos á la temperatura común tiene valores que no se apartan sensiblemente de 6, y sabemos, hace tiempo ya, que ciertos sólidos tienen un calor atómico menor. Para limitarnos á un caso concreto, Weber desde 1875, encontró que el calor atómico del diamante á la temperatura —50° tiene por valor 0,76, ó sea mucho menor que el previsto por la mecánica molecular. Este resultado basta para mostrar que esta mecánica queda impotente para prever correctamente el calor específico de los sólidos, al menos á bajas temperaturas.

Por otra parte, las leyes de la dispersión han permitido establecer que un átomo no puede ser considerado como un punto material, sino que contiene partículas electrizadas, siendo cada una móvil con respecto á las demás de un mismo átomo. Pero hemos de confesar que, en contra de lo que podría prever la mecánica estadística, estas partículas no nos suministran ninguna contribución al cálculo del calor específico.

Einstein, profesor hace algunos años en la Universidad de Praga, ahora en la de Berlín, observó que las investigaciones de Planck acerca de la radiación térmica han aclarado en una forma inesperada estos problemas antes bastante nebulosos, cuando parecía imposible encontrar una relación entre la insuficiencia de la teoría y otras propiedades de la materia. Según el físico citado, si no podemos aun substituír á la mecánica clásica otra que dé resultados más exactos, al menos es dable prever la ley según la cual se verifican las contradicciones á la de Dulong y Petit, y establecer relaciones que liguen cuantitativamente estas divergencias á otras propiedades físicas de la substancia considerada.

64. **Intervención de las ideas de Planck.** — Hemos de recordar aquí la marcha general del pensamiento de Planck, punto de partida de sus investigaciones. Para obtener teóricamente la ley de la radiación

en equilibrio en un recinto á temperatura dada, ó sea de la radiación negra, basta determinar la densidad y la composición espectral que convienen al estado de equilibrio estadístico de la misma con un gas perfecto, siempre que se idée un mecanismo que permita el intercambio de energía entre la radiación y el gas. Ahora bien, este mecanismo lo suministra una partícula electrizada ligada á un punto fijo por fuerzas proporcionales á la distancia. De este modo se llega al concepto de un oscilador ó resonador. Además se admite que resonadores de esta clase, moléculas de un gas perfecto y radiación térmica se encuentran encerrados en un espacio limitado por paredes perfectamente reflectoras. Los resonadores, en razón de sus cargas eléctricas, han de emitir radiación y experimentar impulsos por parte de la que existe en el recinto. Por otra parte, la partícula electrizada de cada resonador recibe los choques de las moléculas é intercambia así energía con el gas. Estos resonadores, pues, hacen posible un intercambio de energía entre el gas y la radiación, y la repartición de la energía en el sistema en equilibrio estadístico resulta perfectamente determinada por la energía total, si se admite que hay resonadores de todas las frecuencias.

De este modo, dice Einstein en el informe que presentó á la Conferencia de Bruselas, el físico Planck, en un trabajo basado en la electromagnética de Maxwell y las ecuaciones de la mecánica en cuanto á los movimientos de la partícula electrizada del resonador, consiguió demostrar que, si falta el gas, ha de existir entre la energía cinética media $E_\nu$ de un resonador de tres grados de libertad y frecuencia $\nu$, y la densidad correspondiente $U_\nu$ de la radiación, la relación:

$$\overline{E}_\nu = \frac{3c^3 U_\nu}{8\pi\nu^2}. \qquad (1)$$

Por otra parte, resulta de la mecánica estadística que, si el gas y los resonadores no electrizados son los únicos elementos presentes en el recinto, existe entre la temperatura T y la energía media $\overline{E}_\nu$ de un resonador, la relación:

$$\overline{E}_\nu = \frac{3RT}{N}. \qquad (2)$$

Ahora bien, si los resonadores se encuentran en equilibrio simultáneo con la radiación y el gas, como hemos de suponerlo, las relaciones (1) y (2) tienen que resultar satisfechas ambas dentro de los límites

en los cuales quedan aplicables al nuevo sistema. En efecto, si una de las dos no se verificara, resultaría, término medio, un transporte de energía entre los resonadores, ó entre estos y la radiación, ó bien entre el gas y los resonadores.

Eliminando $\overline{E}_\nu$ de las dos ecuaciones, se tiene la condición de equilibrio entre la radiación y el gas:

$$U_\nu = \frac{8\pi}{c^3}\frac{R}{N}\nu^2 T, \tag{3}$$

y esta es la única ley en conformidad á la vez con la mecánica y la electrodinámica; sin embargo los físicos admiten por lo general que èsta relación no está de acuerdo con los datos experimentales.

En efecto, mientras nos da para la radiación total una densidad:

$$\int_0^\infty U_\nu d\nu = \infty \tag{4}$$

y nos lleva por lo tanto á la imposibilidad de un equilibrio entre la radiación y la materia para un contenido material térmico distinto de cero, la experiencia nos enseña al contrario con toda certeza que un equilibrio estadístico existe realmente para una densidad finita de la radiación.

Esta divergencia entre la teoría y la observación hizo que Planck propusiera la solución que ya sabemos: rechazó la relación (2), ó sea los fundamentos de la mecánica, y conservó la expresión (1), aunque esta misma esté fundada en la mecánica, así obtuvo su teoría de la radiación, substituyendo la fórmula (2) por otra que resultó de la introducción de la nueva hipótesis de los quanta.

Observa Einstein que, para desarrollar su teoría personal, no necesita ni la fórmula (2) ni otra cualquiera que la reemplace, sino la (1) únicamente, que expresa la energía media de un resonador cuando emite en conjunto tanta radiación como absorbe.

Sin embargo, con el rechazo de la fórmula (2) podemos aun tener fe en la exactitud de la relación (1), no sólo cuando el resonador está sometido á la acción única de la radiación, sino cuando experimenta además los choques de las moléculas del gas á igual temperatura, pues, en caso contrario, en el conjunto la radiación emitida resultaría mayor que la absorbida por los resonadores ó viceversa.

Además, es también aplicable la relación (1) cuando las variaciones de energía de los resonadores se verifican especialmente por inter-

cambio con las moléculas gaseosas. Lo será también hasta cuando los intercambios con la radiación ya no se verifiquen, como sucede por ejemplo si los resonadores no contienen cargas eléctricas. Por último la relación (1) conserva también su validez cuando la substancia con la cual el resonador está en equilibrio, en vez de ser un gas perfecto, resulta un cuerpo de propiedades cualesquiera, siempre que el resonador vibre en una forma más ó menos monocromática.

65. **Relación entre los calores específicos y la fórmula de la radiación.** — Si en la expresión:

$$\overline{E}_\nu = \frac{3c^3 U_\nu}{8\pi\nu^2} \qquad (1)$$

se introduce para la densidad de la radiación $U_\nu$ una función de $\nu$ y T que represente en la mejor forma las experiencias realizadas acerca de la radiación negra, se obtiene la energía térmica media de un resonador más ó menos monocromático en función de $\nu$ y T. Si tomamos la fórmula de Planck, por ser ella la que representa los fenómenos observados con la mayor aproximación, la ecuación (1) se convierte en:

$$\overline{E}_\nu = \frac{3h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \qquad (2)$$

siendo el valor de K:

$$K = \frac{R}{N}.$$

y $h$ la segunda constante de Planck:

$$h = 6,55.10^{-27}.$$

Si ahora admitimos que un átomo gramo de un cuerpo simple en estado sólido contiene N resonadores iguales y sensiblemente monocromáticos, tendremos el calor atómico si diferenciamos con respecto á T y multiplicamos por N.

Pongamos:

$$z = \frac{h\nu}{KT},$$

y tendremos:

$$\frac{dE_\nu}{dT} = \frac{d}{dT}\frac{3h\nu}{e^z - 1} = \frac{d}{dz}\left(\frac{3h\nu}{e^z - 1}\right)\frac{dz}{dT}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{3h\nu}{e^z-1}=-\frac{3h\nu e^z}{(e^z-1)^2}$$

$$\frac{dz}{dT}=-\frac{h\nu}{KT^2},$$

de donde :

$$\frac{dE\nu}{dT}=\frac{3h^2\nu^2}{KT^2}\frac{e^z}{(e^z-1)^2}$$

y si ponemos :

$$\frac{h}{K}=\beta,$$

siendo :

$$K=\frac{R}{N},$$

resulta :

$$\frac{dE\nu}{dT}=3K\left(\frac{\nu\beta}{T}\right)^2\cdot\frac{e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right)^2}.$$

$$\frac{dE\nu}{dT}=\frac{3R}{N}\frac{e^{\frac{\beta\nu}{T}}\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right)^2},$$

Si ahora multiplicamos por N, tendremos el calor atómico :

$$c=3R\frac{e^{\frac{\beta\nu}{T}}\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right)^2}. \qquad (3)$$

Cuando se compara esta fórmula con las curvas que representan las variaciones del calor atómico en función de las bajas temperaturas entre $T=0$ y $T=100$, por ejemplo, se observa una concordancia muy satisfactoria entre las curvas teóricas y las empíricas debidas á las investigaciones de Nernst, y aunque aparezcan entre las dos familias de curvas divergencias *sistemáticas,* el acuerdo resulta muy notable si se tiene en cuenta que cada curva teórica corresponde á un solo parámetro $\nu$, frecuencia propia de los átomos del elemento considerado. Resulta que nuestra relación (1) queda así confirmada por la experiencia, aunque su conservación no encuentre justificación completa del punto de vista teórico.

Sin embargo, Einstein observa que, de la confirmación experimental de la relación (1), no estamos autorizados á deducir ningún argumento á favor de la hipótesis de los quanta, pues dicha confirmación puede llevarnos en general, en cuanto á la mecánica, á conclusiones distintas de las que se deducen de la ley de la radiación combinada con la fórmula (2).

66. **Explicación de las divergencias sistemáticas entre las curvas teóricas y experimentales.** — Ya dijimos que aparecen divergencias de orden sistemático entre las curvas teóricas y experimentales cuando se refieren á los mismos ejes; las primeras aparecen algo desviadas hacia la derecha con respecto á las otras, lo que significa que el calor específico (ordenada) decrece menos rápidamente á las bajas temperaturas, de lo previsto por la teoría. Esta diferencia necesita una explicación y para ello Einstein considera que es necesario estudiar más detenidamente el mecanismo de las oscilaciones térmicas de los átomos.

Madelung y después Sutherland han probado que, si para las sales binarias, como por ejemplo KCl se calcula, tomando por base las constantes de elasticidad, la frecuencia de las vibraciones elásticas cuya longitud de onda es del mismo orden de magnitud que la distancia de las moléculas, esta frecuencia resulta muy comparable á la del infrarrojo del mismo cuerpo obtenida por el estudio de los *rayos restantes*. Este resultado es evidentemente de los más notables y permite suponer que las acciones mutuas entre los átomos que originan las frecuencias infrarrojas ó, en una forma más general, las oscilaciones de los átomos en torno de sus posiciones de equilibrio, son tambien las que se oponen á la deformación del sólido.

Sentado esto, Madelung y Einstein han tratado de calcular, cada uno por separado, estas frecuencias propias, fundándose en las constantes elásticas, considerando Einstein más bien las frecuencias propias de que depende la variación de los calores específicos.

De este modo consiguió la relación siguiente entre $\nu$ y K :

$$\frac{V}{\nu} = \lambda = 1{,}08 \,.\, 10^{3} \,.\, M^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{6}} K^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

siendo V la velocidad de propagación de la luz en el vacío, $\lambda$ la longitud de onda que corresponde á la frecuencia $\nu$ también en el vacío, M la masa molecular, y $\rho$ la densidad de la substancia considerada.

El sabio encontró así para la plata :

$$\lambda . 10^4 = 73,$$

mientras Nernst ya había deducido de sus mediciones de los calores específicos :

$$\lambda . 10^4 = 90.$$

No hay duda de que exista entre estos dos resultados una concordancia notable no explicable por el azar, y es admisible suponer, que las *mismas acciones* determinan á la vez las propiedades elásticas y la frecuencia propia térmica. Por otra parte, se comprende que una fórmula como la anterior no nos da la frecuencia sino con una aproximación algo deficiente, pues no interviene en el cálculo de ella ninguna de las propiedades particulares de la substancia considerada, como sería, por ejemplo, la naturaleza del sistema cristalino al cual pertenece.

Observemos también que la exactitud de la relación (1) depende de la forma en la cual varía la distancia de los átomos vecinos, pues la masa del átomo y el coeficiente de compresibilidad bastan para caracterizar la substancia considerada. De esta observación Einstein deduce que se puede substituír á la compresibilidad otra propiedad fundamental y conseguir así una expresión de la frecuencia propia mediante consideraciones de dimensiones.

Conforme á esta idea, Lindemann eligió la temperatura de fusión $T_s$, y llegó, para esta temperatura, á la determinación siguiente de $\nu$ :

$$\nu = 2,12 . 10^{12} \sqrt{\frac{T_s}{M v^{\frac{2}{3}}}} \qquad (2)$$

resultando el coeficiente numérico de la observación experimental, siendo $T_s$ la temperatura de fusión, $v$ el volumen de una molécula gramo y M la masa molecular, y esta fórmula fué confirmada experimentalmente con una exactitud mucho mayor de lo que se podía esperar.

Podemos ahora desarrollar la explicación que da Einstein de las diferencias sistemáticas observadas entre las variaciones teóricas y experimentales del calor específico con la temperatura.

Según el físico de Berlín, proceden del hecho de que las oscilaciones térmicas de los átomos son muy distantes de resultar monocromáticas, de modo que no tienen una frecuencia determinada, sino un *dominio de frecuencias.*

Ya sabemos cómo se puede calcular $\nu$ mediante las acciones elásticas, pero en el raciocinio que sirve de base á este cálculo se supone

para simplificar que los átomos que rodean el átomo considerado permanecen inmóviles, mientras en la realidad oscilan también y así transforman el movimiento del primer átomo. Ahora bien, si suponemos, por ejemplo, dos átomos vecinos que oscilan en la dirección de la recta que los une, quedando los demás en estado de reposo, habrán de oscilar evidentemente en la dirección de la recta con una frecuencia mayor cuando las fases esten opuestas, ó sea cuando sus elongaciones tengan á cada instante signos contrarios, que no cuando oscilen en concordancia de fases. En efecto, en el primer caso, la acción elástica interviene mientras desaparece en el segundo, pues la distancia entre los dos átomos queda constante. Es preciso por lo tanto, según Einstein, suponer que el cuerpo actúa cono si fuera compuesto de resonadores de frecuencias distintas.

En conformidad con estas ideas, Nernst y Lindemann encontraron que los hechos experimentales se pueden expresar de un modo satisfactorio, si se admite que la substancia actúa como un conjunto de resonadores cuya mitad es de frecuencia $\nu$ y la otra de frecuencia $\frac{\nu}{2}$. En esta hipótesis, la fórmula del calor específico toma la forma:

$$c = \frac{3}{2} R \left[ \frac{e^{\frac{\beta\nu}{T}} \left( \frac{\beta\nu}{T} \right)^2}{\left( e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1 \right)^2} + \frac{e^{\frac{\beta\nu}{2T}} \left( \frac{\beta\nu}{2T} \right)^2}{\left( e^{\frac{\beta\nu}{2T}} - 1 \right)^2} \right] \qquad (3)$$

Ahora bien, Einstein no admite que esta expresión del calor específico sea susceptible de tener una significación teórica, pues le parece que para ello se precisaría una fórmula en la cual interviniese la suma de una infinidad de valores de $\nu$.

Asimismo confiesa que Nernst y Lindemann introdujeron así un verdadero perfeccionamiento mediante aquella fórmula, que representa á los hechos de un modo mucho más satisfactorio, y esto sin la intervención de otra constante característica de la substancia considerada.

67. **Calores específicos de los compuestos sólidos.** — Es fácil ver que las fórmulas anteriores permiten también representar los calores específicos de los compuestos sólidos. Para ello basta admitir para cada clase de átomos una expresión de la forma (3) del párrafo anterior y efectuar la suma.

Observaremos que los compuestos tienen por lo general frecuencias propias en el infrarrojo que se manifiestan por fajas de absorción y dominios correspondientes de reflexión metálica.

Drude demostró que estas frecuencias propias corresponden á oscilaciones de átomos electrizados; luego son oscilaciones de igual naturaleza que las estudiadas más arriba y originadas por las mismas fuerzas. La única diferencia consta en el hecho de que las fuerzas provocan el movimiento de los átomos bajo la acción de la radiación, en contra de lo que se verifica en el caso de la agitación térmica, y ofrecen en el espacio cierta distribución, de modo que no se pueden considerar como independientes las unas de las otras las fases de oscilaciones de átomos vecinos. Resulta que es también inadmisible la identidad de las *frecuencias ópticas y térmicas,* aunque posiblemente no sean muy distintas.

Todas estas previsiones en cuanto á los compuestos están verificadas por las observaciones experimentales. Por ejemplo, según las investigaciones de Nernst, los calores específicos de los cloruros de potasio y sodio se pueden representar satisfactoriamente si se admite en cada uno de ellos la misma frecuencia para el átomo metálico y el átomo halógeno. Hay concordancia entre la frecuencia propia deducida de las mediciones térmicas y la frecuencia media de la faja de absorción infrarroja.

Pero estos resultados muy notables no han de hacernos olvidar que no sabemos nada en cuanto á las leyes verdaderas del movimiento periódico de los átomos, especialmente en el caso de que velocidades bastante pequeñas coexisten con grandes aceleraciones. Esta ignorancia queda más manifiesta cuando se trata de generalizar á otros mecanismos los raciocinios que dan la variación, según la temperatura, de la energía media de los sistemas cuyas oscilaciones periódicas son simples. Estos nuevos problemas consisten siempre en buscar la energía media tomada en un campo de radiación negra por un sistema que lleva cargas eléctricas. Ahora bien, se puede resolverlos sin pasar por la mecánica cuya insuficiencia es evidente, y es menester, en el estado actual de la cuestión, según Einstein, considerar *como un azar muy feliz* el hecho de que la relación:

$$\overline{E}_\nu = \frac{3c^3 U_\nu}{8\pi\nu^2}$$

á la cual nos llevan ó aparentan llevarnos los raciocinios de Planck,

resulta exacta como lo prueba la teoría de los calores específicos, pues en la realidad consideraciones análogas á las de que se valió este físico, podrían llevarnos á resultados falsos. Como prueba de ello, Einstein toma el ejemplo siguiente.

Consideremos, dice, un resonador que puede ser, si así lo queremos, una molécula monoatómica de frecuencia propia ultravioleta, movil del todo en un campo de radiación. Es dable, mediante el estudio de las acciones que ejerce la radiación sobre este resonador, calcular la energía cinética media del movimiento de conjunto resultante para él, y debemos encontrar para esta energía el valor previsto por la teoría cinética de los gases para una mólecula. Ahora bien, las consideraciones anteriores nos dan al contrario, si se toma por base las leyes empíricas de la radiación expresadas por la fórmula de Planck, valores mucho más pequeños para la energía cinética del movimiento de conjunto.

De allí concluye Einstein que no podemos aceptar sino con desconfianza toda aplicación nueva del método que consiste en deducir las propiedades térmicas de la materia de la fórmula de la radiación, pues en toda aplicación de esta índole, hemos de basarnos en la mecánica cuya validez no es general y la electrodinámica que tal vez tendremos que modificar también.

En resumen, el punto principal de la cuestión consiste en saber en qué forma hemos de modificar la mecánica para ponerla de acuerdo con la ley de la radiación y las propiedades térmicas de la materia.

68. **La hipótesis de los quanta.** — Lo más claro que sepamos al respecto, lo encontramos en el trabajo de Planck respecto á la ley de la radiación, y llegamos á un resultado de acuerdo con la experiencia para la variación de la energía cinética de un resonador en función de la temperatura, si suponemos que este resonador no puede tomar energía sino por múltiplos enteros de un *quantum* fijo $h\nu$.

Según la mecánica estadística, la probabilidad $dW$ para que la energía de un resonador lineal esté comprendida entre E y $(E + dE)$ á la temperatura T, resulta de la fórmula:

$$dW = Ce^{-\frac{E}{KT}} . dE. \qquad (1)$$

y, conforme á la hipótesis de los quanta, hay que substituír á este resultado el siguiente:

$$W = Ce^{-\frac{E}{KT}}, \tag{2}$$

aplicable solamente á los valores de E *múltiplos enteros de* $h\nu$, mientras para todos los demás valores habría que poner:

$$W = 0. \tag{3}$$

Se deduce para la energía media de un oscilador:

$$\overline{E} = \frac{\Sigma EW}{\Sigma W} = \frac{o \, . \, e^{-\frac{O}{KT}} + h\nu e^{-\frac{h\nu}{KT}} + 2h\nu e^{-\frac{2h\nu}{KT}} + \ldots}{e^{-\frac{O}{KT}} + e^{-\frac{h\nu}{KT}} + e^{-\frac{2h\nu}{KT}} + \ldots} \tag{4}$$

Esta expresión se confunde con la dada por Planck para substituír á la relación:

$$\overline{E}_\nu = \frac{3RT}{N}.$$

expresión que con la otra:

$$\overline{E}_\nu = \frac{3c^3 U_\nu}{8\pi\nu^2}$$

lleva á la fórmula de la radiación.

Einstein observa que, cualquiera sea la sencillez de la hipótesis, y la facilidad con la cual permite alcanzar la fórmula de Planck, no queda por esto menos extraña cuando la consideramos detenidamente.

En efecto, dice el sabio de Berlín, sea un átomo de diamante á la temperatura absoluta de 73°; ¿qué nos enseña la fórmula de Planck en cuanto al estado oscilatorio de dicho átomo? Pongamos con Nernst:

$$\nu = 27,3 \, . \, 10^{12}$$

y escribamos la fórmula de la energía media:

$$\frac{\overline{E}}{h\nu} = e^{-18.6}.$$

Vemos que la energía media del *resonador diamante* está representada por una fracción muy pequeña, más ó menos igual á $10^{-8}$ del *quantum* de energía $h\nu$. A cada instante, pues, es menester que no se verifique oscilación en $10^8$ átomos, sino en uno solo, permaneciendo los demás en estado de reposo absoluto. Ahora bien, cualquiera sea nuestra con-

vicción respecto á la impotencia de la mecánica en lo que se refiere á la explicación de estos fenómenos, el resultado no deja de ser asombroso.

Otro ejemplo: según Eucken y Nernst, el diamante, á las bajas temperaturas, tiene un coeficiente de conductibilidad térmica más ó menos igual al del cobre, y la variación de este coeficiente con la temperatura se verifica lentamente. Podemos tratar de representar esta observación fundándonos en la teoría de los quanta y construír una imagen de la forma en la cual se mueven los elementos de energía.

Como se encuentran á una distancia muy grande los unos de los otros á las bajas temperaturas, han de moverse cada uno en una forma completamente independiente. Por otra parte, un quantum, si queremos tener la posibilidad de hablar de una oscilación periódica simple de los átomos, ha de quedar ligado con un átomo dado al menos durante el tiempo de una semioscilación. Si pasa después á otro, será seguramente á uno vecino del primero, y siempre conforme á las leyes del azar. Ahora bien, el flujo de calor ha de ser proporcional al *gradiente* de distribución de los quanta en el espacio. Luego á las bajas temperaturas, el flujo es proporcional á:

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{h\nu}{KT}}\right)$$

ó sea á:

$$-\frac{1}{T^2}e^{-\frac{h\nu}{KT}}\frac{dT}{dx}.$$

y la conductibilidad térmica á su vez será proporcional á:

$$\frac{1}{T^2}e^{\frac{h\nu}{KT}}$$

De este modo, en contra de los resultados obtenidos por Eucken, la conductibilidad habría de tender exponencialmente hacia cero á las bajas temperaturas.

Ahora si quisieramos evitar estas conclusiones, tendríamos que hacer, respecto al desplazamiento de los quanta, hipótesis del todo inverosímiles, y esto nos enseña, concluye Einstein, que la teoría de los quanta, en su forma más sencilla, puede difícilmente conciliarse con los hechos experimentales de un modo satisfactorio.

*(Continuará.)*

# LA RIQUEZA EN CAFEÍNA DE LA YERBA MATE

POR

LUIS GUGLIALMELLI Y LUCIANO P. J. PALET

---

Los procedimientos de dosificación de la cafeína en el té, café, nuez de kola, guarana, etc., son aplicables, en general, á la yerba mate. Con tal objeto se han propuesto infinidad de métodos; pero todos ellos, salvo rarísimas excepciones, están basados en la propiedad que tiene el *cloroformo* de disolver la cafeína en cantidades notables.

Estos métodos pueden clasificarse en tres grandes grupos :

*a)* Extracción de la cafeína preparando previamente una decocción ó infusión con agua y ulterior tratamiento de la solución con cal, magnesia, un compuesto de plomo ó mercurio con el fin de insolubilizar las materias tanantes, pécticas, etc., y luego practicar sobre el filtrado, directamente ó concentrado, la extracción clorofórmica.

Entre los principales métodos pertenecientes á este grupo se encuentran el de Domergue y Nikolas, el de Stahlschmidt (modificado á su vez por Allen), el de Caines, el de Dworkowitsch (con una ligera variante debida á Hilger y Juckenack), que emplean también como en el anterior el tetracloruro de carbono y que tildado de dar resultados bajos, ha sido recientemente modificado por Lendrich y Murdfield, quienes tratan la materia seca — objeto de análisis — *con vapor de agua* antes de la extracción con el disolvente tetracloruro de carbono; de otra manera solo se obtenía un 60-70 por ciento de la cafeína (1).

(1) ALLEN, *Isolation and estimation of caffeine*, páginas 606 á 614, volumen VI.

También pueden incluirse en este grupo el método de Tatlock y Thonsom, el de Maquaeire seguido en parte por Corrado (1) y el interesante método de Bertrand y Devuyst, que como todos los citados tiene el inconveniente de que no es suficiente una simple decocción ó la infusión por agua hirviendo para extraer toda la cafeina.

*b)* Extracción de la cafeina directamente sobre el material tratado por amoníaco, ácido acético, óxido de magnesio, de calcio, etc., con el fin de descomponer la sal de cafeína que se supone combinada en su casi totalidad con un ácido orgánico.

En este grupo podemos incluír el clásico procedimiento de Grandval y Lajoux y el notable método de Keller y Beittner modificado por Katz. También podría comprender al de Paul y Cownley, etc.

Estos métodos, en general, se prestan admirablemente para dosar la cafeína y no presenta por lo menos el inconveniente antes mencionado.

*c)* Extracción de la cafeína directamente ó no del material en examen por otros disolventes (alcohol, benzol, éter, benzoato ó salicilato de sodio, etc.).

Como vemos, en los métodos empleados, se utilizan naturalmente los disolventes más apropiados, es decir, aquellos que disuelvan mayor proporción de alcaloides.

Del examen del siguiente cuadro debido á Seidell (2) es fácil comprobar la bondad del cloroformo sobre los otros disolventes de uso corriente.

(1) Trabajos del Instituto de botánica y farmacología (Facultad de ciencias médicas de Buenos Aires : *Contribución al estudio de la yerba mate).*

(2) Allens, *Comercial organic analysis,* volumen VI, página 583. 1912.

| Disolvente | Peso específico | Temperatura de la solución en grados | Solubilidad: gramos de cafeína por 100 gramos de solución saturada. | Peso específico de la solución saturada |
|---|---|---|---|---|
| Agua | 0.997 | 25 | 2.14 | — |
| Éter | 0.716 | » | 0.27 | — |
| Cloroformo | 1.476 | » | 11.00 | — |
| Acetona | 0.809 | 30-1 | 2.18 | 0.832 |
| Bencene | 0.872 | » | 1.22 | 0.875 |
| Aldehida benzoica | 1.055 | » | 11.62 | 1.087 |
| Acetato de amilo | 0.860 | » | 0.72 | 0.862 |
| Anilina | 1.020 | » | 22.89 | 1.080 |
| Alcohol amílico | 0.814 | 25 | 0.49 | 0.810 |
| Ácido acético | 1.055? | 21-5 | 2.44 | — |
| Xilene | 0.847 | 32-5 | 1.16 | 0.847 |
| Toluene | 0.862 | 25 | 0.57 | 0.861 |

De un estudio crítico de casi todos estos métodos, efectuados por varios autores, se llega á la conclusión de que los datos que se obtienen son siempre, por regla general, inferiores al tenor real de alcaloides que se trata de dosificar y la diversidad de las cifras obtenidas por distintos autores, se debe más á los diferentes métodos empleados que á la variabilidad del producto ensayado. Un mismo método, practicado en igualdad de condiciones, da siempre resultados comparables y nos ha sido posible comprobar, como veremos más adelante, que dos métodos, distintos entre sí y que daban cantidades de alcaloides diferentes también entre sí, practicados separadamente cada uno, con las mismas muestras y en igualdad de condiciones, daban resultados siempre comparables.

Por eso somos de opinión que el tenor en cafeína de la yerba mate pura es *un dato valioso para su contralor,* por cuanto practicando siempre el mismo método se obtienen resultados concordantes y no se observan nunca variaciones oscilantes entre $0^{gr}13$ y 4.00 por ciento como han sido señaladas por algunos investigadores (1).

Creemos por consiguiente muy posible fijar un porcentaje mínimo

(1) ENRIQUE Y LEOPOLDO HERRERO DUCLOUX, *Datos analíticos de la yerba mate y sus falsificaciones,* página 125. 1915. De la *Revista del Museo de La Plata,* tomo XIII, página 121 y siguientes.

de cafeína para la clasificación del producto genuino. Más adelante opinaremos al respecto.

El dato obtenido por Stenhouse de 0,13 por ciento (año 1843) puede ser muy debido al análisis de una yerba pobre en *Ilex paraguariensis* ó también al método de análisis empleado, dato que en 1854 el mismo autor rectifica y lleva á 1,20 por ciento de cafeína. La cifra atribuída á Gay (1) citado por Villers y Collins así como el de otros autores que asignan hasta un 8-9 por ciento de cafeína á la yerba mate (2), no pueden tomarse en consideración y nos inclinamos más bien á creer que se trata de errores de imprenta.

El término medio de cafeína (¿ mateína ?) encontrado por los señores Enrique y Leopoldo Herrero Ducloux (3) es tan mínimo que nos ha llamado notablemente la atención, dato que se aparta por completo de las cifras obtenidas por todos los investigadores citados en página 125 del mismo trabajo, y á este propósito creemos un deber en indicar que lamentamos sinceramente la omisión, que suponemos involuntaria, de los resultados obtenidos por eminentes químicos del país, quienes fueron nuestros primeros investigadores que se han ocupado de la yerba mate; pues de otra manera no nos explicábamos que al mencionar cifras *entre las conocidas* los autores citados, teniendo á mano los trabajos de nuestro querido y venerado maestro Kyle y de los doctores Arata y Lavalle, no hayan incluído en el cuadro que presentan el tenor de cafeína hallado por estos investigadores.

Salvamos dicha emisión recordando en esta nota dichos datos, que también vienen en apoyo de nuestra tesis, divergiendo del mismo modo notablemente con los obtenidos por los señores Herrero Ducloux.

Dice Kyle, en página 43, en su trabajo *La yerba mate de Caá Guazú* (4) « naturalmente hemos prestado una atención preferente al dosaje de la cafeína por ser ésta el principio más importante que contiene la yerba mate. Para su extracción nos hemos valido del método recomendado por Mulder y que consiste en preparar un extracto acuoso de la yerba, concentrarlo á consistencia de jarabe; mezclar el residuo con magnesia calcinada, desecarlo y tratar el residuo pulverizado con el éter, el que disuelve la cafeína, la que se obtiene perfectamente blanca evaporando la solución etérea.

(1) *Ibid, ibid,*

(2) P. Carré, *Les produits pharmaceutiques industriels,* tomo II, página 122.

(3) *Ibid, ibid.*

(4) *Anales de la Sociedad científica argentina,* tomo III, 1877.

« De este modo hemos obtenido de 100 partes de las hojas (1) que contenían 10.55 por ciento de agua :

*1.53 partes de cafeina*

*Nota.* — Con Kyle colaboró el entonces joven practicante don Luis Ruíz Huidobro el más ardiente partidario y sostenedor de nuestra escuela del doctorado en química.

« Y en página 44 del mismo trabajo se lee, según Arata (2) la yerba mate paraguaya contiene término medio :

*1.300 de cafeína por ciento.* »

El doctor Francisco P. Lavalle en su trabajo sobre la yerba mate (3) aplicando el método de Domergue y Nikolas encuentra las siguientes cantidades de cafeína en diferentes muestras puras analizadas de este producto.

*En página 8 :*

| | Teína por ciento |
|---|---|
| Jardín botánico (hojas) calculada con 10 por ciento de agua | 1.29 |
| (Tallos) calculada con 10 por ciento de agua | 1.200 |
| Término medio (tallos y hojas) calculado con 10 por ciento de humedad | 1.245 |

*En páginas 11 y 12 :*

Análisis efectuados sobre yerbas remitidas por los señores Ortega y Núñez y Guibaja dieron los siguientes resultados :

| | Teína por ciento |
|---|---|
| (Hojas) calculado con 10 por ciento de agua | 1.59 |
| (Tallos) calculado con 10 por ciento de agua | 0.96 |
| Término medio | 1.225 |

y por último sobre una yerba (elaborada y molida) cultivada en la provincia de Corrientes de los señores Lamas y compañía dió :

| | Por ciento |
|---|---|
| Teína | 1.08 |

(1) El autor dosifica la cafeína en los palos y en las hojas por separado.

(2) En *Revista Farmacéutica*, tomo XIII, página 270.

(3) *La yerba paraguaya*, Acción del calor sobre su composición química. Influencia del clima y del suelo en el cultivo de la planta. Mejoramiento en su elabora-

En prueba de nuestras anteriores afirmaciones referentes al tener en cafeína de la yerba mate y de la fijación de su porcentaje mínimo en las clasificación del producto genuino, damos á continuación los resultados obtenidos por numerosos análisis de yerba mate comerciales efectuados en el laboratorio de la Oficina química nacional y en el Instituto de química del departamento nacional de higiene que dirigen los señores doctores Marcos M. Gutiérrez y Jorge Magnin respectivamente.

Resultados obtenidos por el procedimiento de Paul y de Cownley (1):

*Procedencia de las yerbas tipos comerciales* (2)

| | Cafeína (no calculada en materia seca) por ciento |
|---|---|
| 1. Paranaguá (Brasil) ........... | 0.790 |
| 2. — ........... | 0.890 |
| 3. — ........... | 0.719 |
| 4. — ........... | 0.715 |
| 5. — ........... | 0.737 |
| 6. — ........... | 1.215 |
| 7. — ........... | 0.950 |
| 8. Antonina (Brasil)............. | 0.732 |
| 9. Paranaguá (Brasil)............ | 0.765 |
| 10. Antonina (Brasil)............ | 0.867 |
| 11. Antonina (Brasil)............ | 0.726 |
| 12. Paranaguá (Brasil)........... | 0.877 |
| 13. Paranaguá (Brasil)........... | 1.100 |
| 14. Antonina (Brasil)............ | 1.011 |
| 15. Antonina (Brasil)............ | 1.171 |
| 16. Paranaguá (Brasil)........... | 1.108 |
| 17. Antonina (Brasil)............ | 0.927 |
| 18. Paranaguá (Brasil)........... | 1.168 |
| 19. Antonina (Brasil)............ | 0.919 |
| 20. Montevideo (Uruguay) ....... | 0.854 |
| 21. Antonina (Brasil)............ | 0.712 |
| 22. Paranaguá (Brasil) .......... | 0.756 |
| 23. — .......... | 0.700 |
| 24. — .......... | 0.793 |
| 25. — .......... | 0.817 |

ción. De la *Revista de la Universidad de Buenos Aires*, tomo XXI, página 65 y siguientes.

(1) Bourrey y Marquet, página 725.

(2) Yerbas todas procedentes del Brasil con referencia del puerto de embarque.

| | Cafeína (no calculada en materia seca) por ciento |
|---|---|
| 26. Paranaguá (Brasil) .......... | 0.730 |
| 27. — .......... | 0.703 |
| 28. — .......... | 0.700 |
| 29. — .......... | 0.930 |
| 30. — .......... | 0.989 |
| 31. — .......... | 0.919 |
| 32. — .......... | 0.916 |
| 33. — .......... | 0.706 |
| 34. — .......... | 0.784 |
| 35. — .......... | 0.959 |
| 36. Itaqui (Brasil) .............. | 1.037 |
| 37. Paranaguá (Brasil) .......... | 0.703 |
| 38. — .......... | 0.702 |
| 39. — .......... | 0.710 |
| 40. — .......... | 0.903 |
| 41. — .......... | 0.773 |
| Término medio de 41 determinac... | 0.860 |

Resultados obtenidos por el procedimiento Keller y Beittner (1) modificado por Katz (2).

Según estos métodos así modificados se procede de la siguiente manera : 10 gramos de la droga pulverizada es colocada en un frasco de boca ancha y con buena tapa de esmeril. Se agrega 5 centímetros cúbicos de solución común de amoniaco y 200 centímetros cúbicos de cloroformo; se agita por media hora ó se deja mejor de un día para otro. Se filtra la solución clorofórmica, se evapora el líquido en un matraz apropiado en conexión con un aparato de destilación con el fin de recoger el disolvente para nuevas operaciones y se redisuelve el residuo con éter (5 cc.) añadiendo luego 20 centímetros cúbicos de ácido clorhídrico diluído (5 por mil) llevando el matraz á baño maría. Se calienta hasta eliminar el éter; se enfría y se filtra. (Esta última operación es conveniente hacerla directamente sobre el tubo á bromo). Se lava bien el matraz y filtro con el ácido clorhídrico diluído y el líquido de lavaje y el filtrado se extraen con cloroformo durante dos horas. Se evapora la solución clorofórmica y se tiene la cafeína pura.

(1) Ver *Supplemento alla Enciclopedia di chimica* (Guareschi), página 315. 1907-1908; y según Ber Pharm, *Gessell*, tomo XII, página 339. 1901.

(2) *Ibid*, según Ber Pharm, *Gessell*, tomo XII, página 250, 1902; ó *Natur Ges. Karlsbad*, tomo II, página 664, 1902.

*Doce muestras normales* A

Yerbas tipos comerciales (canchada). Procedencia: Brasil y Paraguay.

| | Gramos por ciento |
|---|---|
| Término medio de cafeína...... | 0.9543 |
| Máximo alcanzado ............ | 1.221 |
| Mínimo obtenido.............. | 0.702 |

*Ocho muestras* B

Yerbas tipos comerciales. Procedencia: Argentina, Paraguay y Brasil (elaborada), sospechosas solo por tratarse de yerbas en polvo fino.

| | Gramos por ciento |
|---|---|
| Término medio de cafeína ...... | 1.044 |
| Máximo alcanzado ............. | 1.270 |
| Mínimo obtenido.............. | 0.943 |

*Doce muestras normales* C

Varias yerbas tipos comerciales (canchada y elaborada). Procedencias varias :

| | Gramos por ciento |
|---|---|
| Término medio de cafeína...... | 0.9568 |
| Máximo alcanzado ............ | 1.547 |
| Mínimo obtenido.............. | 0.736 |

*Veintinueve muestras* S *(sospechosas)*

Yerbas tipos comerciales. Procedencia : Argentina, Brasil y Paraguay (canchadas y elaboradas).

Unas por contener ciertas hojas extrañas congonilla, caona, etc., y sólo algunos trozos, y otras por estar constituídas por polvos muy finos.

| | Gramos por ciento |
|---|---|
| Término medio de cafeína...... | 0.8533 |
| Máximo...................... | 1.408 |
| Mínimo...................... | 0.601 |

### *Veinte muestras* M × C *distintas*

Excelentes yerbas de marcas conocidas del comercio.

| | Gramos por ciento |
|---|---|
| Término medio de cafeína...... | 1.1225 |
| Máximo alcanzado ............ | 1.915 |
| Mínimo obtenido.............. | 0.588 |

### *Nueve muestras tipo* D

Procedencia : Argentina, Paraguay y Brasil.

| | |
|---|---|
| Término medio de cafeína...... | 1.0322 |
| Máximo alcanzado ............ | 1.648 |
| Mínimo obtenido.............. | 0.461 |

### *Nueve muestras tipo* V *(único)*

Procedencia : Brasil (Estado Paraná).

| | Gramos por ciento |
|---|---|
| Término medio de cafeína...... | 1.1452 |
| Máximo alcanzado ............ | 1.530 |
| Mínimo obtenido.............. | 0.723 |

### *Tipo* M *(seleccionado)*

Preparado con 50 muestras de yerbas que sometidas á una rigurosa observación microscópica (binocular Zeiss) no acusaron presencia alguna de hojas extrañas. Numerosos análisis efectuados sobre la muestra homogeneizada perfectamente por infinidad de pasajes y mezclas cuidadosas en la operación de molienda, dieron el siguiente resultado :

| | Gramos por ciento |
|---|---|
| Término medio de cafeína...... | 0.9576 |

Y por último análisis practicado en una mezcla preparada con hojas y tallos provenientes del *Ilex paraguariensis* existente en nuestro Jardín Botánico dió la siguiente proporción de cafeína:

| | Gramos por ciento |
|---|---|
| Término medio de varios dosajes de cafeína..... | 1.120 |

Reuniendo los datos obtenidos en las primeras 150 muestras analizadas en este laboratorio, se tiene:

| | Muestras de yerbas | Término medio por ciento |
|---|---|---|
| A................ | 12 | 0.9543 |
| B................ | 8 | 1.0440 |
| C................ | 12 | 0.9568 |
| S................ | 29 | 0.8633 |
| M × C............ | 20 | 1.1225 |
| D................ | 9 | 1.0322 |
| V................ | 9 | 1.1452 |
| M (seleccionado).... | — | — |
| Mezcladas.......... | 50 | 0.9576 |
| J. B.............. | 1 | 1.1200 |
| Totales.... | 150 | 1.0206 |

calculando en yerba seca, teniendo en cuenta un 10 por ciento de humedad, aproximadamente la riqueza en cafeína alcanzaría 1gr1226 por ciento.

Los datos arriba mencionados corresponden á yerbas procedentes en su mayor parte de las mismas regiones, de la misma época y responden á los tipos comunes de nuestra plaza comercial libre de congonilla y otros adulterantes (1).

Como es fácil advertir la diferencia que se observa en el porcentaje de cafeína de ambos grupos de yerbas analizadas por los laboratorios químicos del departamento nacional de higiene y oficina química na-

(1) Algunas de las yerbas analizadas acusaron á un minucioso examen pequeños trozos de hojas de congonilla, caona, etc., en tan mínima cantidad que no podían considerarse por tal motivo adulteradas.

cional es sólo imputable al método empleado, encontrándose mayor cantidad de alcaloide por el Keller-Beitther y Katz debido exclusivamente al empleo del cloroformo en sus diferentes fases de la extracción de la cafeína y á la acción particular de la solución *acuosa de amoníaco* que parece facilitar en sumo grado la acción disolvente del cloroformo, mientras que en el de Paul y Cownley en que se emplea en la primera fase de la operación el alcohol y el uso del óxido de calcio, que es contraindicado según la opinión de muchos investigadores, pues consideran que la magnesia ó la cal retienen enérgicamente este principio con el cual contraen sin duda una combinación (1).

Por otra parte, no hay que olvidar que la cafeína parece encontrarse en la naturaleza, combinada con un ácido orgánico, por lo menos la que existe en los Cofeas, que se presenta según Gorter al estado de *clorogenato de potasio y cafeína* (2).

Este compuesto (con referencia á los cristales de esta sal) es soluble en agua, pero la cafeína no puede ser extraída de éste por otros disolventes sino en presencia de agua — de lo cual sugiere Gorter que la cafeína no se extrae o sólo una mínima parte del café porque la combinación de ésta con el ácido clorogénico es insoluble en lo disolventes orgánicos anhidros. No sería difícil que formando una combinación análoga con algún ácido orgánico, se encuentre tambien dicho principio en la yerba mate, del cual se deduce la conveniencia que existe de descomponer previamente la combinación orgánica posible del alcaloide por un álcali o un ácido. En ésto precisamente se basa el interesante método descripto que en realidad es el primitivo de Grandval y Lajoux, simplificado y hecho más exacto por los autores citados.

De cualquier manera y con los datos obtenidos por uno ú otro procedimiento, en ningún caso las cifras se han aproximado al término medio que presentan en su trabajo los profesores Herrero Ducloux. Siempre que el residuo de la extracción acusaba un peso inferior a $0^{gr}2964$ que es la cifra media obtenida por aquellos investigadores, se podía llegar á la conclusión categórica de que se trataba de una yerba mate gróseramente adulterada con caona, congonilla, caá-berá, etc.

Como dato ilustrativo agregaremos que aun en numerosos análisis practicados solamente sobre tallos *(palos)* de yerba mate de diferentes procedencias, que como es sabido contienen siempre menor propor-

(1) Lajoux y Grandval, *Médicaments chimiques organiques*, página 215, 1897.

(2) *Annalen*, tomo 358, página 327, etc., 1908, citado por Allens, volumen VI, página 645.

ción de alcaloides se tiene los siguientes resultados en porcentaje de cafeína.

| | Por ciento de cafeína en gramos |
|---|---|
| Yerba nº 52 (tallos) | 0.661 |
| — nº XIV, 4 (tallos) | 0.673 |
| — nº XV, 5 (tallos finos) Jardín Botánico | 0.740 |
| — nº XVI, 6 (tallos gruesos) Jardín Botánico | 0.684 |
| — nº XLVII, 7 (tallos gruesos) Barbacúa Alunha | 0.510 |
| — nº LI, 4732 (tallos finos) Paso de los Libres | 0.553 |
| — nº LII, 4732 bis (tallos gruesos) Paso de los Libres | 0.510 |
| — nº LIII, 5163 (tallos) marca DB | 0.519 |

Resumiendo los términos medios obtenidos y agregando los de los investigadores del país, tenemos :

| | Por ciento de cafeína en gramos |
|---|---|
| Laboratorio de la oficina química nacional | 1.0206 |
| Laboratorio del Departamento nacional de higiene | 0.860 |
| Instituto de botánica y farmacología (Facultad de ciencias médicas) (Corrado) | 0.820 |
| Kyle | 1.530 |
| Arata | 1.300 |
| Lavalle | 1.1575 |

Como vemos las cantidades ínfimas obtenidas por los señores Herrero Ducloux obedecen necesariamente á una falla del método empleado.

Por citar solo dos ejemplos señalados en el trabajo de estos autores sobre el tenor de alcaloides por ciento encontrado en las muestras de yerbas rotuladas Curitiba-Paraná 4B y 5B en páginas 149-150, $0^{gr}0915$ y $0^{gr}0875$ respectivamente muestran claramente que el método Lendrich-Nottbohm-Katz, seguido en las condiciones indicadas y á pesar aun de haber sido sometido á un estudio previo de comprobación y comparabilidad de sus resultados por dichos autores, es inaplicable para la dosificación del principio activo de la yerba mate.

Podemos adelantar aquí, que ensayos efectuados sobre muchísimas muestras de yerbas originarias de la región Curitiba-Paraná, siempre han acusado una proporción de cafeína superior á 0,80 por ciento.

Además que aplicado el método Keller Beittner-Katz (adoptado por la oficina química nacional) sobre el residuo de yerba sacado del cilindro de extracción de Schleicher y Schüll después de haber sido agotado en el tubo de Soxhlet por el tetracloruro de carbono se ha

extraído todavía un 400 por ciento ó más de cafeína que no había sido disuelta por el disolvente empleado en este procedimiento (1).

## CONCLUSIONES

De las consideraciones anteriores expuestas podemos llegar á las siguientes conclusiones.

1° El método analítico empleado por los profesores Enrique y Leopoldo Herrero Ducloux para dosificar la cafeína de la yerba mate no es apropiado por cuanto da cifras tan bajas que no responden á la composición real de la yerba mate pura.

2° Esto se debe, sin duda alguna, al empleo del tetracloruro de carbono como disolvente de la cafeína en las condiciones indicadas, puesto que en el residuo de la yerba considerada agotada de alcaloides, es posible extraer aún el 50 al 70 por ciento de la cafeína total que el tetracloruro de carbono no había extraído.

3° Salvo el método empleado por estos autores todos los otros métodos hasta ahora ensayados y practicados corrientemente para la dosificación de la cafeína en la yerba mate pura, dan siempre cifras de estos alcaloide, superior á 0,70 por ciento. Por consiguiente esta cantidad puede ser tomada como límite ínfimo de la riqueza en cafeína de toda yerba mate considerada genuina.

4° Para mejor comparabilidad del porcentaje en cafeína de la yerba mate sería conveniente considerar dicho dato sobre yerba mate seca; siendo la humedad una cifra que oscila casi constantemente alrededor del 10 por ciento, puede tomarse como proporción mínima de cafeína la cantidad de 0,80 por ciento de yerba mate considerada seca.

5° Esta cifra no puede imputarse de ser alta si se tiene en cuenta que los adulterantes (caona, congonilla, anta, voadeira, rapanea, mico, canelon caá-berá, etc.), pertenezcan ó no al genero *Ilex* carecen de cafeína, por lo tanto, esta cifra 0,80 no es exagerada como lo es lo otra 1,25 adoptada por el congreso de la cruz blanca en su sesión de París en 1909, y puede ser siempre una buena guía respecto á la bondad del producto analizado.

6° Con el propósito de contribuír á la unificación de los métodos de

(1) Esta parte del trabajo ha sido efectuada en su mayor parte por el químico de primera de este laboratorio señor Mario Garino.

análisis y á fin de evitar disparidad de datos, etc., proponemos el exlente método que podría llamarse Lajoux-Grandval, Keller-Beittner-Katz que es el adoptado ya por el laboratorio de la oficina química nacional.

7° Con el procedimiento indicado la cantidad de cafeína obtenida de varios centenares de análisis de muestras de yerbas de tipos comerciales y de pureza indiscutible el término medio es notablemente constante y superior como se ha visto en parte á un gramo por ciento.

*Nota.* — Gracias a la amabilidad de nuestro colega el doctor Trifón Ugarte podemos dar los siguientes datos por él obtenidos en análogas investigaciones y que vienen en apoyo de lo que decimos : Una muestra de yerba (brasileña) con un total de 0gr8925 por ciento de cafeína (método de Paul y Cownley dió, usando el método indicado por los señores Herrero Ducloux, 0gr3675 por ciento de cafeína ; en el residuo que quedaba en el cilindro del Soxhlet, después de agotado con el tetracloruro de carbono, se dosó la cafeína nuevamente por el método Paul y Cownley y se obtuvo 0gr4350 por ciento de cafeína, cantidad que no había extraído el tetracloruro de carbono.

# APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

POR EL INGENIERO DEMETRIO CRININ

---

Es muy conocido el importante papel que tiene en el cálculo diferencial la fórmula de Taylor que expresa la relación entre valores de la misma función correspondientes á distintas magnitudes de la variable independiente. Su forma tan general permite usarla como medio poderoso de análisis en los casos en que á la primera impresión la deducción parece imposible en vista de la multiformidad de los fenómenos abarcados. Pero siempre que éstos tengan una propiedad común que pueda representarse en forma de una función, aunque con algunas características indeterminadas, es dado proceder á su estudio valiéndose de la fórmula de Taylor.

He tratado de aplicar esta tesis á las llamadas líneas de influencia usadas en los cálculos de construcciones. Sabido es que bajo la acción de fuerzas exteriores sobre un sólido, se desarrollan en este distintas deformaciones y esfuerzos reales (por ejemplo, tensiones del material; flexionamiento) y se provocan magnitudes convencionales que se introducen para los fines del cálculo (por ejemplo, momentos flectores). Es siempre posible determinar todos estos esfuerzos y magnitudes por medio de las líneas de influencia y esta viene á ser la propiedad común que permite la aplicación de la fórmula de Taylor.

El método de líneas de influencia está basado en uno de los principios fundamentales de la mecánica, el de la independencia de la acción de las fuerzas. En el caso general, si se debe estudiar un fenómeno cualquiera que se produce en un sólido bajo la acción de un sistema

que cambia su ubicación en la superficie de aquel (por ejemplo, si se trata de determinar las fuerzas moleculares en un punto interior dado) se podría trasladar paralelamente á sí mismo el sistema de los tres ejes de coordenadas rectangulares con el origen en la superficie del sólido, estudiando en cada uno el efecto que pueda producir la unidad de fuerza aplicada en el sentido positivo de cada eje y trazando vectores correspondientes. Las extremidades de estos vectores formarían tres superficies de influencia pudiendose calcular por medio de esos lugares geométricos el efecto de un sistema cualquiera de fuerzas sumando geométricamente los productos de las proyecciones de todas las fuerzas de este sistema por las magnitudes de los vectores correspondientes á sus puntos de aplicación.

La estática de construcciones trata de reemplazar los sistemas en el espacio por sus esquemas, reduciendo así las superficies de influencia y las de acción de las fuerzas á simples líneas planas. Las líneas de influencia de los sistemas estáticamente determinadas son rectas, por consiguiente, el estudio de las líneas curvas, que se hace en lo que sigue, supone la aplicación del método á los sistemas hiperestáticos. Por otra parte las particularidades del mismo obligan á restringir el campo de estudio limitándolo á una sola rama de la línea de influencia, puesto que la fórmula de Taylor liga entre sí distintos valores de una funcion solamente.

En la segunda parte de este trabajo aplicando la fórmula de Taylor para determinar la relación entre los precios de transporte de tierra á distancia máxima para un caso dado, y á distancia media (distancia entre los centros de gravedad de las masas movidas), se han podido establecer las condiciones de distribución más económica de la tierra en la construcción de vías de comunicación y al mismo tiempo limitar la aplicación del procedimiento Brückner que se emplea al efecto. Este procedimiento obtenido por el razonamiento *a priori* y aparentemente general, no lo es en realidad, y la misma fórmula de Taylor nos permite determinar los casos particulares en que puede aplicarse.

El carácter esencialmente teórico de mi trabajo y su fin principal de demostrar una vez más la fecundidad de cierto método de análisis que encierra la fórmula de Taylor, me hicieron buscar lugar para él, no en las revistas técnicas especiales, sino en los anales de esta sociedad dedicada preferentemente al cultivo de la ciencia pura.

# CAPÍTULO I

## APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE TAYLOR Á ALGUNAS LÍNEAS DE INFLUENCIA DE SISTEMAS ESTÉTICAMENTE INDETERMINADOS

### § 1. *Condición general de la posición más desfavorable de un sistema de fuerzas*

La cuestión se tratará en forma general sin preocuparse si la línea de influencia dada, corresponde al momento flector, al esfuerzo de corte ó á cualquier otro esfuerzo exterior ó interior de una viga ó armadura. Simplemente se admitirá que su ecuación obtenida pasando una carga igual á unidad por la viga en cuestión, es:

$$y = f(x) \ldots \qquad (1)$$

vale decir que la carga P ubicada á distancia $x$ del origen de coordenadas O (punto extremo izquierdo de la línea de acción posible de las fuerzas) provoca en la viga el momento ó esfuerzo $E = P \cdot y$, independientemente del carácter de la magnitud E.

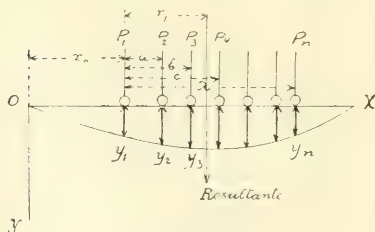


Fig. 1

Examinemos el caso cuando la viga está sometida á la acción de un sistema de cargas ligadas invariablemente entre sí que se mueven sobre la viga sin salir ninguno de ella. Sean $a, b, c, d \ldots \lambda$ distancias entre esas cargas y la más próxima al origen de coordenadas O cuya abscisa sea $x_0$ (fig. 1).

La acción del conjunto de las cargas sobre la viga sería:

$$\begin{aligned} E &= P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \ldots + P_n y_n = \\ &= P_1 f(x_0) + P_2 f(x_0 + a) + P_3 f(x_0 + b) + \ldots + P_n f(x_0 + \lambda) \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

Desarrollando $f(x_0 + a)$, $f(x_0 + b) \ldots f(x_0 + \lambda)$ según la fórmula de Taylor, se tiene:

$$E = P_1 f(x_0) + P_2\left[f(x_0) + a . f'(x_0) + \frac{a^2}{2!} . f''(x_0) + \frac{a^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{a^m}{m!} f^m(x_0)\right] + \dots + P_3\left[f(x_0) + b . f'(x_0) + \frac{b^2}{2!} . f''(x_0) + \frac{b^3}{3!} . f'''(x_0) + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{b^m}{m!} f^m(x_0) + \dots\right] + \dots + P_n\left[f(x_0) + \lambda f'(x_0) + \frac{\lambda^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda^m}{m!} f^m(x_0) + \dots\right] = [P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n] . f(x_0) + [P_2 a + \tag{3}$$
$$+ P_3 b + \dots + P_n . \lambda] . f'(x_0) + \frac{1}{2!}[P_2 a^2 + P_3 b^2 + \dots + P_n . \lambda^2] . f''(x_0) +$$
$$+ \frac{1}{3!}[P_2 a^3 + P_3 b^3 + \dots + P_n . \lambda^3] . f'''(x_0) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{m!}[P_2 a^m + P_3 b^m + \dots + P_n \lambda^m] . f^m(x_0) + \dots$$

Las expresiones entre paréntesis que anteceden á las derivadas $f'(x_0), f''(x_0) \dots, f^m(x_0) \dots$ son momentos del sistema respecto á la carga más próxima al origen de coordenadas, siendo el orden de ese momento igual al de la derivada. Por ejemplo, á la derivada del tercer orden $f'''(x_0)$ le corresponde el momento del mismo orden $P_2 a^3 + P_3 b^3 + \dots + P_n \lambda^3$.

Si el valor de la resultante del sistema es R, siendo $r_1$ su distancia á la carga más próxima al origen de coordenadas, se tiene:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = R \dots \tag{4}$$

$$P_2 a + P_3 b + \dots + P_n \lambda = R . r_1 \dots \tag{5}$$

La expresión $P_2 a^2 + P_3 b^2 + \dots + P_n . \lambda^2$ podría considerarse como momento de una resultante $Rr_1$ ubicada á la distancia $r_2$ de la carga $P_1$, de manera que:

$$P_2 a^2 + P_3 b^2 + \dots + P_n \lambda^2 = R r_1 r_2 \dots \tag{6}$$

Asimismo:

$$P_2 a^3 + P_3 b^3 + \dots + P_n \lambda^3 = R r_1 r_2 r_3 \dots \tag{7}$$

y en general:

$$P_2 a^m + P_3 b^m + \dots + P_n \lambda^m = R r_1 r_2 r_3 \dots r_m \tag{8}$$

Los valores $r_1, r_2, r_3 \dots r_m \dots$ crecen teniendo $\lambda$ como límite de manera que:

$$\text{lím } (r_m)_{m=\infty} = \lambda \dots \tag{9}$$

Hechas estas observaciones, volvamos á la fórmula (3) modificándola bajo la forma de la ecuación (10):

$$E = R\left[f(x_0) + r_1 . f'(x_0) + \frac{r_1 r_2}{2!} \cdot f''(x_0) + \dots + \frac{r_1 r_2 \dots r_m}{m!} f^m(x_0) + \dots\right] \dots \quad (10)$$

La condición de que E sea máximo, es:

$$\frac{dE}{dx_0} = 0 \dots \qquad (11)$$

y

$$\frac{d^2E}{dx_0^{\,2}} < 0 \dots \qquad (12)$$

ó sea:

$$f'(x_0) + r_1 f''(x_0) + \frac{r_1 r_2}{2!} \cdot f'''(x_0) + \dots + \frac{r_1 r_2 \dots r_m}{m!} f^m(x_0) + \dots = 0 \dots \quad (11 \text{ bis})$$

$$f''(x_0) + r_1 . f'''(x_0) + \frac{r_1 r_2}{2!} \cdot f^{IV}(x_0) + \dots + \frac{r_1 r_2 \dots r_m}{m!} \cdot f^{m+1}(x_0) + \dots < 0 \dots \quad (12 \text{ bis})$$

Visto que para la resolución de las ecuaciones (11 bis) y (12 bis), se necesita saber los valores de $r_1$, $r_2$, ... $r_m$ ... cuya determinación en caso general presenta un trabajo penoso de cálculos, nos limitaremos á determinar las condiciones de la posición más desfavorable para algunos casos particulares de carga pasando luego á estudiar algunos casos particulares de líneas de influencia (curvas del 2° y 3^er grado) bajo acción de cargas arbitrarias.

## § 2. *Varias cargas iguales equidistantes. Carga uniformemente repartida*

Si la viga está sometida a la acción de $(n+1)$ cargas iguales P distantes $\frac{\lambda}{n}$ de manera que el largo total ocupado por el sistema es de $\lambda$, los valores $r_1$, $r_2$ ... $r_m$, ... serían:

$$r_1 = \left[P \cdot \frac{\lambda}{n} + P \cdot \frac{2\lambda}{n} + P \cdot \frac{3\lambda}{n} + \dots + P . \lambda\right] : P(n+1) =$$
$$= \frac{\lambda}{n(n+1)} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} x = \frac{\lambda(n+1) . n}{2n(n+1)} = \frac{\lambda}{2} \dots \qquad (13)$$

$$r_1 r_2 = \frac{\lambda^2}{n^2(n+1)} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} x^2 = \frac{\lambda^2}{n^2(n+1)} \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^2}{6n} \dots \quad (14)$$

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{\lambda^3}{n^3(n+1)} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} x^3 = \frac{\lambda^3}{n^3(n+1)} \cdot \left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right) = \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^3}{4n} \dots \quad (15)$$

$$r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{\lambda^4}{n^4(n+1)} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} x^4 = \frac{\lambda^4}{n^4(n+1)} \cdot \left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right) = \quad (16)$$
$$= \frac{\lambda^4}{5} + \frac{\lambda^4}{30n^3}(9n^2 + n - 1) \dots$$

y en general:

$$r_1 r_2 \dots r_m = \frac{\lambda^m}{m+1} + \frac{\lambda^m \cdot \varphi(n)}{\alpha \cdot n^p} \dots \quad (17)$$

donde $\alpha$ es un coeficiente numérico y $\varphi(n)$ una función de $n$ del grado $p-1$, siendo indiferente para nuestra causa el estudio de relación entre $m$ y $p$.

La condición (11 bis) se escribe en este caso en forma de (18):

$$f'(x_0) + \frac{\lambda}{2!} \cdot f''(x_0) + \frac{\lambda^2}{3!} f'''(x_0) + \frac{\lambda^3}{4!} f^{\text{IV}}(x_0) + \dots + \frac{\lambda^m}{(m+1)!} f^{m+1}(x_0) + \dots$$
$$+ \frac{1}{n}\left[\frac{\lambda^2}{6} f'''(x_0) + \frac{\lambda^3}{4} f^{\text{IV}}(x_0) + \dots + \frac{\lambda^m \cdot \varphi(n)}{\alpha \cdot n^{p-1}} f^{m+1}(x_0) + \dots\right] = 0 \dots \quad (18)$$

de donde:

$$f'(x_0) + \frac{\lambda}{2!} f''(x_0) + \frac{\lambda^2}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{\lambda^m}{(m+1)!} \cdot f^{m+1}(x_0) + \dots =$$
$$= -\frac{\lambda^2}{n}\left[\frac{1}{6} f'''(x_0) + \frac{1}{4}\lambda f^{\text{IV}}(x_0) + \dots + \frac{\lambda^{m-2} \cdot \varphi(n)}{\alpha \cdot n^{p-1}} f^{m+1}(x_0)\right] \dots \quad (19)$$

Desarrollemos, según la fórmula de Taylor, la expresión $f(x_0) + \lambda$ tomando en consideración la (19):

$$f(x_0 + \lambda) = f(x_0) + \lambda \cdot f'(x_0) + \frac{\lambda^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{\lambda^m}{m!} f^m(x_0) + \dots =$$
$$= f(x_0) - \frac{\lambda^3}{n}\left[\frac{1}{6} f'''(x_0) + \frac{1}{4}\lambda f^{\text{IV}}(x_0) + \dots + \frac{\lambda^{m-2}\varphi(n)}{\alpha \cdot n^{p-1}} \cdot f(x_0) + \right] \dots \quad (20)$$

Las ordenadas bajo la primera y la última carga son iguales, es decir, $f(x_0+\lambda)=f(x_0)$ si :

$$-\frac{\lambda^3}{n}\left[\frac{1}{6}f'''(x_0)+\frac{1}{4}\lambda.f^{\text{IV}}(x_0)+\ldots+\frac{\lambda^{m-2}\varphi(n)}{\alpha.n^{p-1}}f(x_0)+\ldots\right]=0\ldots \qquad (21)$$

La condición (21) se cumple cuando : 1° las derivadas $f'''(x_0), f^{\text{IV}}(x_0)\ldots$ $f^{m}(x_0)\ldots$ son nulas, es decir, para todas las curvas del segundo grado del tipo $y=ax^2+bx+c$ (por ej., para todas la líneas de influencia parabólicas) y 2° para $n=\infty$ lo que corresponde á la carga uniformemente repartida sobre un trozo $\lambda$. La indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en el coeficiente $\frac{\varphi(n)}{n^{p-1}}$ se elimina por la regla conocida del cálculo diferencial.

En resumen : *tratándose de encontrar la posición más desfavorable del sistema de cargas iguales y equidistantes sobre una línea de influencia del segundo grado del tipo indicado ó de una carga uniforme sobre cualquiera, corresponde ubicar esas cargas de manera que las ordenadas extremas del trozo ocupado por el sistema, sean iguales.*

Esta propiedad de la carga uniformemente repartida puede demostrarse también por medio de otros razonamientos, como por ejemplo, se hace en el artículo del señor Kreitmeyer *(Beton und Eisen,* 1914, cuaderno XX).

Si la línea de influencia fuese del tercer grado, del tipo $y=ax^3+bx^2+$ $+cx+d$ la diferencia entre las ordenadas extremas sería :

$$\Delta=f(x_0)-f(x_0+\lambda)=\frac{\lambda^3}{6n}\cdot f'''(x_0)\ldots \qquad (22)$$

Puesto que en este caso $f'''(x_0)$ no depende de $x_0$, se puede deducir que la diferencia entre las ordenadas extremas del trozo ocupado por un sistema de cargas iguales y equidistantes es proporcional : directamente al cubo del largo de este trozo é inversamente al número de intervalos entre las cargas.

El valor máximo de esa diferencia max $\Delta$ se obtiene siendo $n=1$ (sistema de dos cargas iguales) :

$$\max\Delta=\frac{\lambda^3}{6}\cdot f'''(x_0)\ldots \qquad (23)$$

Por otra parte ubicando sobre una línea de influencia $y=f(x)$ un sistema de dos cargas P distantes $\lambda$ del modo más desfavorable, la condición correspondiente sería :

$$\frac{d}{dx}.\mathrm{P}[f(x)+f(x+\lambda)]=0 \ldots \qquad (24)$$

ó sea:

$$f'(x)=-f'(x+\lambda) \ldots \qquad (25)$$

Representando gráficamente la condición (25) de la diferencia de las dos ordenadas se obtiene max $\Delta$. Ahora bien, para un sistema de tres cargas la condición (23) sería:

$$\Delta=\frac{1}{2}.\max\Delta \ldots \qquad (26)$$

y en general para $n+1$ cargas iguales:

$$\Delta=\frac{1}{n}.\max\Delta \ldots \qquad (27)$$

*La fórmula (27)* que es la ecuación de una hipérbola referida á sus asímptotas (tipo $xy=k^2$ ó en este caso $\Delta.n=\max\Delta=$const.) *en combinación con la (25) es la solución del problema de encontrar la posición más desfavorable de un sistema de $n+1$ cargas iguales y equidistantes sobre una línea de influencia del tercer grado.*

En los párrafos 3 y 4 de este capítulo se estudia la ecuación (12) para las curvas del segundo y tercer grado. Actualmente ocupémonos solamente de la aclaración de esa condición suplementaria $\frac{d^2\mathrm{E}}{dx^2}<0$ necesaria para que la igualdad de las ordenadas extremas bajo una carga uniformemente repartida corresponda á un máximo y no á un mínimo.

Según la fórmula de Taylor:

$$f'(x_0+\lambda)=f'(x_0)+\lambda\left[f''(x_0)+\frac{\lambda}{2!}.f'''(x_0)+\frac{\lambda^2}{3!}f^{\mathrm{IV}}(x_0)+\ldots\right]\ldots \qquad (28)$$

Por otra parte, en virtud de la ecuación (12) en caso de un máximo la expresión entre los paréntesis es negativa y en consecuencia la condición $\frac{d^2\mathrm{E}}{dx^2}<0$ equivale á la (29):

$$f'(x_0)>f'(x_0+\lambda)\ldots \qquad (29)$$

Esta condición se cumple siempre que el ángulo formado por la tan-

gente en el punto $x_0$, $y=f(x_0)$ con el eje X sea positivo por ser en este caso negativa $f'(x_0+\lambda)$ estando dispuestos ambos puntos $x_0, y=f(x_0)$ y $(x_0+\lambda), y=(x_0+\lambda)$ de diferentes lados de la ordenada mayor $f'(x)=0$.

### § 3. *Carga arbitraria sobre líneas de influencia del segundo grado* $y=ax^2+bx+c$

Si las derivadas 3ª, 4ª, etc., de la función $y=f(x)$ son nulas, la condición general de la posición desfavorable se escribirá así:

$$f'(x_0)+r_1.f''(x_0)=0; \qquad f''(x_0)<0... \tag{30}$$

Desarrollando la expresión $f'(x+r_1)$, según la fórmula de Taylor, tendríamos:

$$f'(x_0+r_1)=f'(x_0)+r_1.f''(x_0)... \tag{31}$$

y en base á la (30):

$$f'(x_0+r_1)=0... \tag{32}$$

Siendo en consecuencia la línea de influencia curva del segundo grado, cuyas derivadas 3ª, 4ª, etc., son nulas, *corresponde ubicar la resultante del sistema de cargas encima de la mayor ordenada de aquella* (*).

### § 4. *Carga arbitraria sobre líneas de influencia del tercer grado* $y=ax^3+bx^2+cx+d$

Suponiendo que las derivadas 4ª, 5ª, etc., de la función $y=f(x)$ son nulas, la condición general de la posición desfavorable sería:

$$f'(x_0)+r_1.f''(x_0)+\frac{r_1r_2}{2}.f'''(x_0)=0... \tag{33}$$

$$f''(x_0)+r_1.f'''(x_0)<0... \tag{34}$$

La ecuación (34) podría transformarse así:

$$f''(x+r_1)<0... \tag{34 bis}$$

lo que quiere decir que *la resultante del sistema de cargas debe estar*

(*) La condición suplementaria $f''(x)=0$ limita la aplicación de esta regla á los casos cuando el coeficiente $a$ es negativo.

*colocada de aquel lado del punto de inflexión* (la abscisa $\xi$ del punto de inflexión corresponde á la condición $f''(\xi)=0$) *donde al aumento de las abscisas corresponde la diminución del ángulo formado por la tangente á la curva de influencia con el eje* X (fig. 2).

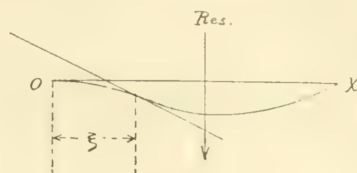



Fig. 2

La parte izquierda de la ecuación (33) puede considerarse como la derivada de una función $f(x_0+\mathrm{M})$:

$$f'(x_0+\mathrm{M})=f'(x_0)+r_1.f''(x_0)+\frac{r_1r_2}{2}f'''(x_0)\dots \qquad (35)$$

Desarrollando $f'(x_0+\mathrm{M})$ según la fórmula de Taylor, tenemos:

$$f'(x_0+\mathrm{M})=f'(x_0)+\mathrm{M}.f''(x_0)+\frac{\mathrm{M}^2}{2}.f'''(x_0)\dots \qquad (36)$$

Descontando la (35) de la (36):

$$(\mathrm{M}-r_1).f''(x_0)+\frac{1}{2}(\mathrm{M}^2-r_1r_2).f'''(x_0)=0\dots \qquad (37)$$

ó sea:

$$(\mathrm{M}-r_1)\left[f''(x_0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}^2-r_1r_2}{\mathrm{M}-r_1}\cdot f'''(x_0)\right]=0\dots \qquad (38)$$

de donde:

$$f''\left[x_0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}^2-r_1r_2}{\mathrm{M}-r_1}\right]=0\dots \qquad (39)$$

y por consiguiente, acordándonos de la propiedad del punto de inflexión arriba citada:

$$x_0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}^2-r_1r_2}{\mathrm{M}-r_1}=\xi\dots \qquad (40)$$

Las transformaciones de la ecuación (40) dan consecutivamente:

$$\mathrm{M}^2-2\mathrm{M}(\xi-x_0)+2r_1(\xi-x_0)-r_1r_2=0\dots \qquad (41)$$

$$M = \xi - x_0 \pm \sqrt{(\xi - x_0)^2 - 2r_1(\xi - x_0) + r_1 r_2} \dots \qquad (42)$$

$$f'(x_0 + M) = f'(\xi \pm \sqrt{(\xi - x_0)^2 - 2r_1(\xi - x_0) + r_1 r_2} \dots \qquad (43)$$

Si la abscisa correspondiente á la ordenada mayor es X, la ecuación (43) se transforma en (44):

$$\xi \pm \sqrt{(\xi - x_0)^2 - 2r_1(\xi - x_0) + r_1 r_2} = X \dots \qquad (44)$$

ó sea:

$$(\xi - x_0)^2 - 2r_1(\xi - x_0) + r_1 r_2 = (X - \xi)^2 \dots \qquad (45)$$

*(Continuará.)*

# BIBLIOGRAFÍA

**Une expérience de laboratoire à propos du développement du poulet**, por M. DOELLO-JURADO. *Boletín de la Sociedad Physis*, tomo I, páginas 461-468, Diciembre 31 de 1914. Editores, Coni hermanos. Perú 684. Buenos Aires.

Dice el autor, recordando la experiencia de Weldon, que si se hacen desarrollar huevos de pollo en un medio que les devuelva el agua perdida por evaporación, los embriones resultantes carecen total ó parcialmente de amnios.

Recuerda los medios usados para conseguir tal resultado por los diversos autores y el que él mismo ideó para obtenerlo.

Lograda por tal medio la no formación de los anexos fetales, se pregunta si los caracteres particulares que presenta el embrión, deben ser considerados como simples efectos de una causa teratológica ó deben ser estimados como vuelta á los caracteres ancestrales; interpretando el amnios en los vertebrados terrestres como el resultado de su adaptación á la vida en un medio no acuático.

Ilustran el texto una fotografía y un esquema que avaloran aún más el interesante como bien presentado trabajo.

AUGUSTO C. SCALA.

**Apuntes cecidiológicos**, por ANA MANGANARO, en *Anales del Museo nacional de historia natural de Buenos Aires*, tomo XXVI, páginas 145 á 150. Julio 20 de 1914. Editores, Coni hermanos. Perú 684. Buenos Aires.

Resume la autora los caracteres morfológicos de once cecidios hallados sobre diversas plantas de nuestra flora, recordando de paso la poca atención que han despertado en los naturalistas nuestros tan interesantes formaciones.

Cita y describe las siguientes: *Agallas del llanten, de la marcela, del mimbrecillo, de la yerba golondrina, de la verdolaga, enrolladora del caatí, foliares del incienso, de la sombra de toro, hinchazones rameales de las acacias, papas del ceibo* y *papas de zapallitos*.

Espero que esta contribución de mi distinguida alumna irá seguida de otras observaciones importantes, tan numerosas en nuestra flora.

AUGUSTO C. SCALA.

**Les parasites végétaux des plantes cultivées en Argentine et dans les régions limitrophes**, por LUCIANO HAUMAN-MERCK, en *Anales del Museo nacional de historia natural de Buenos Aires*, tomo XXVI, páginas 163 á 225. Agosto 25 de 1914. Editores, Coni hermanos. Perú 684. Buenos Aires.

Primer trabajo de conjunto sobre las enfermedades criptogámicas de las plantas cultivadas en la República Argentina.

Publica en total 175 números distribuídos en la siguiente forma :

| | |
|---|---|
| Enfermedades bacterianas.............. | 6 |
| Enfermedades causadas por hongos.... | 161 |
| Enfermedades fanerogámicas........... | 7 |
| Enfermedades por líquenes............. | 1 |

Acompañan al texto seis figuras y un apéndice, donde á continuación del nombre de cada planta cultivada se halla un número que envía á las descripciones dadas en el importante trabajo.

AUGUSTO C. SCALA.

**Laboulbeniali ritrovate nelle collezioni di alcuni musei italiani**, por CARLOS SPEGAZZINI, en *Anales del Museo nacional de historia natural de Buenos Aires*, tomo XXVI, páginas 451 á 511. Mayo 29 de 1915. Editores, Coni hermanos. Perú 684. Buenos Aires.

El ilustre micólogo doctor Carlos Spegazzini publica una nueva contribución al estudio de las Laboulbeniaceas, interesante familia de hongos entomoparásitos; coleccionados esta vez durante su permanencia en Italia :

| | Especies |
|---|---|
| *Corethromyces* : con........ | 1 |
| *Dichomyces* : con.......... | 3 |
| *Dioichomyces* : con........ | 1 |
| *Ecteinomyces* : con......... | 1 |
| *Eucantharomyces* : con.... | 1 |
| *Eumisgomyces* : con....... | 1 |
| *Herpomyces* : con.......... | 5 |
| *Laboulbenia* : con......... | 83 |
| *Laboulbeniella* : con....... | 2 |
| *Rachomyces* : con......... | 1 |
| *Rickia* : con.............. | 3 |

Cuarenta y nueve esquemas y dibujos clarísimos ilustran este notable trabajo del incansable y docto especialista.

AUGUSTO C. SCALA.

**Segunda contribución al conocimiento de las Laboulbeniales italianas**, por el doctor CARLOS SPEGAZZINI, en *Anales del Museo nacional de historia natural de Buenos Aires*, tomo XXVII, páginas 37 á 74. Junio 3 de 1915. Editores. Coni hermanos. Perú 684. Buenos Aires.

En esta segunda contribución eleva el autor á 152 el número de especies de Laboulbeniaceas de la flora italiana.

Ilustran el texto 38 figuras perfectamente ejecutadas, sumando en total con las del trabajo anterior 87, que facilitan por su nitidez y exactitud la determinación específica.

AUGUSTO C. SCALA.

**Contribución al conocimiento de los Bethylidae (Hymenoptera) argentinos y descripción de una especie nueva**, por CARLOS BRUCH, en *Revista del Museo de La Plata*, tomo XIX, 2ª parte (2ª serie, tomo VI), páginas 442 á 446 (con 4 dibujos en 2 figuras). Junio 15 de 1915. Editores, Coni hermanos. Perú 684.

Traídos por el doctor Eduardo Carette de su viaje á San Julián (territorio de Santa Cruz) y estudiados por el doctor Bruch, quien halló una especie nueva de esta familia de himenópteros que contaba con tres representantes en la subfamilia de las *Anteoninæ* y dos en la de las *Bethylinæ*. Se agrega á la primera subfamilia una especie nueva : *Gonatopus Carettei* Bruch, n. spec., parecida al *G. Silvestrii* Kieff., cuyos caracteres diferenciales señala el autor.

AUGUSTO C. SCALA.

**Revista chilena de historia natural**, director y redactor profesor CARLOS E. PORTER, año XIX, números 1 y 2. Santiago de Chile.

El bien presentado número de la *Revista* que dirige en Santiago de Chile nuestro distinguido amigo el profesor Porter, trae abundante material científico ilustrado con numerosas láminas y dos cromolitografías muy nítidas, innovación feliz que acrecienta más aun el alto valor de la docta publicación.

En la imposibilldad de dar un resumen de cada uno de los trabajos que contiene, transcribimos el sumario :

I. La Redacción, *Á nuestros lectores*.

II. F. Lahille, *Apuntes sobre unos peces chilenos* (2 cromos).

III. C. E. Porter, *Galería de naturalistas de Chile* (biografía del señor John A. Wolffsohn).

IV. Jean Brèthes, *Description d'un nouveau genre et d'une nouvelle espèce de Ptiliidæ* (= Trichopterigidæ) *du Chili*.

V. C. E. Porter, *Los Heliasteridæ de Chile*.

VI. A. Horst, *Observaciones sobre la biología da la Tetilla hydrocotylifolia D. C.* (Saxifragáceas).

VII. I. Theriot, *Sur quelques mousses recueillis au Chili*, par le profeseur C. E. Porter.

VIII. C. E. Porter, *Materiales para la fauna carcinológica de Chile : X. El género Pilumnoides*.

IX. C. Silva F., *Un nuevo microlepidóptero chileno que causa perjuicios á las papas*.

X. Víctor Delfino, *Biología. Las transplataciones de los órganos, el cultivo de los tejidos y los automatismos viscerales*.

Termina el importante número con un capítulo de crónica, correspondencia, novedades científicas y bibliografía.

Rinde homenaje á nuestro ilustre sabio profesor doctor don Eduardo L. Holm-

berg, con motivo de su jubilación, adhiriéndose así á las justas manifestaciones de respeto y cariño que le fueron brindadas por sus amigos y admiradores.

AUGUSTO C. SCALA.

**Elementos de técnica microscópica y de histología vegetal**, por ISAAC OCHOTERENA. San Luís de Potosí. Talleres de la Escuela industrial. Méjico, 1914. (Fascículo I.)

Contiene este primer fascículo cuatro capítulos, precedidos por un prólogo y notas sobre plan de la obra. El primer capítulo trata de los aparatos; el segundo de los reactivos, fijadores, preservadores, aclaradores, opacantes y aisladores; el tercero de los colorantes, inofensivos y conservadores; el cuarto de los métodos histológicos, examen en vivo, disociación, método de los cortes á mano libre, y método de las inclusiones en parafina y celoidina.

En el apéndice resume la técnica ultramicroscópica y el dibujo á la cámara-clara.

Ilustran el texto 17 figuras, y en conjunto el libro está redactado con claridad y sencillez.

A. C. SCALA.

**Pflanzenanatomie**, por W. I. PALLADIN (übersetzt und bearbeitet von S. Tschulok). Druck und verlag von B. G. Teubner. Leipzig und Berlin, 1914 (195 pp. con 174 fig.).

Está dividido el libro en tres partes, que comprenden: 1ª anatomía de las células; 2ª anatomía de los tejidos; y 3ª anatomía de los órganos.

Cada parte se subdivide á su vez en capítulos que tratan los diversos tópicos generales que á ellos se refiere.

Las figuras son claras y bien elegidas, y las diferentes materias se hallan tratadas correctamente.

A. C. SCALA.

## LIBROS RECIBIDOS

BRUCH, CARLOS, *Descripción de un Cerambicido extraordinario de la República Argentina.* Buenos Aires. Imprenta Coni hermanos, 1914.

BRUCH, CARLOS, *Descripción de la hembra de Anoploderma,* Buenos Aires. Imprenta Coni hermanos, 1914.

MICHELE DE FRANCHIS, *Adunanza Solenne del 14 aprile 1914.* Palermo. Sede della Società, 1914, 67 páginas.

MUSEO SOCIAL ARGENTINO, *La République Argentine. Exposition universelle et internationale de Gand, Belgique, 1913.*

RAFAEL CASTAÑEDA VEGA, *Descripción y apreciaciones de árboles y maderas industriales y explotación forestal en Santiago del Estero.* Tésis presentada para optar al título de ingeniero agrónomo. Buenos Aires. Campos y Pezzunbono, 1914, 125 páginas.

*Censo de la capital de Tucumán (Rep. Arg.).* Buenos Aires. Compañía Sud Americana de Billetes de Banco, 1913, 94 páginas.

MARTÍN DEDEU, *Nuestros hombres de la Argentina : doctor Rafael Calzada* (de un libro en preparación). Buenos Aires. Establecimiento gráfico Robles y compañía, 1913, 125 páginas.

E. THIERY, *Restauration des montagnes. Correction des torrents reboisement.* París. Ch. Béranger, 1914, 480 páginas.

PROFESOR H. VILHENA, *Archivo de anatomia e de anthropologia.* Lisboa. Libanio da Silva, 1912, 95 páginas y láminas.

JORGE MAGNIN, *Les spécialités medicinales. Règlement qui leur est appliqué dans la République Argentine.* La Haye. Avandpost, 5 páginas.

JORGE MAGNIN, *Nouvelle méthode de destruction de la matière organique par le brome appliqué à la toxicologie.* La Haye. Avandpost, 8 páginas.

JORGE MAGNIN, *Effets des rayons roentgen sur les diverses sortss de poudre posibilité d'analyser sans augun danger les defférentes bombes ou machines explosives.* La Haye. Avandpost, 3 páginas.

VÍCTOR L. MEARIO, *Étude et analyse des eaux minérales de Puente del Inca. Pía de Mendoza.* La Haye. Avandpost, 15 páginas.

JORGE MAGNIN, *La centrifuge au laboratoire du chimiste et les nombreux usages auxquels on peut employer le nouveau type de machine centrifuge,* 6 páginas.

CARLOS BRUCH, *Catálogo sistemático de los coleópteros de la República Argentina.* Buenos Aires. Imprenta Coni Hermanos, 1914, 2 volúmenes.

MINISTÈRE DE L'INTÉRIEUR, *Introduction à l'annuaire sanitaire de la Belgique.* Bruxelles. Imprenta F. van Buggenhoudt, 1912, 282 páginas.

FRANCISCO FERNÁNDEZ DEL CASTILLO, *Apuntes para la historia de San Ángel.* Méjico. Imprenta del Museo nacional de arqueología, historia y etnología, 1913, 253 páginas.

FRÉDÉRIC GEOLITTI, *La cémentation de l'acier.* A. Hermann fils, 1914, 548 páginas.

DOCTOR RAFAEL PÉREZ, VENTO Y NIN, *Hojas fisiológicas.* Habana. Imprenta Fernández, 1914, 240 páginas.

CARLOS A. MARELLI, *Contribución á la craneología de las primitivas poblaciones de la Patagonia, etc.* Buenos Aires. Imprenta Coni hermanos, 1913, 90 páginas.

TRIFÓN UGARTE, *Investigación experimental sobre las corrientes de turbulencia en tubos capilares.* Tesis presentada para optar al grado de doctor en química. Leipzig. Imprenta August Pries, 1913, 88 páginas.

CARLOS BRUCH, *Universidad nacional de La Plata. Catálogo sistemático de los formícidos argentinos.* Buenos Aires. Imprenta Coni hermanos, 1914, 21 páginas.

MIGUEL DE LEONISSA, *Muscideos e culicideos. As myiasis.* Typographia a tracção electrica de Marré, 1907, 38 páginas.

*Instruction sur le harnachement des chevaux de l'artillerie et du train,* Bruxelles. Guyot frères, 1913, 196 páginas.

MIGUEL DE LEONISSA, *A vida a morte. Apparente a morte real.* S. Paulo. Typographia Marré y compañía. Monti, 1908.

ADRIEN CHARPY, *Études d'anatomie.* Toulouse. Imprenta Cassan fils, 1891, 219 páginas.

*Linguistique bolivienne. La langue saraveka.* Au siège de la Société, 1915, 42 páginas.

Estado mayor del ejército (3ª división). *Anuario del Instituto geográfico militar.* Sección gráfica del Instituto geográfico militar, 1913, 116 páginas y láminas.

*Tableau général du commerce de la Belgique avec les pays étrangers.* 1re et 3e partie. Estab. Genrau d'imprimirie. 1913, 397 páginas.

MINISTÈRE DES SCIENCES ET DES ARTS, *Bibliographie de Belgique.* G. Van Oest et compagnie, 1093 páginas.

SILVANUS P. THOMPSON, *Radiations visibles et invisibles.* Libraire scientifique A. Hermann fils, 1914, 376 páginas.

CLARENCE B. MOORE, *Somme aboriginal sites in Louisiana and in Arkansas.* Philadelphia, 1914, 191 páginas.

*The National Academy of Sciences 1863-1913.* Washington, 1913, 397 páginas.

M. HANRIOT, P. CARRÉ, A. SEYEWETZ, E. CHARABOT, A. HÉBERT, *Principes d'analyse et de synthèse en chimie organique.* Ch. Béranger, 1914, 785 páginas.

*Mensaje del presidente de la república al honorable Congreso de la Nación.* Asunción. Talleres gráficos del Estado, 1914, 50 páginas.

JUAN DE CÁRDENAS, *Primera parte de los problemas y secretos maravillosos de las Indias.* Imprenta del Museo nacional de arqueología, historia y etnología, 1913, 222 páginas.

*Congrès international d'anthropologie d'archéologie préhistoriques.* Compte-rendu de la XIVe session. Imprenta Abert Kundig, 1914, 525 páginas.

*Transactions of the fifttenth international Congress on hygiene and demography,* vol. II, III, IV. Government Printing office, 1913, 688 páginas, 2 volúmenes.

*Anales de la secretaría de comunicaciones y obras públicas.* Méjico. Talleres gráficos de la secretaría de comunicaciones y obras públicas, 1914, 178 páginas y láminas.

MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, *Mission du serviee géographique de l'armée pour la Mesure d'un arc de méridien équatorial en Amérique du Sud.* París. Gauthier-Villars, 1912, 346 páginas y láminas.

M. ANDRÉ MEYER, *Relations entre la constitution chimique et la coloration des corps organiques.* Libraire scientifique Hermann et fils, 1914, 48 páginas.

Mlle E. FEYTES, *Le paramagnétisme appliqué á l'étude des sels meétalliques.* Libraire scientifique Hermann et fils, 1914, 27 páginas.

*Anuario del Observatorio astronómico nacional.* Imprenta y litografía Universo, 1907, 158 páginas.

*De la correction des rivières à fond mobile telles que la Loire système Audouin.* 21 páginas.

G. LECOINTE, *Commission polaire internationale. Procès verbal de la session tenue a Rome en 1913.* Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 1913, 293 páginas.

A. H. ROFFO, *Cáncer experimental.* Las ciencias, 1914, 319 páginas.

ALCIDES CALANDRELLI, *La codificación del derecho internacional privado.* La Buenos Aires, 1913, 51 páginas.

*Ley que establece el plan de estudios de la escuela nacional preparatoria.* Tipografía económica, 1914, 12 páginas, 2 volúmenes.

INGENIERO LUIGI LUIGGI, *L'evoluzione delle grandé diglie per laghi artificiali.* Est. graf. Varesine, 1914, 22 páginas.

PEDRO J. PANDO, *Higiene sanitaria. Eliminación de los productos cloacales y residuos industriales.* Talleres de impresiones oficiales, 1914, 184 páginas.

WALTHER SCHILLER y ERNESTO LONGOBARDI, *Estudios sobre la formación petrolí-*

*fera argentinoboliviana*. Buenos Aires. Imprenta Coni hermanos, 1913, 43 páginas.

LUDWIG KARL DORGGI, *Ueber Wasserreinigung mit. Baryumaluminat*. Dissert-Druckerei Gebr. Leermann y compañía, 1913, 76 páginas.

F. M. VAN GELDEREN, *Zur Kenntnis Der. Nitroso-Azide*. 1912, 78 páginas.

INGENIERO EUGEN ANTHES, *Uber Oxalylbromid und andere Saurehaloide. Reaktionen des Diphenylen ketens*. Aktien Buchdruckerei, 1913, 68 páginas.

ALPHONS LANDOLT, *Zur Unterscheidung von naturlichen Fruchlessenzen und künstlicen Fruchatäthern*. Dessert-Druckerei Gerbr. Leemann y compañía, 1913, 90 páginas.

INGENIERO RUDOLF ENDLE, *Einwirkung von Diphenylketen auf ungesattigte ketone*. J. J. Meier, 1913, 79 páginas.

ROBERT y STEIGER, *Ueber Gusspannungen*. Druck von Gebr. Leemann y compañía, 1913, 100 páginas.

H. DUNOD et E. PINAT, *Les nouveaux libres scientifiques et industriels*. 1908, 2 volúmenes.

*Annali della stazione sperimentale per le malattie infettive del bestiame*. Stabilimento poligrafico, 1913, 331 páginas.

DOCTOR FOVEAU DE COURMELLES, *L'année électrique electrothérapique et radiographique*. Ch. Béranger, 1914, 340 páginas.

LÉON COSYN, *Exemples de calculs de constructions en béton armé*. Ch. Béranger, 1914, 454 páginas.

JUAN B. LARA, *Influencia de los componentes de las aguas y tierras y acción bioquímica de sales de zinc y manganeso en la producción de la vid*. Tesis presentada para optar al grado de doctor en química. Mendoza. Taller gráfico G. Kraft, 104 páginas, 2 volúmenes.

J. DANCUY, *Encyclopédie agricole: constructions rurales*. París. J.-B. Baillière et fils, 1913, 500 páginas.

SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE, *L'astronomie*. Gauthier-Villars, 1913, 163 páginas.

FLORENTINO MENEZES, *Leis de sociologia aplicada ao Brasil*. Typographia Xavier, 1913, 66 páginas.

FLORENTINO MENEZES, *Estudo chorografico e social do Brasil*. Typographia Amaral, 1912, 151 páginas.

M. DE WIT, *Die Warmeabgabe. Blanker Stromdurchflossener Leitungs-Drälne in Ruhender Luft*. 1913, 81 páginas.

ARNOLD HANNI, *Uber eine direkte Analyse von Wechselspannungen und Wechseltrömen*. Fachschriftenverlag y compañía, 1912, 57 páginas.

BENVENUTO TEDESCHI, *Untersuchung über die Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante einiger Prebspan-und Pilit-Isolatorem*. Fachschriftenverlag y compañía-1913, 20 páginas.

ROBERT SÖLIGER, *Untersuchung des Druckund Strömungsverlaufs in Schaufel für Gleichdruckturbiner bei Uberschallgeschwin digkeit*. Jean Frey, Buch und Kunstdruckerei, 1913, 103.

ERNEST DÜBI, *Ueber Wirkunsgsweis des Gefallvermehress nach Cl. Herschel in Verbindung mit einer Turbine*. Zürich. Jean Frey, Buch und Kunstdruckerei, 1912, 140 páginas.

HEINRICH JENNY, *Untersuchungen am mechanischen Webstuhl*. Zürich. Jean Frey, Buch und Kunstdruckerei, 1912, 67 páginas.

WALTER ANDERHUB, *Untersuchungen über die Dampfstromung im radialen Schaufelspalt bei Ueberdruckturbinen.* Zürich. Jean Frey, Buch und Kunstdruckerei, 1912, 114 páginas.

PAUL CURTI, *Ueber Seeretention, Hochfluten und das Problem-Konstanter Wasserfuhrung.* Zürich. Verlag von Albert Raustein, 1911, 96 páginas.

ERNEST ULBRICH, *Zur Kenntnis der oxyazoverbindungen.* Zürich. J. J. Meier, 1913, 89 páginas.

HULDREICH KELLER, *Berechnung gewölbter Platten.* 1912, 52 páginas.

PAUL BAUNGARTNER, *Untersuchungen an Bananenblütenständen.* 1913, 132 páginas.

JOH. HEINRICH SCHAPPI, *Studien Uber mehrwertiges Jod.* 1912, 108 páginas.

HUBERT ELLISSEN, *Untersuchung der magnestichen Eigenschaften des Eisens unter den Einfluss sehr schwacher elektrischer Ströme.* Dessert-Drukerei Gebr. Leemann y compañía, 1912, 60 páginas.

JEAN DANIEL HATT, *Synthese Stark Verzweigter aliphatischer Verbrndungen.* Dessert-Drukerei Gebr. Leemann y compañía, 1912, 69 páginas.

VERNER SULZER, *Zur Frage des Colinachweises in oberflächengewassern.* Dessert-Drukerei Gebr. Leemann y compañía, 1913, 110 páginas.

EDUARDO POIRIER, *Cuarto congreso científico (1º Panamericano). Reseña general.* Santiago de Chile. Barcelona, 1915, 304 páginas.

JUAN W. GEZ, *Generalidades sobre paleontología argentina. El Mastodon platensis Ameghino.* Corrientes, 1915, 52 páginas.

MARIO ESTRADA, *El Caupí (Vigna Unguiculata).* Buenos Aires. Ricardo Radaelli, 1912, 78 páginas, 3 volúmenes.

JOAQUÍN BENSAUDE, *Histoire de la science nautique portugaise. A l'époque des grandes découvertes.* Munich, 1914, 64 páginas.

ALMER L. CORTHELL, *Correct methods of Creating and Maintaining Channels at the Mouths of Fluvial and Tidal Rivers, and at the Outlets of Inclosed Tidal Areas.* New York, 1914, 12 páginas.

Asociación nacional del profesorado, *La formación del profesorado de enseñaza secundaria.* Buenos Aires. M. A. Rosas, 1914, 270 páginas.

República de Cuba. Secretaría de agricultura, comercio y trabajo, *Exposición ganadera. Concurso internacional de reproductores.* Habana. Rambla Bouza y compañía, 1914, 124 páginas.

ISAAC OCHOTERENA, *Elementos de técnica microscópica y de historia vegetal.* San Luis (Potosí). Talleres de la Escuela industrial, 1914, 50 páginas.

ALFONSO QUIÑÓNEZ, *Mensaje presentado á la Asamblea nacional.* San Salvador, 1915, 55 páginas.

WINDHAUSEN, *Separat-Abdrouck aus dem Neumen Jahrbuch. Fur Mineralogie und Palaontologie.* Stuttgart, 1914, 37 páginas.

A. DE VILHENA, *Archivo de anatomía y antropología.* Lisboa. Libanio da Silva, 1914, 126 páginas.

CARLOS AMEGHINO, *Le Pyrotherium. L'étage pyrotheen et les a Notostylops.* Buenos Aires. Coni hermanos, 1914.

Ministerio de gobierno. Dirección general de estadística de la provincia de Entre Ríos, República Argentina, *Memoria anual del año 1913.* Paraná. Artes Gráficas, 1913, 249 páginas.

ATILIO A. BADO, *La calidad de los carbones de hulla para combustibles. Pliego oficial de condiciones para su recepción.* Buenos Aires, 1915, 8 páginas.

Atilio A. Bado, *La enseñanza de la Química en la Facultad de ciencias físicas, matemáticas y astronómicas de la Universidad de La Plata.* Buenos Aires. Cúneo, 1914, 13 páginas.

Manuel Beatti, *Tumores de animales. Etiología del cáncer. Estado actual del tratamiento del cáncer experimental.* Buenos Aires. La semana Médica, 1914, 51 páginas.

Manuel Beatti, *Instituto privado para la investigación del cáncer. Tumores de pescados.* Buenos Aires. Coni hermanos, 1913, 13 páginas.

Carlos Lizer, *Estudio químico de la mezcla sulfocálcica empleada como insecticida fungicida.* Buenos Aires. Damiano, 1914, 40 páginas.

Estanislao Maldones, *Toponimia catamarqueña. La primera fundación de Barco. La segunda fundación de Londres.* Buenos Aires. Stella, 1915, 51 páginas.

Ernesto Nelson, *Plan de reformas á la enseñanza secundaria. En sus fines, su organización y su función social.* Buenos Aires. La casa de los maestros, 1915, 308 páginas.

Manuel Gallegos Naranjo, *«Haz bien sin mirar á quien». Novela social.* Buenos Aires. El comercio, 1910, 91 páginas.

Galdino Negri, *Velocidad de propagación. Ondas sísmicas.* La Plata. Joaquín Sesé, 1911, 143 páginas.

J. U. Zöllner, *Curso de psicología.* Buenos Aires. Ángel Estrada y compañía. Buenos Aires, 1915, 299 páginas.

Carlos Navarro Lamarca, *Compendio de la historia general de América.* Buenos Aires. Ángel Estrada y compañía, 1913, 886 páginas.

Fernando de Montessus de Ballore, *Historia sísmica de los Andes meridionales al sur del paralelo XVI. Cuarta parte Chile central.* Santiago de Chile. Cervantes, 1912, 213 páginas.

Fernando de Montessus de Ballore, *Boletín del servicio sismológico de Chile,* números III, V, VI, VII y VIII. Santiago de Chile. Barcelona, 1913, 5 volúmenes.

Ramón Rojas Corrales (Kioskini), *La infancia delincuente en Costa Rica.* Costa Rica. Tipografía nacional, 1914, 157 páginas.

Juan Rafael Mora, *Juegos florales de 1914 Juan Rafael Mora.* Costa Rica. Tipografía nacional, 1914, 127 páginas.

*Diario de sesiones de la honorable cámara de senadores de la República Oriental del Uruguay,* tomo C, años 1911-1912. Montevideo. Imprenta librera Tolosa, 1913, 642 páginas.

*Trabajos y actas del Congreso penitenciario nacional, celebrado en Buenos Aires del 4 al 11 de mayo de 1914.* Buenos Aires. Talleres gráficos Penitenciaria nacional, 1914, 303 páginas.

B. Teixidor, *Resumen de historia antigua* (Oriente, Grecia y Roma). Buenos Aires. Ángel Estrada y compañía, 1915, 206 páginas.

Arturo Castaño, *Finanzas de los ferrocarriles argentinos. Apéndice. El tráfico en el nuevo puerto. Un progreso científico.* Buenos Aires, 1915, 27 páginas.

Martín Doello-Jurado, *Une expérience de laboratoire. A propos du dévelop-pement du poulet.* Buenos Aires. Coni hermanos, 1914, 8 páginas.

Enrique V. Zapi, *Acción de los metales sobre los cloruros de carbono.* Buenos Aires. Coni hermanos, 1914.

Sasso y compañía, *La industria textil. Cultivo de las plantas textiles. Explota-*

*ción manufacturera de sus fibras. Comercio. Necesidad de propender al desarrollo de esta nueva fuente de riquezas. La nación debe bastarse á sí misma.* Buenos Aires. 66 páginas, 2 tomos.

Edición oficial, *República de Colombia. Tratado entre la república de Colombia y los Estados Unidos de América para el arreglo de sus diferencias provenientes de los acontecimientos realizados en el Itsmo de Panamá en noviembre de 1903, subscripto en Bogotá el 6 de abril de 1914.* (Primer anexo á la memoria de relaciones exteriores de 1914). Bogotá. Imprenta nacional. 1914, 168 páginas.

República de Colombia, *Memoria del Ministerio de Relaciones exteriores al congreso 1914.* Bogotá. Imprenta nacional, 1914, 162 páginas.

ENRIQUE FYNN, *Sugestión sobre el trabajo de la tierra y la conservación de la humedad.* Buenos Aires. Ricardo Radaelli, 1912, 59 páginas, 2 volúmenes.

*Anales de la Academia de filosofía y letras,* tomo III. Buenos Aires, 1914, 339 páginas.

M. PAUL APELL, *Institut de France. Séance publique annuelle des cinq academies du lundi 26 octobre de 1914.* París. Firmin-Didot, 1914, 124 páginas.

Ecuador, *Constitución política de la república del Ecuador* (proclamada el año 1830) dada por la Asamblea nacional de 1906. Guayaquil. E. Rodenas, 1909, 132 páginas.

SALVADOR R. MERLOS, *Los males de la raza. Juegos florales de 1914. Concurso de sociología.* Costa Rica. Tipografía nacional, 1915, 246 páginas.

SILVERIO LANZA (clásicos y modernos), *Cuentos.* Costa Rica, 24 páginas.

JACINTO BENAVENTE (clásicos y modernos), *El príncipe que todo lo aprendió en los libros.* Costa Rica, 59 páginas.

CARLOS GUIDO Y SPANO (clásicos y modernos), *Poesías.* Costa Rica, 32 páginas.

Reino de Bélgica. Ministerio de Relaciones exteriores, *Correspondencia diplomática relativa á la guerra de 1914* (24 de julio-29 de agosto). Buenos Aires, 75 páginas.

EDUARDO POIRIER, *Cuarto congreso científico (1° Panamericano). Su reunión en Santiago de Chile, celebrada del 25 de diciembre de 1908 al 5 de enero de 1909. Reseña general.* Santiago de Chile. Barcelona, 1915, 294 páginas.

*La guerre mondiale faits acquis à l'histoire. Documents.* París, 1915, 32 páginas.

*Boletín de educación.* México, 1914, 203 páginas.

# PUBLICACIONES RECIBIDAS EN CANGE

## EXTRANJERAS

### Alemania

Zeftschrift der Gesellschaf fur Erdkunde, Berlin. — Verhandlungen des Naturhistorischen Vereins der preussischen Rhinalande-Westfalens, etc., Bonn. — Abhandlungen herausgegeben von Naturwissenschaftiichen Verein, Bremen. — Deutsche Geographische Glätter, Bremen. — Abh. der Kaiserl. Leop. Barol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Halle. — Nachrichten von der Konigl Gesellschaft der Wissenschaften, Gottingen. — Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft, Dresden. — Naturforschenden Gesellschaft, Leipzig. — Mitheilungen aus dem Naturhistorischen Museum, Hamburg. — Mittheilungen der geographischen Gesellschaft, Hamburg. — Berichte der Naturforschenden Gesellschaft, Freiburg. — Jahres Berfchte des Naturwissenschaftlichen, Elberield. — Schriften der Phisikalisch — Okonomischen gesellschaft, Stuttgart. — Drucksache Andeu Verlag von Sud-u-Mittel Amerika, Berlín. — Sitzungsberichte der mathematische,-physikalischen Klasseder, K. B. Akademie der Wissenschaften Munchen.

### Australia

Records of the geological Survey, Sydney.

### Austria-Hungría

Verhandlungen des naturforschen des Vereines, Brünn. — Annalen des K. K. Naturhistorischen of Museums, Viena. — Verhandlungen der K. K. Zoologisch Botanischen gesellschaft, Wien. — Sitzungsberichte des deutschen naturwissenchaftlich Medicinischen Vereines fur-Bohmen, « Lotos » Praga. — Jarhbuch des Ungarischen Kapathen Vereines, Iglo. — Annales Historico-Naturales Musei Nationali Hungarici, Budapest. — Sevceuko Gessellschaft der Wissenschaften in Lemberg.

### Bélgica

Acad. Royale des Sciences, des Letres et des Beaux Arts, Bruxelles. — Ann. de la Soc. Entomologique, Bruxelles. — Ann. de la Soc. Royale Malacologique, Bruxelles. — Bull. de l'Assoc. des Ing. Electriciens Institute Montefiore. — Liége. — Societé Internationale de Dialectologie Romane, Bruxelles.

### Brasil

Boletim da Sociedade de Geographia, Rio Janeiro. — Bol. do Museo Paraense, Pará. — Rev. do Centro de Sciencias Letras e Artes, Campinas. — Bol. da Agricultura, S. Paulo. — Rev. do Museo Paulista, S. Paulo. — Comissao Geográphica é Geologica, San Paulo. — Bol. do Observ. Meteregico, Rio Janeiro. — Bol. do Inst. Geographico é Etnographico, Rio Janeiro. — Rev. da Sociedade Scientifica, Sao Paulo. — Rev. do Club de Engenharia, Rio de Janeiro. — Revista « A Lavoura », Río de Janeiro.

### Canadá

Report of the Geologinal Survey, Ottawa.

### Chile

Rev. de la Soc. Médica, Santiago. — Verhandlungen des Deutschen Wissenschaftlichen Vereines, Santiago. — Actas de la Soc. Científica de Chile, Santiago. — Rev. Chilena de Hijiene, Santiago. — Ofic. Hidrográfica de la Marina de Chile, Valparaíso. — Rev. Chilena de Historia Natural, Valparaíso. — Rev. de Arquitectura, Santiago. — Anuario del Servicio Meteorológico de la Dirección del Territorio Marítimo, Valparaíso. — Rev. de la Oficina de Mensuras de Tierras, Santiago. — Rev. de Ingenieria y Arquitectura, Valparaíso.

### Colombia

An. de Ingenieria. Soc. Colombiana de Ingenieros, Bogotá. — Rev del Ministerio de Obras Públicas, Bogotá. — Bol. del Ministerio de Relaciones Exteriores, Bogotá.

### Costa Rica

Oficina de Depósito y Cange de Publicaciones. San José. — An. del Inst. Físico Geográfico Nacional, — San José. — Bol. de Fomento, Órgano del Ministerio de Fomento, San José.

## Cuba

Universidad de la Habana, Cuba. — Bol. del Observatorio Meteorológico del Colegio de Belén, Habana. — Rev. de la Facultad de Letras y Ciencias, Habana. — Anales de la Academia de ciencias médicas, físicas y naturales. Habana.

## Ecuador

Rev. de la Soc. Jurídico-Literaria, Quito. — An. de la Universidad Central del Ecuador, Quito.

## España

Bol. de la Soc. Geográfica, Madrid. — Bol. de la R. Acad. de Ciencias, Barcelona. — R. Acad. de Ciencias, Madrid. — Rev. de la Unión Ibero-Americana, Madrid. — Rev. de Obras Públicas, Madrid. — Rev. Tecnológica Industrial, Barcelona. — Rev. Industria é invenciones, Barcelona. — Rev. Minera Metarlúrgica y de Ingeniería, Madrid. — Bol. de la Real Sociedad Española de Historia Natnral (Museo de Ciencias Naturales), Madrid.

## Estados Unidos

Bull. of the Scientific Laboratoires of Denison University, Granville, Ohio. — Bull. of the Lloid Library of Botany, Pharmarcy and Materia Medica, Cincinati, Ohio. — Bull. of the New York Botanical Garden, New York. — Bull. of the Wisconsin Natural History Society Milwankee, Wis. — Bull. of the University, Kansas. — Bull. of the American Geographical Society, New York. — Jonrnal of the New Jersey Natural History, New Jersery, Trenton. — Journal of the Military Service Institution. of the U. States. — Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society, Chapel Hill. Nord-Carolina. — Memoirs of the National Academy of Sciences, Washington. — M. Zoological Garden, New York. — Proceeding of the Engineers Club, Filadelfia. — Ann. Report Missouri Botanical Garden, San Luis M. O. — Association of Engineering Society San Louis, Mas. — Bull. of the Museum of Comparative Zoology, Cambridge-Mas. — Bull. of the American Mathematical Society, New York. — Trasaction of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters, Madison Wis. — Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, New Haven. — The Engineering Magazine, New York. — Sixtenth Annual Report of the Agricultural Experiment Station, Nebraska. — The Library American Association for the Advancement of Sciences. Care of the University, Cincinati Ohio. — Secretary Board of Commisioners Second Geological Survey of Pensylvania, Philadelphia. — Smithsonians Institution, Washington. — U. S. Geological Survey, Washington. — The Ohio Mechanics Institute, Cincinati — University of California Publications, Berkeley. — Proceeding of the Davemport Academy, Jowa. — Proceeding and transaction of the Association, Meride, Conn. — Proceeding American Society Engineers, New York. — Proceeding of the Academy of Natural Sciences, Philadelphia. Proceeding of the American Philosophical Society, Philadelphia. — Proceeding of the Indiana Academy of Sciences, Indianopolis. — Proceeding of the California Academy of Science, — San Francisco. — The University of Colorado. « Studies ». Colorado. — University of New Mexico Library, Albuquerque. — Michigan Academy of Sciences. Lausing-Michigan. — The Engineers Society of Western Pensylvania, Pittsburg. — Bulletin of the Hadley Climatological Laboratory of the University of New Mexico. New Mexico. — Ohio Agricultural Experiment Station, Wooster-Ohio. — American Institute of Mining Engineers, New York. — Washington University Studies, San Louis M-O. — American Midland Naturalist University of Notre Dame, Indiana.

## Filipinas

Bulletin of the Manila Central Observatory, Manila.

## Francia

Bull. de la Soc. d'Etudes Scientfiques, Angers. — Bull de la Soc. des Ingénieurs Civils de France, Paris. — Bull. de la Soc. de Géographie Commerciale, Paris. — Bull. de la Acad. des Sciences et Lettres, Montpelier. — Bull. de la Soc. de Topographie de France, Paris. — Recuéil de Médecine Vétérinaire, Alfort. — Travaux Scientifiques de l'Universitè, Rennes. — Bull. de la Soc. de Géographie Commerciale, Bordeaux. — Bull. de la Soc. des Sciences Naturelles et Mathematiques, Cherbourg. — Ann. des Mines, Paris. — Min. de l'Instruction Public et des Beaux Arts, Paris. — La Feuille des Jeunes Naturalistes, Paris. — Ann. de la Soc. Linnéenne, Lyon. — Bull. de la Soc. de Géographie Commerciale, Havre. — Bulletin de la Societé de Etude des Science Naturelles. Beziers. — Bulletin de la Societé de Géographie, Rocheffort. — Journal de la Societé des Amercanistes, Paris. — Revue des Pyrénées, Toulouse. — Ecole Nationale Imperieme des Mines, Paris. — Cercle au Tour du Monde, Boulogne sur Seine.

## Holanda

Acad. R. des Sciences, Amsterdam. — Nederlandche Entomolog. Verseg, Rotterdam.

## Honduras

Revista de la Universidad de Honduras, Tegucigalpa.

## Inglaterra

The Geological Society, London. — Minutes of Proceeding of the Institution of Civil Engineers, London. — Institution of Civil Engineers of Ireland, Dublin. — The Guaterly Journal of the Geological Society, London. — The Mineralogical Magazini, Londres.

*(Concluirá en el próximo número).*

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

---

DIRECTOR : DOCTOR HORACIO DAMIANOVICH

---

NOVIEMBRE-DICIEMBRE 1915. — ENTREGAS V-VI
TOMO LXXX

---

ÍNDICE



---

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS
684 — CALLE PERU — 684

1915

## JUNTA DIRECTIVA



---

## ADVERTENCIA

Los colaboradores de los *Anales*, que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos deben solicitarlo por escrito a la Dirección, la que le dará el tramite reglamentario. Por mayor número de ejemplares deberán entenderse con los editores señores Coni hermanos.

Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas.

Los manuscritos, correspondencia, etc., deben enviarse a la Dirección **Cevallos, 269**.

*Cada colaborador es personalmente responsable de la tesis que sustenta en sus escritos.*

**La Dirección.**

---

## PUNTOS Y PRECIOS DE SUBSCRIPCIÓN

**Local de la Sociedad, Cevallos 269, y principales librerías**

| | Pesos moneda nacional |
|---|---|
| Por mes | 1.00 |
| Por año | 12.00 |
| Número atrasado | 2.00 |
| — para los socios | 1.00 |

LA SUBSCRIPCIÓN SE PAGA ADELANTADA

**El local social permanece abierto de 3 á 7 y de 8 á 12 pasado meridiano**

# LA RADIACIÓN Y LA TEORÍA DE LOS QUANTA

Por CAMILO MEYER

*(Conclusión)*



69. **Leyes térmicas estadísticas sacadas de la experiencia.** — En estas condiciones, la forma de investigación más lógica consiste en tratar de sacar de las propiedades térmicas de la materia suministradas por la experiencia, conclusiones relativas á las leyes estadísticas de los fenómenos térmicos.

Con este propósito, Einstein se funda en el teorema general de Boltzmann que liga la probabilidad estadística con la entropía de un estado dado :

$$S = K \log W + \text{const.} \qquad (1)$$

dando esta relación la probabilidad de un estado estadístico determinado para un sistema aislado cuando se conoce la entropía correspondiente S.

Si aplicamos este teorema á un cuerpo sólido de calor específico $c$ en contacto térmico con un depósito de capacidad calorífica indefinida y temperatura T, este cuerpo tendrá, en estado de equilibrio térmico, una energía media $\overline{E}$. En cuanto á su energía á una época dada, se diferenciará de $\overline{E}$ en una cantidad $\varepsilon$, en general muy pequeña, y podremos designar por $(T + \tau)$ su temperatura á la misma época.

Estas variaciones de la energía y temperatura resultan necesariamente del movimiento térmico desordenado, y la entropía correspondiente á un valor dado de $\varepsilon$ ó $\tau$, la tendremos mediante la relación :

$$ds = \frac{cd\tau}{T + \tau} - \frac{cd\tau}{T}. \qquad (2)$$

Si ahora integramos y elegimos la constante de integración en una forma conveniente, prescindiendo de las potencias de $\tau$ mayores que la segunda, tendremos sucesivamente :

$$ds = \frac{cTd\tau - c(T + \tau)d\tau}{T^2 + T\tau} = -\frac{c\tau d\tau}{T^2 + T\tau} = -\frac{c}{T} \cdot \frac{Td\tau}{T + \tau}$$

$$s = -\frac{c}{T^2}\int Td\tau = -\frac{c}{T^2} \cdot \frac{\tau^2}{2} = -\frac{c\tau^2}{2T^2}.$$

Ahora bien, tenemos :

$$c\tau = \varepsilon$$

de donde :

$$\tau^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2},$$

y por consiguiente :

$$\varepsilon = -\frac{c\tau^2}{2T^2} = -\frac{c\varepsilon^2}{2c^2T^2} = -\frac{\varepsilon^2}{2cT^2} + \text{const.} \qquad (3)$$

Por otra parte, según el teorema de Boltzmann, se tiene :

$$\text{Log } W = c\frac{s}{K}$$

$$W = ce^{\frac{s}{K}} = ce^{-\frac{\varepsilon^2}{2KcT^2}}. \qquad (4)$$

Resulta que el cuadrado medio $\varepsilon^2$ de las variaciones de la energía, desde el valor medio $\overline{E}$, tiene por expresión :

$$\overline{\varepsilon^2} = KcT^2 \qquad (5)$$

y esta expresión es absolutamente general. Se puede pues aplicarla al caso de un cuerpo simple en estado sólido de frecuencia $\nu$ y de $n$ átomos gramos. Para ello tendremos que poner :

$$c = 3nR\frac{e^{\frac{h\nu}{KT}}\left(\frac{h\nu}{KT}\right)^2}{\left(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1\right)^2} \qquad (6)$$

y si introducimos este valor en la relación (5), resultará :

$$\overline{\varepsilon^2} = \mathrm{KT}^2 3n\mathrm{R} \frac{e^{\frac{h\nu}{\mathrm{KT}}}\left(\frac{h\nu}{\mathrm{KT}}\right)^2}{\left(e^{\frac{h\nu}{\mathrm{KT}}}-1\right)^2}.$$

Podemos ahora eliminar T mediante la fórmula :

$$\overline{\mathrm{E}} = 3n\mathrm{N} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{\mathrm{KT}}}-1},$$

y resulta :

$$e^{\frac{h\nu}{\mathrm{KT}}} - 1 = \frac{3n\mathrm{N}}{\mathrm{E}} h\nu$$

$$e^{\frac{h\nu}{\mathrm{KT}}} = \frac{3n\mathrm{N}}{\mathrm{E}} h\nu + 1,$$

de donde :

$$\overline{\varepsilon^2} = \mathrm{KT}^2 3n\mathrm{R} \frac{\left(\frac{3n\mathrm{N}}{\mathrm{E}} h\nu + 1\right)\left(\frac{h\nu}{\mathrm{KT}}\right)^2}{\left(\frac{3n\mathrm{N}}{\mathrm{E}} h\nu\right)^2},$$

y simplificando :

$$\overline{\varepsilon^2} = 3n\mathrm{N} \frac{\left(\frac{3n\mathrm{N}h\nu}{\mathrm{E}} + 1\right)\frac{h^2\nu^2}{\mathrm{K}}}{\frac{9n^2\mathrm{N}^2h^2\nu^2}{\mathrm{E}^2}}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{3n\mathrm{R}h^2\nu^2}{3\mathrm{K}n\mathrm{N}h\nu}\mathrm{E} + \frac{3n\mathrm{R}h^2\nu^2\mathrm{E}^2}{9n^2\mathrm{N}^2h^2\nu^2\mathrm{K}}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{R}h\nu\mathrm{E}}{\mathrm{NK}} + \frac{3\mathrm{E}^2}{3n\mathrm{N}^2\mathrm{K}};$$

y como se tiene :

$$\mathrm{R} = \mathrm{NK},$$

tenemos por último :

$$\left(\frac{\overline{\varepsilon^2}}{\mathrm{E}^2}\right) = \frac{h\nu}{\mathrm{E}} + \frac{1}{3\mathrm{N}n}. \qquad (7)$$

Podemos ahora poner :

$$Z_q = \frac{\overline{E}}{h\nu} \tag{8}$$

siendo $Z_q$ el número de quanta de Planck que se encuentran, término medio, en el cuerpo y también:

$$Z_l = 3n\mathrm{N} \tag{9}$$

siendo $Z_l$ el número total de los grados de libertad de todos los átomos del sistema, y tendremos:

$$\overline{\left(\frac{\varepsilon}{\overline{E}}\right)^2} = \frac{1}{Z_q} + \frac{1}{Z_l} \tag{10}$$

70. **Interpretación de los resultados.** — La última relación nos enseña que las fluctuaciones relativas de la energía del sistema, debidas al movimiento térmico irregular, tienen dos causas distintas que corresponden á los dos términos del segundo miembro de la misma.

La fluctuación que se refiere al segundo término es la que, según las leyes de la mecánica común, *sólo habría de existir;* procede del hecho de que el número de los grados de libertad del sistema es finito y pone en evidencia la existencia de los átomos, quedando independiente de la energía contenida en el sistema.

En cuanto al primer término, la fluctuación que le corresponde no depende en lo más mínimo del número de los grados de libertad, sino únicamente de la frecuencia propia y de la cantidad de energía que, término medio, se encuentra presente. Esta fluctuación se anula cuando la misma energía toma grandes valores, y corresponde exactamente á la hipótesis según la cual la energía se compone de quanta $h\nu$ que se intercambian independientemente los unos de los otros. Si prescindimos del segundo término, tenemos:

$$\sqrt{\overline{\left(\frac{\varepsilon}{\overline{E}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{Z_q}}$$

y ya sabemos que este concepto no se puede conciliar, sino muy difícilmente, con los datos experimentales acerca de la conductibilidad eléctrica.

Vemos también que la fluctuación que corresponde á este primer término no depende de la magnitud de los átomos. Pero podría proce-

der del hecho de que, cualesquiera sean los portadores de energía, el número de las distribuciones posibles de ésta vaya disminuyendo con ella misma. Para una energía total muy pequeña, el movimiento molecular ha de ser coordenado en la misma forma como si el número de los grados de libertad fuese también pequeño y con esto podemos darnos cuenta de lo inexacto de la teoría de los quanta en la forma que le atribuye Planck. Esta misma inexactitud tendría tal vez su origen en el modo de considerar la limitación del número de los estados posibles como una propiedad de los grados de libertad considerados individualmente.

Sin embargo lo esencial de la teoría parece llamado á subsistir: si $\overline{E}$ toma un orden de magnitud igual al de $h\nu$, la fluctuación relativa se vuelve del orden de la unidad, lo que significa que la fluctuación de la energía resulta del orden de magnitud de la misma energía, ó que la energía total se encuentra alternativamente presente y ausente y por consiguiente actúa como si no fuera divisible indefinidamente; pero al propio tiempo vemos que, con esto, no sería imprescindible admitir *la existencia de elementos distintos de energía de magnitud definida.*

**71. Caso de la radiación térmica.** — Con las consideraciones que anteceden conocemos ahora las conclusiones de Einstein en lo que se refiere á las fluctuaciones de la energía. Después, el físico de Berlín busca la forma en la cual es necesario atribuír también á la radiación una estructura discontinua en el sentido más general. Consideremos, dice Einstein, un cuerpo M de calor específico $c$, rodeado por un recinto U de calor específico infinito á la temperatura T y en estado de equilibrio permanente de temperatura con este ambiente. En virtud de la irregularidad de los fenómenos térmicos elementales, la energía de M experimenta fluctuaciones alrededor de su valor medio $\overline{E}$, de modo que por lo general se diferencia de éste en una cantidad variable $\varepsilon$.

Pero resulta del teorema de Boltzmann que el promedio cuadrático de esta fluctuación tiene por expresión

$$\overline{\varepsilon^2} = \mathrm{K}c\mathrm{T}^2. \tag{1}$$

Supongamos ahora que el intercambio de calor entre U y M se verifica *únicamente por radiación.* Supondremos la superficie del cuerpo M completamente reflectora, menos en una pequeña parte $\Sigma$ que al contrario admitiremos perfectamente absorbente en el dominio de fre-

cuencia $d\nu$ y completamente reflectora para el resto del espectro. Esta pequeña superficie $\Sigma$ recibirá sin interrupción radiación del recinto U y también se la mandará, siendo la energía radiante emitida por $\Sigma$ en un tiempo dado mayor ó menor que la absorbida, según que la temperatura del cuerpo M resulte mayor ó menor que T. Luego la temperatura de M tiende á igualarse á T, lo que significa que las fluctuaciones de temperatura y energía de M, determinadas por el principio de Boltzmann, proceden de las fluctuaciones irregulares de los fenómenos de la radiación, debiendo éstas ser tales que resulten de ellas las fluctuaciones conocidas de la temperatura del cuerpo M ; por lo tanto se puede calcularlas. Pero una propiedad general y notable de las fluctuaciones de la radiación, emitida y absorbida por la pequeña parte de superficie $\Sigma$, se puede definir prescindiendo del cálculo. En efecto han de ser iguales en término medio, y así resulta evidentemente en el caso particular en que la superficie $\Sigma$ se encuentra á una distancia muy pequeña de otra igual $\Sigma'$ que pertenece al recinto U. En tales condiciones, la radiación emitida por $\Sigma'$ experimenta las mismas fluctuaciones que la radiación emitida por $\Sigma$, y la radiación emitida por $\Sigma'$ es idéntica á la radiación absorbida por $\Sigma$. Si cambia la posición de $\Sigma$ con respecto al recinto, la fluctuación de la energía absorbida por $\Sigma$ no experimenta ninguna alteración, pues la radiación que emite es independiente de su posición con respecto al mismo recinto, y el efecto total de las fluctuaciones de emisión y absorción, ó sea la fluctuación de energía de M es independiente también de la posición relativa, lo que demuestra el principio antes enunciado.

Del mismo modo se podría probar que las fluctuaciones de la radiación que atraviesa á una superficie cualquiera, tomada en un campo de radiación, son iguales á las de la emisión de otra superficie igual que limita á un cuerpo negro.

Designemos ahora por S la energía radiante que la superficie $\Sigma$ emite ó absorbe, término medio, durante el tiempo $t$ á la temperatura T ; S será una función de la temperatura ligada con la densidad $U_\nu$ por la relación :

$$S = \frac{1}{4} V U_\nu \Sigma t d\nu, \qquad (2)$$

siendo V la velocidad de propagación de la luz en el vacío. Las energías emitidas y absorbidas durante el tiempo $t$ se diferirán del valor medio en cantidades $\varepsilon_e$ y $\varepsilon_a$ que podrán tomar valores positivos ó negativos con igual probabilidad. Supongamos el tiempo $t$ bastante

grande para que $\sigma_e$ y $\sigma_a$ sean pequeñas con respecto á S, y al propio tiempo bastante pequeño para que la diferencia $\tau$ de la temperatura del cuerpo M con la media no varíe durante el tiempo $t$, sino en una cantidad relativamente pequeña. Sea $\varepsilon$ la variación, á una época dada, de la energía del cuerpo M con respecto á su valor medio $\overline{\mathrm{E}}$. Durante el intervalo de tiempo $t$ siguiente, $\varepsilon$ va á variar primero por absorción de la cantidad de energía :

$$S + \sigma_a \qquad (4)$$

y también por emisión de :

$$-\left(S_T + \frac{\varepsilon}{c} + \sigma_e\right) \qquad (4)$$

siendo $\left(S_T + \frac{\varepsilon}{c}\right)$ la energía radiante emitida por $\Sigma$ á la temperatura $\left(T + \frac{\varepsilon}{c}\right)$, y $c$ el calor específico.

Por otra parte, tenemos, con una aproximación suficiente, para el valor de esta energía :

$$S_T + \frac{\varepsilon}{c} = S + \frac{\varepsilon}{c} + \frac{ds}{dT}. \qquad (5)$$

Resulta que la diferencia $\varepsilon$ de energía, después del tiempo $t$, se vuelve:

$$\varepsilon - \frac{\varepsilon}{c}\frac{ds}{dT} + \sigma_a - \sigma_e.$$

y como el valor cuadrático *medio* de $\varepsilon$ ha de ser constante, tendremos:

$$\overline{\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{c}\frac{ds}{dT} + \sigma_a - \sigma_e\right)^2} = \overline{\varepsilon^2}.$$

Si ahora tenemos en cuenta al hecho de que el producto medio :

$$\overline{\left(\frac{ds}{dT}\right)}\,\overline{\frac{\varepsilon}{c^2}}$$

es despreciable por ser proporcional á $t^2$ y también que se tiene :

$$\overline{\varepsilon\sigma_a} = \overline{\varepsilon} \cdot \overline{\sigma_a} = 0$$

$$\overline{\varepsilon\sigma_e} = 0$$

$$\overline{\sigma \sigma_{,}} = 0,$$

se tendrá, poniendo como ya se sabe:

$$\overline{\sigma_{,,}^2} = \overline{\sigma_{,}^2} = \overline{S^2}$$

$$\overline{S^2} = \frac{1}{c} \frac{ds}{dT} \overline{\varepsilon^2}, \qquad (6)$$

y substituyendo $\overline{\varepsilon^2}$ por su valor deducido del teorema de Boltzmann:

$$\overline{S^2} = KT^2 \frac{ds}{dT}, \qquad (7)$$

Resulta pues, como debíamos esperarlo, que las fluctuaciones de la radiación térmica son independientes de la capacidad calorífica del cuerpo M.

Si por último expresamos $s$ en función de $u$ mediante una relación ya conocida, y si sacamos $u$ de la fórmula de Plank, tendremos por diferenciación y eliminación de T:

$$\overline{\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2} = \frac{h\nu}{s} + \frac{c^2}{2\pi\nu^2 \sigma t d\nu}, \qquad (8)$$

ó sea una relación que da el cuadrado medio de la fluctuación relativa de energía, y vemos que su valor se compone de dos términos que es necesario interpretar físicamente.

72. **Interpretación de la fórmula.** — Se trata del cuadrado medio de la fluctuación relativa de energía que atraviesa $\Sigma$ en un sentido dado durante el tiempo $t$, cualquiera sea la posición de esta superficie, siendo indiferente que se encuentre en la vecindad inmediata de una pared negra ó en el espacio á una distancia grande de la misma.

Los dos términos de que se compone el cuadrado medio han de correspender otra vez á dos causas de fluctuación independientes la una de la otra.

Observemos por lo pronto que el segundo término se puede volver á encontrar exactamente con la teoría de las ondulaciones: la fluctuación de energía radiante que atraviesa la superficie $\Sigma$ durante el tiempo $t$ y corresponde á dicho término, procede del hecho de que entre los haces infinitamente numerosos componentes de la radiación que atraviesa la superficie, los que tienen direcciones, frecuencias y

estados de polarización vecinos dan lugar a interferencias, lo que significa que, según sus diferencias de fases en la región considerada, pueden reforzarse ó debilitarse mutuamente.

Como las fases de los distintos haces han de ser del todo independientes las unas de las otras cuando la pared se encuentra suficientemente lejana, se puede, mediante el cálculo de las probabilidades, encontrar exactamente el valor medio de aquella fluctuación. Einstein hizo el cálculo y obtuvo un resultado perfectamente concordante con el segundo término. Por otra parte, y sin pasar por este cálculo, podemos darnos cuenta de que tal fluctuación debida á las interferencias tiene que ser independiente de la intensidad de la radiación ó sea de S, debiendo ser tanto menor cuanto más pequeña es la longitud de onda ó sea mayor la frecuencia $\nu$, y también cuanto mayores son la superficie $\Sigma$, el tiempo $t$ y el intervalo de frecuencia $d\nu$ á los cuales corresponde la cantidad de energía.

En cuanto al primer término, no podemos explicarlo mediante consideraciones sacadas de la óptica ondulatoria, pues corresponde en la distribución de la energía radiante á una irregularidad tanto mayor cuanto menor es la cantidad de energía S. Ahora bien la hipótesis de que la energía radiante está formada por quanta localizados de magnitud $h\nu$ nos lleva á la fluctuación representada por este primer término; pero, según Einstein, este modo de encarar las cosas parece del todo inconciliable con los fenómenos de difracción é interferencias: « nos encontramos, dice, otra vez en frente de un enigma, como cuando se trataba de los movimientos térmicos en los sólidos ».

73. **Conclusiones acerca del electromagnetismo y de la mecánica clásica.** — Einstein pues opina que, del análisis anterior parece resultar la impotencia de nuestra electromagnética y de la mecánica clásica para dar cuenta satisfactoria de los hechos experimentales, y, por esto mismo, hay que someter á un examen crítico serio las bases de los raciocinios anteriores.

En esta forma llegamos á suponer que el teorema de Boltzmann ha de ser modificado y que la fórmula para la fluctuación media de la energía al cuadrado $\overline{\varepsilon^2}$ no se encuentra justificada. Sin embargo, con esta modificación no se hallaría vencida la dificultad, pues la teoría anterior de Einstein da, para los pequeños valores de $\nu$, fluctuaciones $\overline{s^2}$ en conformidad con la teoría de las ondulaciones, y el mismo acuerdo dejaría de existir si se quisiera modificar la fórmula de la cual se saca el valor de $\overline{\varepsilon^2}$. Por otra parte, se podría admitir que $\overline{\varepsilon^2}$ depende

del mecanismo mediante el cual se verifica el intercambio de calor entre el cuerpo M y el recinto.

Si así fuera, el concepto de Boltzmann, en cuanto á los fenómenos irreversibles, descansaría en un fundamento erróneo, pues la probabilidad de un estado del sistema dependería de elementos de los cuales, según los datos experimentales, no depende la entropía, en razón de la forma en que se verifican los intercambios térmicos entre el cuerpo M y el recinto isotermo.

Por último podríamos admitir también que el calor suministrado á M por la radiación no es del todo igual á la energía radiante que recibe el mismo, de modo que las fluctuaciones del calor tomado por él no serían iguales á las de la radiación que recibe la superficie $\Sigma$ con la longitud de onda que ésta puede absorber.

Esta hipótesis no entraña necesariamente un desacuerdo con el principio de la conservación de la energía, pues tenemos siempre el recurso de admitir una acumulación de la diferencia entre las dos energías incidente y absorbida. Sin embargo habría que forjarnos una imagen del mecanismo de esta acumulación, lo que, sin duda, resultaría tan difícil como la representación de una irregularidad muy notable en la repartición de la energía radiante.

Si rechazamos la hipótesis de la acumulación, hemos de resignarnos á no dejar incólume el principio de la conservación de la energía, al menos en su forma actual, atribuyéndole un valor de orden estadístico como ya se hizo con el segundo principio de la termodinámica, y Einstein pregunta si, entre los sabios, se podría encontrar á uno bastante atrevido para admitir una solución de alcance tan grave.

Con todo lo que antecede, vemos cuán interesante y rigurosa resulta la discusión notable que ha desarrollado en su memoria el ex profesor de la universidad de Praga. En efecto nos hace comprender con toda claridad y casi nos permite palpar las dificultades enormes que entraña el estudio de la radiación, después de introducida la hipótesis de Planck y especialmente la fórmula de la radiación, hasta cuando se la considera únicamente como un resultado experimental.

**71. Las discontinuidades parecen existir realmente en la naturaleza.** — En resumidas cuentas, cuando un cuerpo intercambia energía mediante un mecanismo casi periódico de frecuencia $\nu$, las propiedades estadísticas del fenómeno resultan iguales á las que se observarían si la energía se desplazara por *quanta enteros de magnitud* $h\nu$, y

aunque ignoremos el mecanismo que pueda explicar esta propiedad extraña, nos encontramos en la necesidad de admitir que la desaparición de la energía se verifica por quanta iguales á $h\nu$ y también que cierta energía ha de quedar disponible por quanta iguales para que los fenómenos periódicos de frecuencia $\nu$ se puedan verificar. De este modo la radiación de un dominio de frecuencia $\Delta\nu$ susceptible de producir una acción dada, por ejemplo una reacción *fotoeléctrica* para una densidad definida de la energía radiante, ha de dar lugar también á la misma acción para una densidad de radiación tan pequeña como se quiera.

Ahora bien todas estas consecuencias, parece que están confirmadas por las observaciones, y es esencial observar que se podría prever cosas muy diferentes mediante las hipótesis comunes. En efecto con éstas, creeríamos al contrario que una densidad mínima de la energía electromagnética es imprescindible, por ejemplo, para producir la rotura de una molécula por vía fotoquímica, la percusión electromagnética debida á una radiación de densidad pequeña habiendo de ser insuficiente para dar lugar á esta disociación.

Por otra parte, con las mismas hipótesis, no se ve claramente cómo las radiaciones de alta frecuencia pueden engendrar fenómenos elementales de energía mayor que la de los fenómenos debidos á radiaciones de frecuencia menor. En efecto la *acción específica* de la frecuencia no se comprende más fácilmente que la inexistencia de la acción debida á la intensidad. Además, sabemos que, en nuestros conceptos teóricos comunes, como ya lo observaron muchas veces, es imposible explicar cómo la luz y más especialmente los rayos X y los rayos $\gamma$ del radio provocan, hasta con las intensidades más pequeñas, la emisión de electrones con la energía enorme que nos enseña la experiencia. Por ejemplo, en el efecto fotoeléctrico, el orden de magnitud de la energía cinética de los electrones emitidos concuerda con el producto $h\nu$ propio de los rayos incidentes y se observa que, en la región donde no se verifican acciones de resonancia, esta energía crece con $\nu$ y más ó menos como $h\nu$.

Con estos hechos indiscutibles y especialmente si se considera las grandes fluctuaciones en la conductibilidad del aire atravesado por los rayos $\gamma$, es difícil no aceptar la conclusión de que, durante la absorción de la radiación, la energía es transportada por quanta de magnitud finita, el paso de energía de los rayos secundarios no pudiendo verificarse en una forma continua en el espacio y en el tiempo. Estas discontinuidades, que hacen la teoría de Planck de aceptación

tan difícil, parece, mediante estas consideraciones, que han de existir realmente en la naturaleza.

Sin embargo las dificultades que se ofrecen cuando uno quiere fundar una teoría satisfactoria de estos fenómenos fundamentales, quedan hasta ahora absolutamente invencibles. ¿ Por qué por ejemplo, un electrón toma, en un metal herido por los rayos X, la energía cinética tan grande observada para los rayos catódicos comunes ? Todo el metal se encuentra en el campo de los rayos, ¿ por qué entonces sólo una parte mínima de los electrones toman aquella velocidad de los corpúsculos catódicos ? y ¿ cómo explicar que la energía no se absorbe sino en puntos muy poco numerosos ? ¿ En qué estos puntos pueden diferir de los demás ?

Estas preguntas tan importantes quedan sin contestación satisfactoria, y lo mismo sucede con otras muchas.

Por otra parte, suponemos por lo general que las grandes velocidades, que poseen los electrones al abandonar los cuerpos heridos por la luz ultravioleta ó los rayos de Röntgen, son debidas á una sola acción elemental aunque no tengamos ninguna prueba ni demostración de esta explicación. Podríamos admitir que estos electrones adquieren progresivamente su enorme velocidad mediante un sinnúmero de choques con las moléculas expuestas á la radiación.

Pero, si así fuese, observaríamos una diminución de la velocidad de emisión cuando se pusiera menor el espesor de la lámina sometida á la radiación.

Por otra parte, en el mismo caso y también especialmente bajo la acción de los rayos X débiles, un tiempo susceptible de medición podría transcurrir entre la llegada de la radiación y la emisión de los primeros rayos secundarios. Si experiencias de esta clase dieran resultados positivos, sería una prúeba indiscutible de que las grandes velocidades de los electrones no se pueden atribuir a una repartición de la energía radiante por quanta distintos.

Por último, según Einstein, sería de gran trascendencia observar con toda la precisión posible si el fenómeno secundario que acompaña la absorción de la radiación resulta realmente independiente de la intensidad de la radiación primaria. En efecto, no hemos de olvidar que la temperatura de un rayo de intensidad débil y grande frecuencia varía poco con la intensidad. Luego, si la temperatura del haz determinara la distribución de la velocidad de los electrones en el efecto fotoeléctrico, tendría que manifestarse una pequeña variación, pero mensurable, de aquella distribución con la intensidad de la radiación.

75. **La hipótesis de Nernst.** — Veamos ahora la opinión de Einstein en cuanto á las teorías de Nernst y Sommerfeld.

Otras dos tentativas notables, dice el físico de Berlín, han sido hechas para encontrar una relación entre la constante $h$ de Planck y las propiedades mecánicas de los átomos y electrones.

Nernst el primero, mediante raciocinios poco rigurosos y sólo aproximados, debidos más bien á una intuición directriz por la cual se deja llevar á menudo el sabio de Berlín, trató de prever la variación con la temperatura de la energía de rotación de las moléculas. Después, Sommerfeld calculó la radiación electromagnética emitida en el acto de quedar detenidos los corpúsculos catódicos, basándose en la hipótesis, como ya lo sabemos, que resume la fórmula :

$$L\tau = h \tag{1}$$

en la cual L representa la energía cinética de una partícula, $\tau$ la duración del choque, y $h$ la constante de Planck.

Einstein examina la cuestión de saber cómo estos mismos resultados se pueden deducir de la fórmula de la radiación, sin la intervención de hipótesis particulares y sin buscar grandes aproximaciones.

Supone con Nernst, para simplificar, que todas las moléculas del gas diatómico considerado tienen una frecuencia de rotación determinada $\nu$, igual para todas las moléculas. Entonces la relación entre la energía de rotación E, la frecuencia y la temperatura no se va á diferenciar sensiblemente, como es probable, de la que existe en el caso de la oscilación lineal. Se tendrá pues aproximadamente :

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \tag{2}$$

Sea I el momento de inercia de la molécula con respecto á un eje que pasa por el centro de gravedad y perpendicular á la recta de unión de los dos átomos.

Según la mecánica común, hemos de tener :

$$E = \frac{1}{2} I(2\pi\nu)^2 \tag{3}$$

y las relaciones (2) y (3) dan la relación buscada entre E y T mediante la eliminación de la frecuencia $\nu$.

Nernst y Lindemann han señalado el interés que ha de presentar

el estudio de la absorción en el infrarrojo de los gases diatómicos que como HCl, poseen muy probablemente un momento eléctrico molecular.

Del coeficiente de absorción se podría, por aplicación de la ley de de Kirchhoff, deducir el poder emisivo para las distintas frecuencias y alcanzar la distribución de las velocidades de rotación entre las moléculas, ó sea la ley estadística de los movimientos de rotación.

Por otra parte habría que atribuir una parte de la absorción á las oscilaciones de los dos átomos en la molécula.

76. **La hipótesis de Sommerfeld.** — La teoría cinética de los gases monoatómicos es la única parte de la mecánica molecular que no alcanzan las dificultades ya señaladas, porque el mecanismo de los choques mutuos no desempeña en ella ningún papel. Sin embargo se puede sacar de la fórmula de la radiación indicaciones acerca de aquel mecanismo, mediante un procedimiento análogo al que permitió tratar el caso del resonador; pero, asimismo, hay que resignarnos desdichadamente á dejar, aquí también, la esperanza de edificar una teoría completa.

Imaginemos pues un campo de radiación negra en el cual se halla un gas monoatómico en equilibrio térmico. La posibilidad de un intercambio térmico entre el gas y la radiación la introduciremos, si suponemos que las moléculas gaseosas están electrizadas, pues así pueden absorber ó emitir radiación, especialmente en el acto de verificarse los choques mutuos ó con la pared.

Admitamos que los choques se verifiquen con intervalos suficientes para que cada uno se pueda considerar como un fenómeno aislado. La teoría de Maxwell nos dará con facilidad la radiación en el acto de un choque, si la velocidad del átomo que emite es conocida en función del tiempo.

Ahora bien, la ley de Kirchhoff nos da la relación :

$$U_\nu = \frac{8\pi}{c}\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} \qquad (1)$$

siendo $\varepsilon_\nu$ el poder emisivo y $\alpha_\nu$ el coeficiente de absorción de un ambiente dado. Para cierto valor de la frecuencia $\nu$, $U_\nu$ es prácticamente nula para una temperatura suficientemente pequeña y después crece rápidamente. Por otra parte, como $\alpha_\nu$ permanece finita, $\varepsilon_\nu$ goza de las propiedades de $U_\nu$.

Según las fórmulas de Planck y Wien, la condición para que $U\nu$ se diferencie de cero en una forma apreciable se expresa por la relación:

$$\frac{h\nu}{KT} < Z \qquad (2)$$

siendo Z un número de orden de magnitud de la unidad.

Por otra parte KT representa la energía de traslación media $\overline{E}$ de la molécula, menos un factor de proporcionalidad de poca importancia; luego se puede escribir la misma condición en la forma:

$$h\nu < Z\overline{E}. \qquad (3)$$

Las moléculas cargadas de un gas pues, si $\overline{E}$ es la energía media de traslación, han de experimentar choques de modo que no resulte ninguna frecuencia que no satisfaga á la desigualdad (3).

Si los choques fuesen bruscos, no se aplicarían las ecuaciones de Maxwell, pues supondrían otra vez la presencia de las frecuencias más altas en la radiación originada por el choque. Luego no se pueden verificar choques bruscos, teniendo los que se efectúan que producirse en una forma bastante lenta para que frecuencias mayores que $\nu$ no sean emitidas.

Ahora bien, se puede probar fácilmente que la duración $\tau$ del choque que satisfaga á dicha condición resulta del orden de magnitud de $\frac{1}{\nu_m}$, siendo $\nu_m$ el valor máximo de $\nu$, y se puede escribir también:

$$h = \overline{E}\tau Z. \qquad (4)$$

Tal es la hipótesis, de Sommerfeld que permite volver á encontrar al menos el orden de magnitud de la razón de la energía de los rayos X con la de los rayos catóditos que los engendran.

Basta pues admitir que la teoría de los electrones es cierta, en cuanto á la emisión de la radiación, para poder deducir la hipótesis de Sommerfeld de la ecuación de la misma radiación.

Si este concepto corresponde á los hechos, una partícula electrizada, un electrón, no irradia cuando se verifica un choque sino una parte mínima de su energía cinética, al menos si se trata de las velocidades que encontramos en los fenómenos fotoeléctricos sin resonancia ó bien en el caso de los rayos catódicos *no muy rápidos*.

Por otra parte si consideramos la emisión de electrones, bajo la acción de la radiación, como un fenómeno inverso del anterior, llega-

remos á admitir que la velocidad de aquellos electrones es velocidad adquirida progresivamente mediante un gran número de valores crecientes. En estas condiciones, podríamos prever, como ya observó Einstein, que, en el efecto fotoeléctrico común, por ejemplo, los electrones emitidos, por láminas delgadas han de poseer en condiciones iguales, una velocidad menor que no en el caso de láminas más espesas.

77. **Conclusiones de la teoría de Einstein.** — Estas son las ideas del profesor Einstein expuestas en forma de resumen en el informe notable leído por este sabio en la conferencia de Bruselas y del cual hemos sacado los desarrollos que anteceden.

Ahora podemos resumirlas como sigue.

Todos los sabios admiten que la teoría de los quanta, en su forma actual, constituyen un instrumento útil sin representar verdaderamente una teoría en el sentido propio de la palabra, ó sea que se pueda desarrollar en una forma del todo coherente.

Por otra parte, queda demostrado decididamente que la dinámica clásica, expresada mediante las ecuaciones de Lagrange y Hamilton, ya no se puede considerar como suficiente para la representación teórica de todos los fenómenos físicos.

Se plantea, pues, el problema de determinar cuáles son los principios generales de la física que han de servir de fundamentos para resolver cuestiones dando lugar á tan grandes dificultades. Ahora bien todos están de acuerdo para dejar incólume el principo de la conservación de la energía. Según Einstein, hemos de respetar también al principio de Boltzmann acerca de la definición de la entropía mediante el cálculo de las probabilidades. Sin embargo no debemos á este principio sino un foco de luz muy débil para aclarar los estados de equilibrio estadístico en los cuales intervienen fenómenos periódicos.

Según Einstein, la probabilidad W del estado de un sistema está definida por la frecuencia relativa de éste cuando se encuentra indefinidamente abandonado á su propia energía, y esta sería la verdadera definición física de la probabilidad. Así definida W, un sistema aislado ha de pasar en general por estados sucesivos de probabilidades constantemente crecientes de modo que resulte entre dicha probabilidad y la entropía S del sistema la relación de Boltzmann :

$$S = K \log W + \text{const.}$$

Planck, en la discusión que tuvo lugar después de la lectura del

informe, declaró que también está convencido que aquella relación es aplicable á todos los casos, por la sencilla razón que expresa el carácter de ley estadística del segundo principio de la termodinámica. Resulta que, según el físico prusiano, la entropía de un estado expresa directamente la misma probabilidad de éste. Pero, en contra de las ideas de Einstein, no cree que exista una definición del todo general de la probabilidad que, fuera de la dinámica clásica, permita calcular la probabilidad de un estado cualquiera tomando como base las fluctuaciones alrededor de dicho estado en el tiempo y en el espacio, sin considerar también *dominios elementales independientes de igual probabilidad*.

Tenemos así, perfectamente determinada, la diferencia fundamental entre las ideas de Einstein y las de Planck. Nos queda ahora la tarea de dar á conocer las de Nernst, y lo haremos en el capítulo siguiente.

## CAPÍTULO V

### LA TEORÍA DE NERNST Y SU APLICACIÓN Á VARIOS PROBLEMAS FÍSICO-QUÍMICOS

78. **La hipótesis de Nernst.** — La hipótesis fundamental de Nernst consiste primero en admitir que la capacidad calorífica :

$$\int_0^T c_v dT \qquad (1)$$

ha de corresponder a la *energía de oscilación de los átomos en torno de sus posiciones de equilibrio*. Esta energía comprende, además de la cinética, la energía potencial de las acciones que tienden á reponer los átomos en sus posiciones de equilibrio. Ahora bien, para simplificar, Nernst admite que si la substancia es isótropa se puede representar el movimiento de un átomo mediante la proyección de su trayectoria sobre tres planos rectangulares, y supone que así resultarían, término medio, *tres circunferencias de oscilación.*

Sea $\rho$ el radio de una de ellas recorrida con la velocidad $u$, siendo $m$ la masa del átomo. En virtud de la igualdad de la fuerza centrífuga y de la reacción elástica, se tiene :

$$\frac{mu^2}{\rho} = A\rho \qquad (2)$$

siendo A el coeficiente de proporcionalidad de esta reacción elástica con respecto á la distancia $\rho$ que separa el átomo de su posición de equilibrio. La energía potencial correspondiente está expresada por la igualdad :

$$\int_0^\rho A\rho d\rho = \frac{A\rho^2}{2} = \frac{mu^2}{2} \qquad (3)$$

lo que significa que las energías cinética y potencial son iguales. Si ahora suponemos que el cuerpo, á baja temperatura, está rodeado por un gas, lógicamente hemos de admitir que, en razón de los choques mutuos, el equilibrio de temperatura entre el cuerpo sólido y el gas corresponde a la igualdad de las energías cinéticas medias. Con esto el contenido de energía cinética del sólido será igual a $\frac{3}{2}$ RT por átomo gramo, y en razón de la igualdad ya comprobada de las energías potencial y cinética, la capacidad calorífica tendrá por valor 3RT, y por lo tanto el calor atómico será igual á :

$$3R = 5{,}955,$$

resultado de acuerdo con la ley de Dulong y Petit y los raciocinios de Boltzmann.

Ahora bien, resulta que, á las temperaturas muy bajas, para las cuales la teoría debería ser confirmada con la mayor precisión, por ser más correctas las deducciones cuando se trata de pequeñas oscilaciones, la experiencia nos revela para numerosas substancias una diminución muy rápida del calor específico molecular, y, según Nernst, todo indica que se trata de una propiedad general deducida de su conocido teorema.

Por lo tanto, el físico de Berlín trata de poner de acuerdo la teoría con la experiencia, mediante la nueva hipótesis siguiente. Consideremos, dice, una de las tres circunferencias de oscilación que sirven para representar el movimiento de un átomo alrededor de su posición de equilibrio. Supongamos que cuando la oscilación está provocada, por ejemplo en virtud del choque de una molécula gaseosa, la energía no se pueda absorber sino por múltiples enteros de un *quantum* proporcional á la frecuencia de las oscilaciones. Para una molécula gaseosa que se mueve libremente, tal frecuencia es nula ; por consiguiente, la energía cinética puede variar en una forma continua y la teoría cinética de los gases subsiste sin cambio. Pero los resultados son muy distintos, si se considera el caso de los cuer-

pos sólidos, ó sea cuando se calcula en la nueva hipótesis la *energía de átomos ligados con posiciones de equilibrio.*

Las moléculas del gas ambiente, en virtud de los choques, tienen que encontrarse en equilibrio estadístico con las oscilaciones de los átomos. Por otra parte, las energías cinéticas de estos átomos han de estar distribuídas, según la ley de repartición de Maxwell, alrededor del valor medio que corresponde á la temperatura del sistema. Si suponemos, prescindiendo de los quanta, que la energía cinética de las oscilaciones circulares obtenidas por proyección en un plano, está en equilibrio estadístico con la energía cinética del movimiento de las moléculas gaseosas también proyectado en el mismo plano, es preciso admitir que la misma ley de repartición rige en ambos casos. Esta hipótesis parece admisible á Nernst, siempre que se la enuncie diciendo que las energías cinéticas de las oscilaciones circulares de átomos de distintas naturalezas y su repartición alrededor de un valor medio son, á una temperatura dada, independientes de los radios. En un gas estas oscilaciones circulares tienen un radio infinito, pues se puede siempre considerar una trayectoria rectilínea como un arco de círculo de radio infinitamente grande.

Si designamos por $N_0$ el número de los átomos contenidos en el átomo gramo, tendremos para la energía media de la oscilación circular de un átomo aislado obtenida por proyección sobre un plano cualquiera:

$$E_0 = \frac{RT}{N_0} \tag{4}$$

y la ley de repartición de Maxwell dará la energía $E_n$ del $N^{mo}$ átomo, si suponemos los átomos ordenados en orden de energía decreciente á una época dada, ó sea:

$$E_n = E_0 \log \frac{N_0}{N_0 - N}, \tag{5}$$

expresión en la cual N tiene por valor:

$$N = N_0 \left(1 - e^{-\frac{E_n}{E_0}}\right). \tag{6}$$

Ahora bien, si como ya es sabido, se representa por una curva la repartición de la energía entre los distintos átomos, la superficie comprendida entre la curva, el eje de las abscisas y el de las ordenadas, tendría por valor para $N_0$ y $E_0$:

$$N_0 E_0 = RT,$$

y tal repartición no puede existir sino con la hipótesis de que la energía de un átomo puede variar en una forma continua.

Pero si se introduce la hipótesis de que una molécula gaseosa única, en el acto del choque con un átomo que oscila alrededor de su posición de equilibrio con la frecuencia $\nu$, no puede cederle ó tomarle energía sino por múltiplos enteros del *quantum* :

$$\varepsilon = h\nu = \frac{R}{N_0}\beta\nu. \tag{7}$$

la curva se encuentra substituída por la línea en forma de escalera que ya hemos señalado.

Todos los átomos que, según la ley de repartición de Maxwell, deberían tener una energía menor que $\varepsilon$, permanecen en estado de reposo. Después aparece una serie de átomos que todos tienen una energía igual al *quantum* $\varepsilon$ y cuyo número está determinado por la diferencia entre las abscisas de los dos puntos de la curva que tienen por ordenadas $2\varepsilon$ y $\varepsilon$. Si designamos por $N_1$, $N_2$, $N_3$... las abscisas que corresponden á las energías $\varepsilon$, $2\varepsilon$, $3\varepsilon$..., la superficie limitada por la línea en forma de escalera, ó sea el calor específico de un átomo gramo del sólido, tendrá por valor :

$$\varepsilon(N_2 - N_0) + 2\varepsilon(N_3 - N_2) + 3\varepsilon(N_4 - N_5) + \ldots$$

ó si se substituyen los valores de N por sus expresiones deducidas de la fórmula :

$$N = N_0\left(1 - e^{-\frac{E_n}{E_0}}\right).$$

$$\varepsilon N_0\left[\left(e^{-\frac{\varepsilon}{E_0}} - e^{-\frac{2\varepsilon}{E_0}}\right) + 2\left(e^{-\frac{2\varepsilon}{E_0}} - e^{-\frac{3\varepsilon}{E_0}}\right) + \ldots\right]$$

ó sea por último :

$$EN_0\left(e^{-\frac{\varepsilon}{E_0}} + e^{-\frac{2\varepsilon}{E_0}} + e^{-\frac{3\varepsilon}{E_0}} + \ldots\right) = \frac{\varepsilon N_0}{e^{\frac{\varepsilon}{E_0}} - 1}, \tag{8}$$

ó sea una expresión igual á la que ya obtuvimos antes mediante un procedimiento de cálculo análogo.

Si se elimina $E_0$ y se multiplica por 3 para tener la capacidad calorífica total del átomo gramo, resulta :

$$W = 3\frac{\varepsilon N_0}{e^{\frac{\varepsilon N_0}{RT}} - 1} = 3R\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1}. \tag{9}$$

Por último, si se diferencia con respecto á T, se vuelve á encontrar la fórmula de Einstein, ó sea para la expresión del calor atómico:

$$\frac{dW}{dT} = 3R\frac{e^{\frac{\beta\nu}{T}}\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1\right)^2} = c. \tag{10}$$

79. **Insuficiencia de la fórmula de Einstein para los calores atómicos.** — La expresión (10) del párrafo anterior contiene varios símbolos cuya significación hemos de recordar:

$$\beta = \frac{h}{K}$$

$$K = \frac{N}{R},$$

de donde:

$$\beta = \frac{Rh}{N} \tag{1}$$

siendo R la constante de los gases y N el número de las moléculas contenidas en la molécula gramo. Ya sabemos cómo la misma expresión explica la diminución del calor atómico de los sólidos á las bajas temperaturas hasta valores que parecen tender hacia cero cuando ellas se acercan al cero absoluto.

Por otra parte, las divergencias con la ley de Dulong y Petit se verifican tanto más rápidamente, según la misma fórmula, al bajar la temperatura, cuanto mayor es la frecuencia $\nu$ para las oscilaciones de los átomos considerados.

Nernst toma como punto de partida esta fórmula de Einstein y declara que, si se puede determinar la frecuencia $\nu$ mediante otros procedimientos, será posible prever las temperaturas á las cuales las divergencias con la ley de Dulong y Petit empiezan á verificarse en una forma sensible.

Después el físico de Berlín observa que ha podido medir los calores específicos verdaderos de muchas substancias hasta temperaturas

muy bajas, mediante experiencias realizadas durante varios años consecutivos. Por otra parte, Rubens y Hollnagel han medido las longitudes de absorción máxima para los cloruros de sodio y potasio y el bromuro de potasio, y encontraron para estas substancias dos fajas de absorción angostas. Ahora bien, es lógico admitir, según estos mismos resultados, que en los cristales sólidos existen iones cuyo movimiento térmico ha de suministrar fajas de emisión que correspondan á las de absorción observadas.

Si se comparan estos resultados con la fórmula de Einstein se nota primero, desde el punto de vista cualitativo, que la diminución de calor específico prevista á las bajas temperaturas por la teoría del mismo sabio se verifica realmente y especialmente en el caso del plomo, para el cual, sin embargo, Dewar en 1905 obtuvo un calor atómico sensiblemente constante hasta las temperaturas más bajas.

Pero confesaremos que esta concordancia ya no existe del punto de vista cuantitativo, pues para el cobre, por ejemplo, la experiencia da los resultados siguientes :

| C | T |
|---|---|
| 3.38 | 88 |
| 0.528 | 33.4 |
| 0.223 | 22.5 |

mientras al calor específico el cálculo asigna los valores 3, 31, 0,234, 0,023. Las divergencias, por otra parte, son del mismo orden en lo que se refiere al cloruro de sodio y demás sales.

80. **Explicación de las divergencias.** — Se podría buscarlas en la hipótesis de que los átomos del sólido no están ligados todos en la misma forma, no pudiéndose así hablar de una frecuencia definida, sino de una faja *muy diluída en cuanto á su extensión.*

Pero, si uno estudia la cuestión más detenidamente, se da cuenta con facilidad de que tal hipótesis queda insuficiente para aclarar los hechos, y esto por las razones siguientes deducidas por Nernst.

1° Cuando se construyen las curvas de variación de los calores atómicos para las substancias Pl, Ag, Zn, Cu, Al, Hg, I y el diamante, y también para los compuestos KCl, NaCl, KBr, se observa que forman un haz *concordante*, lo que significa que, si se eligiese convenientemente la escala para las temperaturas, se podría conseguir la superposición de todas las curvas.

Ahora bien, para explicar tal concordancia, habría que admitir,

en contra de toda probabilidad, que para todas estas substancias las fajas de absorción *se diluyen* en igual forma. Además, las curvas nos enseñan que, para los metales por una parte, y para los halógenos por la otra, la *extensión ó dilución* se verificaría al contrario en formas muy distintas. Observa Nernst que, apenas para las substancias amorfas, se podría prever oscilaciones atómicas de frecuencia variable de un átomo á otro. Esto corresponde muy bien al hecho de que el calor atómico medio del cuarzo amorfo disminuye mucho más despacio con la temperatura que no el del cuarzo cristalizado. Por otra parte, la gran conductibilidad calorífica observada por Eucken á las bajas temperaturas en las substancias cristalizadas, con comparación á la de las substancias amorfas, prueba que, en el primer caso, se trata de una frecuencia perfectamente definida, ó sea de una resonancia buena que facilita el paso de la energía de un átomo á los vecinos, mientras que en el segundo caso, se trata de una *faja diluída.*

2° Según los trabajos de Rubens y Hollnagel que nos suministraron las curvas de variación de la absorción en función de la longitud de onda, se puede observar en estas curvas máximos de absorción claramente señalados. Ahora bien, para el cloruro de potasio, se nota una separación evidente de dos máximos cuyas longitudes de onda difieren sólo en 10 por ciento, lo que muestra con toda evidencia que no se puede tratar de una faja única diluída ó de un amortiguamiento grande.

Por otra parte, no hemos de olvidar que lógicamente no se puede introducir la hipótesis de un amortiguamiento que correspondería á una disipación continua de la energía de las oscilaciones. En efecto, á las bajas temperaturas, los átomos están en reposo absoluto ú oscilan con un sólo *quantum* de energía, mientras un número muy pequeño de átomos poseen varios *quanta,* y, por esto mismo, no podemos admitir una variación continua de amplitud.

Cierta variabilidad de la frecuencia no se podría explicar sino con la hipótesis de que, por ejemplo en KCl, los átomos del potasio estén ligados con su posición de equilibrio mediante tensiones internas, trazas de impurezas ó cualquier causa análoga, pero la variabilidad que resultaría no bastaría para explicar las divergencias notables entre la teoría y los datos experimentales.

81. **Fundamento y verificación de una fórmula nueva de Nernst.** — En resumen, vemos que la teoría de los *quanta*, en su forma primitiva, queda impotente para representar la modalidad peculiar de los calo-

res específicos de los sólidos, resultando también ineficaz la fórmula de Einstein. Una modificación se imponía, y, por esto mismo, Nernst y Lindemann trataron de hacerla, tomando por único fundamento consideraciones de orden meramente empírico. En esta forma encontraron la expresión del calor atómico $C_v$ ya señalado en mi estudio anterior de la teoría de Einstein :

$$C_v = \frac{3}{2} R \left[ \frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1\right)^2} + \frac{\left(\frac{\beta\nu}{2T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{2T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{2T}} - 1\right)^2} \right]. \qquad (1)$$

Esta fórmula empírica satisface á todas las condiciones, pues no sólo representa en una forma satisfactoria la variación de los calores específicos, sino que también las frecuencias, que las mediciones térmicas nos obligan á introducir, coinciden con las suministradas por las mediciones ópticas para los casos en los cuales se ha podido verificarlas.

Por otra parte, observaremos que la misma fórmula ofrece, como la de Einstein, la ventaja de no requerir sino la introducción de una sola constante $\nu$, lo que resulta de gran trascendencia del punto de vista de su verificación y utilidad práctica. Además da el valor del calor atómico á volumen constante, lo que significa que, para toda verificación precisa, es menester deducir el calor atómico bajo presión constante, y esta deducción siempre es posible por aplicación del segundo principio de la termodinámica. Si por otra parte se introduce una relación debida á Grüneisen según la cual el coeficiente de dilatación es proporcional al calor atómico, se tiene la igualdad :

$$C_p = C_v + C_p^2 TA, \qquad (2)$$

siendo A una constante característica de cada substancia, cuyo valor se puede deducir de las mediciones de compresibilidad y dilatación efectuadas á una misma temperatura.

En efecto, en virtud del principio de Carnot, se tiene :

$$C_p = C_v \left(1 + T \frac{\alpha^2 V}{K C_v}\right) \qquad (3)$$

y, siendo el coeficiente $\alpha$ de dilatación proporcional á $C_p$, el volumen V y el coeficiente de compresibilidad K variando poco con la tempe-

ratura pero de un modo muy sensible en función lineal de ésta, se puede escribir con toda precisión, pues se trata de un término de corrección :

$$C_p = C_v + C_p^2 TA \qquad (4)$$

siendo la constante A, para un sinnúmero de substancias, inversamente proporcional á la temperatura de fusión.

En razón de la forma muy satisfactoria en la cual la fórmula de Nernst se verifica para el aluminio, el cobre, la plata, el plomo, el mercurio, el cinc, el yodo, el diamante, parece difícil admitir que se trate de una fórmula meramente empírica y de resultados felices por efecto únicamente del azar.

En el informe leído por Nernst en la Conferencia de Bruselas, encontramos varios cuadros de experiencias cuyos cuatro primeros se refieren á la plata, al cloruro de potasio, al cloruro de sodio y al bromuro de potasio. De ellos resulta con toda evidencia la concordancia perfecta entre las mediciones de $C_v$ y $C_p$ debidas á la experiencia y los valores calculados mediante la fórmula.

Aparecen también en el mismo informe cuadros de experiencia en cuanto al cloruro de mercurio, aluminio, cobre, plomo, yodo, grafito, azufre, yoduro de plata, cloruro de plata, cloruro de plomo, cuarzo cristalizado, cuarzo en estado vítreo, bencina cristalizada y diamante. Todos estos cuadros contienen resultados del todo satisfactorios.

El caso del diamante es interesante, no sólo por el acuerdo notable entre los resultados dados por la fórmula y los experimentales, dentro de un intervalo muy grande de temperatura, sino porque se observa que, mucho antes de alcanzar el cero absoluto, el calor específico y, por consiguiente, la energía térmica contenida, se vuelven completamente despreciables, lo que significa que, para el diamante, la noción de temperatura desaparece prácticamente debajo de los cuarenta grados de la escala absoluta.

Por último Nernst deduce de la comparación de los cuadros una conclusión muy notable : no aparece en ninguna parte *diferencia característica* entre las capacidades caloríficas de las substancias metálicas y no metálicas, y un examen de los antiguos datos experimentales bastaba ya para evitar todo error con respecto á esta cuestión. Ahora bien, tal resultado no es sino el fracaso de la teoría electrónica de los metales en la forma que se dió á su desarrollo actual, al menos en lo que se refiere á los puntos acerca de los cuales resulta en contradicción con los mismos resultados experimentales. En resu-

men, nos encontramos ante el dilema de abandonar la idea de que los electrones libres han de tratarse como moléculas gaseosas, ó de considerar el número de ellos como muy pequeño con respecto al de las moléculas del metal.

82. **Significación de la fórmula de Nernst.** — Si se quisiera tomar por base las teorías de Planck y Einstein para llegar á la fórmula empírica de Nernst, sería menester admitir que la mitad de los átomos están sometidos á uniones cuya rigidez es dos veces mayor que la de las uniones que ligan á los demás, lo que significaría que vibran dos veces más lentamente. Ahora bien, tal hipótesis sería muy poco admisible, y su aspecto inverosímil aumenta aun si nos damos cuenta que, con ella, sería preciso admitir, por ejemplo en el caso del cloruro de potasio, que la mitad de los átomos de cloro y potasio, ó sea los de frecuencia dos veces más pequeña, no tienen ninguna carga eléctrica, pues la experiencia no nos revela ningún fenómeno óptico que corresponda á aquellos períodos dobles. Pero Nernst opina que se puede encontrar fácilmente otra explicación.

En efecto, si integramos entre O y T después de haber multiplicado por $d$T la expresión:

$$C_v = \frac{3}{2}R\left[\frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right)^2} + \frac{\left(\frac{\beta\nu}{2T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{2T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{2T}}-1\right)^2}\right] \qquad (1)$$

se consigue para la primera integral la forma siguiente:

$$\int_0^T \frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right)^2} dT.$$

Pero se tiene:

$$\frac{d}{dT}\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}\right) = -\frac{\beta\nu}{T^2} e^{\frac{\beta\nu}{T}},$$

de donde, designando $e^{\frac{\beta\nu}{T}}$ por $z$:

$$\int_0^T \frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right)^2} dT = -\frac{\beta\nu}{T}\int_0^T \frac{d\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}\right)}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right)^2} = -\beta\nu\int\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{\beta\nu}{z-1}$$

y substituyendo otra vez $z$ por su valor:

$$\int \frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1\right)^2} dT = \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}. \tag{2}$$

Análogamente, se tiene para la segunda integral:

$$\int \frac{\left(\frac{\beta\nu}{2T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{2T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{2T}}-1\right)^2} dT = \frac{\frac{\beta\nu}{2}}{e^{\frac{\beta\nu}{2T}}-1}, \tag{3}$$

de lo que resulta por último, si se designa por W la capacidad calorífica $C_v T$:

$$C_v T = W = \frac{3}{2} R \left( \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1} + \frac{\frac{\beta\nu}{2}}{e^{\frac{\beta\nu}{2T}}-1} \right). \tag{4}$$

y vemos que esta capacidad calorífica aparece como la suma de dos términos que se ponen iguales á las temperaturas altas. Ahora bien, la teoría antigua suponía que la energía térmica de los sólidos era por la mitad cinética y por la otra potencial. En estas condiciones, podemos decir que se presenta una hipótesis sugerida sin grandes esfuerzos. Basta admitir que, á las bajas temperaturas, las dos formas de energía ya no coexisten en cantidades iguales y corresponden entonces a los dos términos de la expresión (4). Á las temperaturas altas al contrario los dos términos se ponen iguales, de acuerdo con el hecho de que entonces la teoría de los *quanta* ya no se diferencia de las teorías antiguas.

De esta hipótesis resulta la otra ventaja de que la nueva fórmula (1) no entraña como consecuencia la introducción de ningún cambio en la ley de la radiación de Planck, puesto que la radiación no puede ser emitida sino por partículas electrizadas en movimiento, quedando sin efecto en cuanto á ella la parte potencial de la energía.

83. **La ley de repartición de Maxwell.** — Sin embargo hemos de confesar que subsisten muchas dificultades cuando queremos formular con toda precisión la hipótesis anterior, ó limitarnos á hacerla verosímil. En efecto, es menester suponer que la ley de repartición de

Maxwell se aplica á las energías potencial y cinética en una forma independiente. En estas condiciones, para volver á encontrar las relaciones (1) y (4) del párrafo anterior, hemos de recurrir otra vez, para cada una de las dos formas de energía, á las consideraciones que llevan á la hipótesis de los *quanta*, y, de este modo, hallamos para la energía potencial:

$$W_1 = \frac{3}{2} R \frac{\frac{\beta \nu}{2}}{e^{\frac{\beta \nu}{2T}} - 1} \tag{1}$$

y para la energía cinética:

$$W_2 = \frac{3}{2} R \frac{\beta \nu}{e^{\frac{\beta \nu}{T}} - 1} \tag{2}$$

lo que permite, mediante una adición, volver á encontrar la expresión (4) y por diferenciación la (1) del párrafo 82.

Con esto sería menester admitir que, á las temperaturas muy bajas, los átomos de un cuerpo sólido no poseen ningún movimiento oscilatorio, sino que experimentan sólo una desviación desde su posición de equilibrio, y la energía necesitada por estas desviaciones se intercambiaría por *semiquanta*.

Por otra parte si se introducen las oscilaciones circulares, la hipótesis aparece muy admisible, por intervenir separadamente en ellas las energías cinética y potencial. De este modo, recién á las temperaturas altas, la energía cinética empezaría á intercambiar en una forma sensible y por *quanta* enteros. Á temperaturas aún más elevadas, á las cuales cada átomo tendría por lo general varios *quanta* de energía cinética y potencial, el estado del sistema correspondería á los resultados de la mecánica estadística común, las dos energías poniéndose iguales, y la ley de Dulong y Petit así recibiría una satisfacción completa.

Pero desgraciadamente, con esta hipótesis, aparece una dificultad muy grande, cuando tratamos de representar el mecanismo de la conductibilidad térmica en los cuerpos sólidos. En efecto, si admitimos, como ya lo hicimos, que el transporte de energía de un átomo á otro se verifica por radiación, la conductibilidad térmica, á las temperaturas muy bajas, ha de volverse muy pequeña en virtud de la disminución enorme de la intensidad de la radiación. Pero la experiencia nos revela resultados del todo diferentes, como lo demostró

Eucken que, para el diamante por ejemplo, á las temperaturas que hacen despreciable el calor específico, observó una conductibilidad térmica comparable *con la del cobre.* En estas condiciones, ¿ cómo explicarnos que un transporte de energía de un átomo a otro se puede efectuar con tanta facilidad, á temperaturas que hacen imposibles los choques, en razón de la amplitud muy pequeña de las oscilaciones en torno de la posición de equilibrio ? y la dificultad se vuelve mayor si suponemos que á las temperaturas bajas, los átomos ya casi no oscicilan y conservan sólo energía potencial.

Con esto hemos de confesar que, mientras no tengamos una teoría completa de la conductibilidad térmica aplicable al caso, no será posible imaginarnos la forma en la cual se verifica la ley de repartición de Maxwell, hasta sin tener en cuenta la modificación que requiere la teoría de los quanta.

Según Nernst, el punto esencial sería conseguir una representación exacta y precisa de las acciones mutuas entre los átomos de un cuerpo sólido, que serviría para las uniones entre los átomos de una molécula gaseosa, como entre los átomos de una molécula líquida, y el sabio berlinés opina que, mientras subsista nuestra ignorancia al respecto, toda discusión quedará forzosamente estéril.

En resumen, Nernst se resigna á considerar las fórmulas (1) y (4), confirmadas muy satisfactoriamente por la experiencia, como de carácter meramente empírico. Observa por otra parte que, en la realidad, sucede igual cosa con la misma teoría de los quanta en su forma primitiva, no resultando más claro decir, con Planck y Einstein, que la energía se intercambia por *quanta* cuando las energías cinética y potencial se encuentran constantemente en cantidades iguales, que afirmar la absorción de la energía en una forma tal que los átomos se aparten primero sencillamente de sus posiciones de equilibrio y después recorran circunferencias en torno de estas posiciones con *quanta* que, en este segundo caso, resulten dobles de su valor en el primero.

84. **Concepto de Nernst.** — Llegamos así á poder expresar al concepto personal de Nernst. Si suponemos que los átomos ligados con una posición de equilibrio, en los sólidos o en los gases, intercambian energía cinética por *quanta* de valor :

$$\varepsilon = h\nu, \qquad (1)$$

y energía potencial, ó sea trabajo efectuado en contra de las fuerzas

que actúan para reponer el átomo en su posición de equilibrio, por *quanta* cuyo valor es $\frac{\varepsilon}{2}$, y si aplicamos los principios de la mecánica estadística teniendo en cuenta la hipótesis de los quanta, obtenemos para la capacidad calorífica del átomo gramo.

$$C_v T = W = \frac{2}{3} R \left( \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} + \frac{\frac{\beta\nu}{2}}{e^{\frac{\beta\nu}{2T}} - 1} \right). \qquad (2)$$

Observamos que esta fórmula, en contra de todas las anteriores, ofrece juntamente :

1° La posibilidad de una deducción sencilla de la expresión de la radiación de Planck ;

2° Una concordancia notable con la variación deducida experimentalmente del calor atómico de los cuerpos simples y compuestos ;

3° La posibilidad de calcular *a priori* los calores específicos de los sólidos y gases, cuando, mediante las mediciones ópticas, se conocen las frecuencias de oscilación, si se admite como es natural que las partículas oscilantes están todas electrizadas ;

4° La concordancia con la variación observada experimentalmente de la dilatación térmica de los cuerpos sólidos.

Ahora viene el concepto de Nernst con el objeto de conseguir una representación de la expresión (2).

Los átomos, ligados en los cuerpos sólidos con una posición de equilibrio dada, no pueden, según el físico prusiano, alejarse de dicha posición sino mediante la utilización de un número entero de *quanta* de energía definida. Ejercen mutuamente acciones tales que, si á las temperaturas muy bajas se apartan de sus posiciones de equilibrio una porción de átomos, comunicando al sólido un número grande de *quanta*, se establece espontáneamente y con rapidez un equilibrio fijado por la ley de Maxwell, en el cual los desplazamientos se reparten entre los distintos átomos según la ley de probabilidad.

Después se añade la energía cinética del movimiento térmico, sensible únicamente á temperaturas muy altas, y absorbida por los átomos por fracciones ó *quanta* dobles de los anteriores. Esta energía cinética da lugar á la emisión y absorción de radiaciones que, en virtud de las leyes comunes de la electrodinámica, no se pueden verificar sino cuando se trata de átomos electrizados. Ahora bien se puede

lógicamente admitir que, en tales condiciones, las energías potencial y cinética se encuentran en equilibrio mutuo. También posiblemente se aplican leyes análogas á los electrones que se hallan en los átomos. Según el mismo Nernst, este concepto no puede ser considerado sino como provisorio, y sin embargo es el único que hasta ahora nos pueda llevar á las leyes fundadas en la experiencia.

Los átomos, ligados mutuamente en las moléculas de un gas, han de actuar evidentemente en la misma forma como los ligados á una posición de equilibrio en un cuerpo sólido. Sin embargo es preciso agregar, en el cálculo de la capacidad calorífica de los gases, las energías cinéticas de traslación y rotación, y la teoría de los *quanta* se puede aplicar también á estas energías. En efecto, es muy notable el hecho de que el hidrógeno, cuyas moléculas tienen la mayor velocidad de rotación, ya goce á la temperatura normal de un calor específico sensiblemente menor de lo previsto por la teoría de Boltzmann. Por otra parte Nernst añade á esta observación un cuadro que comprende los calores específicos moleculares de varios gases, conforme á las mediciones efectuadas por él y sus discípulos, y estos resultados vienen á confirmar las consideraciones ya desarrolladas.

85. **Previsión teórica de las frecuencias de los cuerpos sólidos.** — Todos los procedimientos que permiten preveer las frecuencias de los cuerpos sólidos suministran, como es natural, relaciones entre los datos experimentales utilizados para esta previsión y las propiedades ópticas por una parte, como también las propiedades caloríficas por la otra.

Resulta que, de la medición óptica de las frecuencias y del conocimiento del peso atómico, se puede deducir, no sólo la capacidad calorífica, sino también otras propiedades térmicas ó elásticas.

En el informe leído por Nernst á la Conferencia de Bruselas, no insiste sobre la relación entre la frecuencia propia y la compresibilidad de la cual Madelung, Sutherland y Einstein se ocuparon.

Se contenta con observar que una fórmula debida á Lindemann se encuentra especialmente confirmada. Esta fórmula está fundada sobre la hipótesis de que el punto de fusión está alcanzado cuando la amplitud de las oscilaciones atómicas se pone igual á la distancia entre los átomos.

Sea $r_0$ el radio de la circunferencia de oscilación á la temperatura de fusión $T_0$, se tendrá para la expresión de la velocidad del átomo:

$$u = 2\pi r_0 \nu, \qquad (1)$$

de donde para la energía media cinética del mismo átomo:

$$mu^2 = 4\pi^2 r_0^2 \nu^2 m. \tag{2}$$

Pero ya sabemos que esta energía tiene por expresión:

$$mu^2 = \frac{3R}{N_0} \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T_0}} - 1}. \tag{3}$$

Si admitimos ahora que, á la temperatura de fusión, la ley de Dulong y Petit se encuentra verificada con bastante exactitud para que $\frac{\beta\nu}{T_0}$ se pueda considerar como pequeño con respecto á la unidad, la fórmula anterior se reduce á:

$$mu^2 = \frac{3R}{N_0} T_0 \tag{4}$$

y se tiene por lo tanto:

$$4\pi^2 m r_0^2 \nu^2 = \frac{3R}{N_0} T_0, \tag{5}$$

lo que significa que $\nu$ ha de variar proporcionalmente á:

$$\sqrt{\frac{T_0}{m r_0^2}}.$$

Por último, si se admite que el volumen atómico V de los cuerpos sólidos es proporcional al cubo de la distancia media $r_0$ de los átomos, $\nu$ se vuelve también proporcional á:

$$\sqrt{\frac{T_0}{m V^{\frac{2}{3}}}}.$$

Nernst nos comunica un cuadro de las frecuencias calculadas mediante la fórmula de Lindemann:

$$\nu = 2.8 . 10^{12} \sqrt{\frac{T_0}{m V^{\frac{2}{3}}}} \tag{6}$$

comparadas con las deducidas de su fórmula empírica fundamental:

$$C_v = \frac{3}{2} R \left[ \frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1\right)^2} + \frac{\left(\frac{\beta\nu}{2T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{2T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{2T}} - 1\right)^2} \right] \qquad (7)$$

y pone en evidencia que existe entre los valores una concordancia muy satisfactoria, variando $\nu$ por otra parte, para las substancias consideradas, desde $1{,}8 \,.\, 10^{12}$ hasta $32{,}5 \,.\, 10^{12}$.

Después observa que de esta comparación se puede, sin la intervención de ninguna medición óptica, deducir una verificación de la hipótesis de los *quanta* fundada únicamente en mediciones de calores específicos, pesos atómicos, volúmenes atómicos y temperaturas de fusión.

Sin embargo no se puede negar que los métodos ópticos de determinación de las frecuencias son mucho más precisos que los demás. Por esto mismo, hemos de desear que se pueda perfeccionarlos y aplicarlos al mayor número de casos, aunque su aplicación quede imposible cuando se trata de átomos no electrizados, como sucede por ejemplo con el diamante.

86. **Ley general relativa á las propiedades de los cuerpos sólidos á bajas temperaturas.** — De las mediciones de los calores específicos de que nos ocupamos más arriba, resulta con toda certeza que, conforme con los efectos previstos por la teoría de los quanta, existe para todo cuerpo sólido, á temperaturas vecinas del cero absoluto, un dominio de temperatura en el cual la noción misma de ésta desaparece del punto de vista práctico. En dicho dominio, *todas las propiedades*, por ejemplo el volumen, se ponen independientes de las variaciones de temperatura. De este modo se tiene :

$$\lim \frac{dV}{dT} = 0$$

para

$$T = 0.$$

y además, según la teoría de los *quanta*, en general :

$$\lim \frac{d^n V}{dT^n} = 0$$

también para $T = 0$, cualquiera sea el orden de la derivada ; sin em-

bargo, prácticamente, esta última condición no se puede considerar como cumplida sino en una forma imperfecta.

Pero Nernst emite la opinión de que se puede ir más allá aun, y que estamos autorizados á aplicar á los cuerpos sólidos consideraciones muy parecidas á las que fueron verificadas en una forma tan general para las soluciones diluídas.

Sabemos en efecto que las variaciones de todas las propiedades de una solución diluída mediante la adición de una pequeña cantidad de substancia disuelta, se puede considerar como proporcionales á los cambios de concentración. Ahora bien, existe un dominio de temperatura en el cual los átomos de un cuerpo sólido están casi todos en reposo absoluto. Entonces sólo pocos átomos tienen un *quantum* de energía y el número de los que poseen varios es del todo despreciable.

Luego se puede considerar, al menos bajo ciertos conceptos, un cuerpo sólido en tales condiciones como una solución muy diluída de átomos provistos de un *quantum* en un número mucho mayor de átomos en reposo, y la concentración de dicha solución ha de ser proporcional al contenido de energía. Por otra parte, de este punto de vista, es indiferente que los *quanta* de energía pasen de un átomo á otro. Por último, el dominio aludido de temperatura ya está conseguido con una aproximación muy suficiente cuando el cuerpo está enfriado á la temperatura $\frac{\beta\nu}{6}$, ó sea en condiciones que es fácil generalizar experimentalmente.

Veamos ahora las consecuencias notables que Nernst saca del raciocinio anterior.

87. **Dilatación térmica.** — De las premisas enunciadas, se puede deducir en seguida para las temperaturas bajas la expresión :

$$V = V_0 + \alpha E, \qquad (1)$$

y entonces el coeficiente de dilatación se obtiene diferenciando, lo que da :

$$\frac{dV}{dT} = \alpha \frac{dE}{dT} = \alpha C_v \qquad (2)$$

relación que expresa la proporcionalidad de $\alpha$ al calor específico á volumen constante para las temperaturas bajas.

Ahora bien, Grüneisen demostró que, á temperaturas más altas, la proporcionalidad se verifica aun en la forma :

$$\frac{dV}{dT} = \chi C_p \tag{3}$$

lo que constituye como una prolongación de la relación (2), pues, á las bajas temperaturas, sabemos que $C_v$ y $C_p$ se vuelven prácticamente iguales.

Por otra parte, para la entropía, se tiene en la forma de Planck la expresión debida á Nernst:

$$S = \int_0^T \frac{1}{T} C_p dT, \tag{4}$$

y para $C_v$:

$$C_v = F\left(\frac{V}{T}\right). \tag{5}$$

pudiendo esta última expresión generalizarse á $C_p$ con una aproximación muy grande, lo que permite escribir:

$$C_p = F\left(\frac{V}{T}\right). \tag{6}$$

De allí se deduce:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dC_p}{dT} &= -F'\left(\frac{V}{T}\right)\frac{V}{T^2} \\ \frac{dC_p}{dp} &= F'\left(\frac{V}{T}\right)\frac{1}{T}\frac{d\nu}{dp}, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

y por consiguiente:

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{dS}{dp} = -\int_0^T \frac{1}{T}\frac{dC_p}{dp} dT. \tag{8}$$

Pero de (7) se saca:

$$F'\left(\frac{V}{T}\right) = -\frac{T^2}{V}\frac{dC_p}{dT},$$

$$\frac{dC_p}{dp} = -\frac{T^2}{\nu}\frac{dC_p}{dT}\frac{1}{T}\frac{d\nu}{dp}$$

lo que da, después de substituír en (8):

$$\frac{dV}{dT} = \int_0^T \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dp} \frac{dC_p}{dT} dT, \tag{9}$$

y si se supone $\nu$ y su derivada $\frac{d\nu}{dp}$ independientes de la temperatura:

$$\frac{dV}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dp} C_p = \alpha C_p \tag{10}$$

lo que demuestra el teorema de Grüneisen.

Añadiremos que este resultado, que supone por otra parte la *igualdad de todas las frecuencias en el sólido,* ha sido verificado experimentalmente en una forma muy notable. Lindemann, por ejemplo, demostró que, si baja la temperatura hasta la del hidrógeno líquido, no sólo aparece muy pequeña dilatación, sino que se pone proporcional al calor atómico. Nernst deduce de esta observación que, para representar la dilatación, no ha de intervenir la fórmula primitiva de Einstein, sino la modificación de ésta debida á él y Lindemann, y aunque, como acabamos de verlo, el resultado se puede prever mediante la termodinámica, no se puede negarle el carácter de una verificación experimental de gran trascendencia.

Por último, el mismo Grüneisen verificó á su vez que la compresibilidad tiene que volverse constante á las temperaturas muy bajas.

88. **Conductibilidades térmica y eléctrica. Efecto Peltier.** — Consideremos ahora una serie de propiedades para las cuales no se encuentra una representación tan concreta como en los casos anteriores, aunque se llegue, con algunas restricciones, á conclusiones muy verosímiles.

Ya sabemos, en cuanto á la conductibilidad térmica, que todavía nos hace falta una teoría muy precisa y completa. Hasta se podría decir que, en contra de lo que se podía esperar, las investigaciones de Eucken nos han revelado que la conductibilidad térmica de las substancias *aisladoras* toma grandes valores á las temperaturas bajas. Pero, para el diamante, conforme á las previsiones, se encuentra un dominio en el cual la conductibilidad térmica permanece constante.

En cuanto á la conductibilidad eléctrica, Kamerlingh Ohnes, profesor en la universidad de Leyden, encontró á las temperaturas muy bajas un dominio en el cual la resistencia del platino toma un valor

constante, y este resultado, en pugna del todo con la teoría electrónica, está de acuerdo con la de los *quanta*.

En este orden de ideas, el sabio holandés mostró que la temperatura, á la cual la curva de resistencia toma una dirección paralela al eje de las temperaturas, es tanto más *alta* cuanto mayor es la frecuencia del metal. Nernst á su vez observó, para el aluminio cuya frecuencia propia es mucho mayor que la del platino, que la resistencia ya queda constante á la temperatura de ebullición del hidrógeno. El plomo al contrario, cuya frecuencia es muy pequeña, goza aun de una resistencia rápidamente variable á la temperatura del hidrógeno líquido.

De este modo se puede deducir la frecuencia de las oscilaciones atómicas de un metal del examen de las variaciones de su resistencia á las bajas temperaturas.

Ya se ve que hay una relación evidente con la teoría de los quanta, pero que no se revela sino en una forma exclusivamente empírica. Lindemann pudo interpretar esta correlación hasta cierto punto, admitiendo que la resistencia de un metal queda definida por el número de los átomos en oscilación circular.

En resumen, el coeficiente de temperatura de la resistencia eléctrica de los metales se caracteriza por una variación análoga, aunque con unas diferencias, á la del calor específico. En el dominio de temperatura para el cual el calor atómico es constante é igual á 6, la resistencia varía sensiblemente como la temperatura absoluta.

En lo que se refiere al efecto Peltier, hemos de esperar también que la diferencia de potenciales entre dos metales deja de variar con la temperatura cuando ésta se acerca al cero absoluto. Resulta que el efecto Peltier, como la fuerza electromotriz de las coplas termo-eléctricas, tiene que acabar por anularse. Hasta ahora confesaremos que no tenemos datos muy ciertos para la verificación del fenómeno; sin embargo, se ha podido observar una tendencia indiscutible que posee la fuerza termoeléctrica para anularse á las temperaturas muy bajas.

89. **Tensión de los vapores.** — El problema de la tensión de los vapores de los sólidos es uno de los más trascendentales y difíciles del punto de vista teórico. En efecto, si tuviésemos una teoría molecular de la tensión, podríamos interpretar los fenómenos químicos.

Por otra parte, no ignoramos el teorema termodinámico, muy discutido hoy, en cuanto á la entropía, que nos dió á conocer Nernst en 1905; se anuncia en la forma siguiente: *la entropía de una materia*

*condensada, sólida ó líquida y químicamente homogénea, es nula al cero de la temperatura absoluta* (*).

Si no tenemos en cuenta las críticas muy serias de que el pretendido teorema al cual los sabios del imperio alemán quisieron dar primero el carácter de un tercer principio de la termodinámica, está el objeto, especialmente por parte de Einstein, hemos de confesar que su importancia en todo caso sería mínima, pues fijaría únicamente en una forma general el valor de la constante de integración, y sabemos que, en termodinámica, no se trata sino de *diferencias de entropía.* De este punto de vista se podría admitir que tal determinación quedaría sin consecuencias para mediciones. Pero Nernst observa que una substancia condensada se puede presentar en estados físicos distintos, é ignoramos *a priori* si su entropía al cero absoluto depende de estos estados como lo exige el teorema impugnado.

Luego, para enterarnos de su alcance, hay que recurrir á ejemplos y mostrar, para cada uno, el resultado que se consigue con la termodinámica clásica, para después compararlo con la deducción complementaria suministrada por el mismo teorema.

Según la termodinámica clásica se puede expresar la entropía en función del calor específico bajo presión constante $C_p$ en la forma siguiente:

$$S = \int \frac{C_p dT}{T}, \qquad (1)$$

haciéndose la integración, como es natural, á presión constante, siendo T el límite superior y el límite inferior otro valor de T cualquiera. Ahora bien, el teorema de Nernst *requiere* que este límite inferior sea igual á cero, y por lo tanto que se escriba:

$$S = \int_0^T \frac{C_p dT}{T}. \qquad (2)$$

De esta expresión resulta en seguida que $C_p$ desaparece para $T = 0$, y, al propio tiempo, que los calores específicos de todas las substancias condensadas químicamente homogéneas tienden á cero á medida que la temperatura va decreciendo.

(*) Sería más correcto decir que tiende á anularse cuando la temperatura absoluta decrece indefinidamente, pues sabemos que, en virtud del principio de Carnot, el cero absoluto es irrealizable y no se puede considerar sino como un límite inaccesible.

Otra consecuencia consiste, como ya lo sabemos, en la necesidad para el coeficiente de dilatación térmica de toda substancia condensada y químicamente homogénea de anularse al cero absoluto.

Pero Nernst ha mostrado además, como consecuencia del mismo principio aplicado á los equilibrios químicos, que las constantes químicas que, juntamente con los calores de reacción, permiten calcular las condiciones de equilibrio de los sistemas de una fase gaseosa, *se pueden deducir muy sencillamente del conocimiento de las tensiones de los vapores.*

En estas condiciones, Nernst introduce una hipótesis nueva : supone la concentración $c$ del vapor *proporcional al número de los átomos que poseen un quantum de energía.* Los átomos que permanecen en reposo no contribuyen con toda evidencia á la tensión del vapor, y se tiene para las temperaturas muy bajas :

$$c = Ae^{-\frac{\beta\nu}{T}}, \tag{3}$$

siendo A un coeficiente de proporcionalidad.

Si ahora se tiene en cuenta la relación :

$$p = cRT \tag{4}$$

entre la tensión y la concentración, resulta mediante una substitución :

$$p = Ae^{-\frac{\beta\nu}{T}}.RT,$$

de donde :

$$e^{-\frac{\beta\nu}{T}} = \frac{P}{ART},$$

y en la forma logarítmica :

$$-\frac{\beta\nu}{T} = \log p - \log T - \log AR$$

ó bien :

$$\log p = -\frac{\beta\nu}{T} + \log T + C_0. \tag{5}$$

Pero, en virtud del principio de Carnot, tenemos para la tensión del vapor de una substancia monoatómica, cuando no se tiene en cuenta el calor específico de la substancia condensada :

$$\log p = -\frac{\lambda_0}{RT} + 2,5 \log T + C_0. \tag{6}$$

Nernst entonces observa cuán extraño es el resultado de que las fórmulas (5) y (6) se presenten en formas al menos muy análogas. El hecho, dice, de que el factor 2.5 falta en la primera puede explicarse porque se ha prescindido en la hipótesis hecha de la influencia de la temperatura sobre el gas, y tenido en cuenta sólo su influencia sobre el sólido, mientras la energía cinética de los átomos gaseosos varía mucho con la temperatura. Por otra parte, existe también gran diferencia entre el coeficiente $\beta\nu$ en (5) y el coeficiente $\frac{\lambda_0}{R}$ que representa el calor latente de vaporización al cero absoluto. En efecto, para el plomo, por ejemplo, este último resulta al menos cien veces mayor que el primero. Pero se podría conseguir el acuerdo si se supusiera que un átomo, para pasar al vapor, ha de tener un gran número de quanta de energía, pues á las temperaturas muy bajas el número de los átomos que poseen *n quanta* es proporcional á $e^{-\frac{n\beta}{T}}$.

Nernst observa también que las consideraciones anteriores no ponen en evidencia que el valor de la constante $C_0$ sea independiente del *estado del cuerpo sólido* y no dependa sino de la naturaleza del vapor, y por esto no vacila en confesar que no se debe por el momento insistir en la hipótesis hecha, aunque sea preciso señalar la importancia fundamental del problema planteado.

Por último, el sabio berlinés enuncia la posibilidad de dos aplicaciones de la teoría de los *quanta* á los fenómenos físicoquímicos;

1ª Para los sólidos el potencial químico y la energía libre, poco diferentes bajo presiones pequeñas, satisfacen á la relación:

$$\lim \frac{dA}{dT} = 0,$$

$$\text{para } T = 0.$$

2ª Antes que las moléculas diatómicas empiecen á disociarse en una forma apreciable, el lazo molecular rígido tiene evidentemente que ceder, lo que significa que las moléculas han de absorber *quanta* de energía correspondientes á dicho lazo. Ahora bien, el hecho se debe posiblemente á un incremento del calor molecular, más allá del valor exigido por las moléculas rígidas, lo que, por otra parte, parece estar confirmado por la experiencia.

**90. Examen crítico de la teoría de Nernst.** — Si uno reflexiona sobre el concepto fundamental de la teoría de Nernst, es difícil que no conserve dudas acerca de su hipótesis de la descomposición de una vibración de átomo en otras tres circulares. En efecto, se comprende una descomposición según tres ejes, pero la en tres componentes circulares no descansa evidentemente sobre ningún fundamento serio, y además tal descomposición podría engendrar grandes dificultades si quisiéramos atribuírle una importancia real. Esto lo observó Lorentz en la discusión que tuvo lugar en la conferencia de Bruselas después de hecha por Nernst la lectura de su informe.

Por otra parte si se supone un electrón sujetado á moverse según una recta, las condiciones son muy diferentes de lo que resultan para un electrón completamente libre: por ejemplo, ya no existe resistencia proporcional á la velocidad. Por esto mismo, la aplicación de la hipótesis de los *quanta* á sistemas que tienen más de un grado de libertad, da siempre lugar á dificultades de explicación, cuando se considera los *quanta* como cantidades de energía, ó como dominios indivisibles de *extensión en fase*.

Otra dificultad fué señalada por Einstein, acerca de la diminución de los calores específicos á las bajas temperaturas. Si, como Nernst, explicamos esta diminución mediante la hipótesis de las uniones rigídas entre los átomos, lo que reduce el número de los grados de libertad, los cuerpos sólidos se deberían convertir en cuerpos indeformables, y la compresibilidad tendría que anularse para $T = 0$, debiendo también los períodos infrarrojos propios ponerse, ópticamente al menos, cada vez menos observables al acercarse la temperatura al cero absoluto. Pero la experiencia nos revela resultados del todo opuestos.

En resumen, la fórmula de Nernst ha realizado un progreso notable si se la compara con la de Einstein, pues responde á los datos experimentales, pero sería difícil considerarla de otro modo que como una relación empírica, debida únicamente á un azar favorable. La tentativa de explicación teórica de Nernst es muy poco admisible, y probablemente el fracaso de la fórmula de Einstein se debe al hecho de que las oscilaciones de los átomos no resultan nunca del todo monocromáticas, ó sea de igual frecuencia. Por otra parte la relación de Nernst, á su vez, deja de estar conforme á la experiencia cuando la substancia considerada no cristaliza en un sistema regular, y como se compone de la suma de dos términos de Einstein, con una diferencia de una octava en la frecuencia, esta composi-

ción se podría explicar tal vez por una causa de orden geométrico.

Como lo observó Lindemann en la Conferencia de Bruselas, se podría admitir que las fuerzas que actúan entre los átomos son *dirigidas;* de este modo, con una disposición en cuadrado, el átomo podría oscilar en la dirección de la diagonal ó paralelamente á los lados de la figura. La oscilación, en una de estas últimas direcciones, no daría lugar á ningún efecto óptico si se supone que, en aquellas direcciones los iones son alternativamente positivos y negativos.

Con todo esto, se ve que la teoría de Nernst que acabamos de exponer descansaba sobre bases muy poco firmes, y resultaba preferible, aunque sin rechazar su fórmula, de considerarla como una relación provisoriamente cómoda, pero cuya justificación quedaba imposible en una forma coherente y satisfactoria. En estas condiciones, en cuanto á la fórmula de Nernst, como acerca de otros muchos puntos ligados con la hipótesis de los *quanta,* parecía más prudente esperar y permanecer en la expectativa.

Ahora veremos cómo el descubrimiento ingenioso de un joven físico holandés, P. Debye, llevó á Nernst á fundar otra teoría más satisfactoria que la anterior.

## CAPÍTULO VI

### LA LEY DE P. DEBYE Y LA NUEVA TEORÍA DE NERNST

91. **Fundamento del cálculo de P. Debye** — Á este joven sabio holandés le ocurrió la idea de considerar del punto de vista de la energía, los cuerpos sólidos como si fueran continuos, sin tener en cuenta su estructura molecular, lo que da á sus cálculos una forma original. Fundándose en una razón de analogía que parece muy audaz, admitió, como en la teoría de la radiación para los cuerpos sólidos, que el número de oscilaciones está dado en función de la frecuencia por la relación :

$$dn = A\nu^2 d\nu, \qquad (1)$$

siendo $\nu$ el *número máximo de las oscilaciones* que puede alcanzar el cuerpo considerado, y que es característico del mismo.

Ahora bien, según las antiguas teorías conforme á la mecánica clásica y á la ley de repartición de la energía, consecuencia directa

de las ecuaciones de Lagrange y Hamilton, á cada oscilación ha de corresponder una energía :

$$\frac{RT}{N_0}$$

o, conforme á la ley de Dulong y Petit, para un número de oscilaciones *dn* :

$$\varepsilon = \frac{RT}{N_0} dn, \tag{2}$$

y, para la energía total que corresponde á un número de oscilaciones comprendido entre *o* y *n* :

$$E = 3RT = \frac{RT}{N_0} \int_0^n dn = \frac{RTA}{N_0} \int_0^\nu \nu^2 d\nu = \frac{RT}{N_0} A \frac{\nu^3}{3}. \tag{3}$$

siendo $N_0$ el número de átomos contenidos en el átomo gramo.

Debye deduce de allí :

$$3RT = \frac{RT}{N_0} A \frac{\nu^3}{3},$$

de donde :

$$A = \frac{9N_0}{\nu^3}. \tag{4}$$

Hasta ahora el raciocinio de Debye no se refiere sino á temperaturas altas. Para las bajas, es preciso, según el joven físico, poner de acuerdo el movimiento térmico con la fórmula de Planck de la radiación negra, y para ello substituír la temperatura T por la expresión :

$$\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1}$$

ó sea introducir, en la idea de continuidad que le sirvió de guía antes, la hipótesis de la discontinuidad ó de los *quanta*, lo que da por resultado :

$$3RT = 3R \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} \tag{5}$$

y por consiguiente:

$$E = \frac{RA}{N_0} \int_0^\nu \nu^2 \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} d\nu, \tag{6}$$

de donde, substituyéndose A por su valor:

$$A = \frac{9N_0}{\nu^3},$$

$$E = \frac{9R}{\nu^3} \int_0^{\nu} \nu^2 \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} d\nu. \tag{7}$$

Aquí ha de intervenir una observación importante relativa al límite superior de la integral, ó sea que $\nu$ representa en la fórmula (7) el mayor número de oscilaciones que puede tomar el cuerpo considerado, la frecuencia propia y característica del átomo, ó al menos una magnitud conmensurable con ella.

Por otra parte, se puede transformar la integral (7) si se pone:

$$\frac{\beta\nu}{T} = x, \tag{8}$$

de donde:

$$\beta\nu = Tx$$

$$\nu^2 = \frac{T^2x^2}{\beta^2} \qquad \frac{1}{\nu^3} = \frac{\beta^3}{T^3x^3}$$

$$\nu^3 = \frac{T^3x^3}{\beta^3} \qquad d\nu = \frac{T}{\beta} dx$$

y por último:

$$E\nu = \frac{T^4}{\beta^3\nu^3} \int_0^x \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \tag{9}$$

Esta relación permite calcular fácilmente el valor numérico de E y del calor específico:

$$C_v = \frac{dE}{dT}, \tag{10}$$

y los resultados que se obtienen de este modo son poco diferentes de los suministrados por la fórmula empírica de Nernst y Lindemann, *fuera de las bajas temperaturas.*

Pero, para valores muy pequeños de T, la fórmula de Debye nos revela las inesperadas y muy sencillas relaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{aligned} E &= aT^4 \\ C_v &= 4aT^3 \\ a &= \frac{3}{5}\pi^4 \frac{R}{(\beta\nu)^3}. \end{aligned} \right. \qquad (11)$$

Observaré aquí que Debye no se hizo conocer sólo por estas relaciones teóricas cuya importancia es innegable, sino que se reveló experimentador muy hábil y pudo demostrar que ellas están verificadas en un campo experimental de límites muy extensos.

Por otra parte me parece conveniente insistir otra vez en la significación exacta que atribuye á la frecuencia $\nu$ el raciocinio del joven sabio holandés.

Según Einstein, á las temperaturas bajas, la mayor parte de los átomos del cuerpo sólido considerado quedan sin movimiento, mientras algunos vibran con un *quantum* de energía, y otros aun menos numerosos con dos ó varios *quanta*. Por otra parte el número de oscilaciones de un átomo cualquiera, supuesto rodeado por otros en reposo, se puede definir admitiendo que todos los átomos del cuerpo estando inmóviles, si se aparta uno de ellos algo de su posición de equilibrio para abandonarlo en seguida á la acción de las fuerzas elásticas, tiende á volver á su estado de equilibrio, después de pasar por una serie de oscilaciones cuya frecuencia está designada por $\nu$.

En el concepto de Debye al contrario, la frecuencia reviste un sentido físico muy distinto y no se puede definir por lo general en una forma tan sencilla como en la hipótesis de Einstein. Como ya lo sabemos $\nu$ designa el límite superior que el número de oscilaciones nunca puede pasar. Debye confiesa que tal concepto se representaría difícilmente por imágenes y comparaciones comunes, por ejemplo sacadas de los fenómenos de la hidrodinámica, en razón de la irregularidad de la estructura atómica que no se adapta á las longitudes de onda de las oscilaciones que se refieren á esta clase de fenómenos, pues aquellas longitudes son conmensurables con la distancia de los átomos. De este modo explica la necesidad de recurrir como lo hizo á un raciocinio basado en la *noción de continuidad*. Á las temperaturas bajas, las ondas resultan como apagadas, de acuerdo con las leyes de la radiación, y, por esto mismo, los resultados que son la consecuencia de la fórmula de Debye se encuentran verificados en una forma tan inesperada, pero las relaciones conseguidas dejan de ser adaptables á las frecuencias atómicas muy grandes.

En resumen, la exactitud de los resultados deducidos del concepto de Debye, á las bajas temperaturas, es sumamente notable, pues, mediante una combinación del continuo y del discontinuo, se llega á una concordancia perfecta con los hechos experimentales, y mucho más perfecta aun que la suministrada por la fórmula empírica de Nernst y Lindemann; además la teoría del jóven físico tiene la ventaja de llevarnos á la ley muy sencilla de la variación de la energía proporcional, á las bajas temperaturas, á la cuarta potencia de estas.

92. **Tentativa de Nernst para explicar teóricamente la ley de Debye.** — Nernst ha tratado de bosquejar otra teoría, mediante la cual, fundándose en el discontinuo sólo ó sea en las ideas de Planck y Einstein, pudiera llegar á una fórmula que expresara también la ley de Debye en cuanto á la energía á bajas temperaturas.

En una conferencia dada por el físico berlinés en Göttingen en 1913, bajo los auspicios de la *Königgesselschaft der Wissenschaften,* emitió la idea de que el problema, que consiste en deducir la frecuencia atómica del modo de variación de los calores específicos, no se podrá resolver sino mediante nuevas hipótesis atomísticas.

Mientras tanto, toma por fundamento la relación primitiva de Einstein:

$$C_v = 3R \frac{\left(\frac{\beta\nu}{T}\right)^2 e^{\frac{\beta\nu}{T}}}{\left(e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1\right)^2}. \qquad (1)$$

y considera una fila de $N_0$ átomos dispuestos en línea recta y unidos por la acción de las fuerzas elásticas con sus posiciones respectivas de equilibrio y reposo. En el sentido de la fórmula de Einstein, el movimiento térmico á temperaturas muy bajas ha de verificarse de modo que la mayor parte de los átomos permanezcan en estado de reposo, encontrándose algunos en movimiento oscilatorio según la recta considerada con un *quantum* $h\nu$, otras menos numerosas con un *quantum* doble, y así sucesivamente, el número de los átomos en movimiento con un *quantum* igual á $nh\nu$ poniéndose cada vez menor á medida que va aumentando $n$. En estas condiciones, el número de los átomos en reposo tendría por expresión:

$$N_0\left(1 - e^{-\frac{\beta\nu}{T}}\right), \qquad (2)$$

siendo $\beta$ igual á $\frac{h}{K}$, $K = \frac{R}{N}$ y N el número de los átomos contenidos en el átomo gramo.

Ahora bien, el hecho de que unos cuantos átomos, muy pocos, se encuentran en vibración, mientras los demás permanecen en estado de reposo, nos muestra con toda evidencia que las fuerzas elásticas que los unen se hallan aflojadas para los primeros, mientras dan lugar para los otros á uniones completamente rígidas.

Pero se puede admitir que dos átomos, ó un mayor número, ligados mutuamente en una forma invariable, tienen aun la facultad de moverse en grupos como una molécula compleja, si por ejemplo las fuerzas de unión que existen entre cada uno de estos grupos y los vecinos están aflojadas, mientras los átomos que componen cada grupo quedan unidos entre sí en una forma del todo rígida. El número de los grupos que así pueden oscilar libremente ha de resultar sin duda mucho mayor á las bajas temperaturas de lo que prevé la fórmula de Einstein, pues este físico no considera como sometidos al movimiento vibratorio sino á los átomos que han quedado libres *individualmente*, y con ésto ya se explica por qué la fórmula de Einstein suministra valores demasiado pequeños.

Si designamos por $\nu_1$ el número de oscilaciones que corresponden á un átomo vibrando individualmente, este número tendrá por expresión :

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}. \tag{3}$$

siendo K la fuerza elástica de dirección y $m$ la masa del átomo.

Para un grupo de dos átomos ligados en una forma inflexible, la fuerza K no variará, mientras la masa tomará un valor doble, y se tendrá :

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{2m}} \tag{4}$$

Análogamente, resultará para un grupo triatómico :

$$\nu_3 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{3m}} \tag{5}$$

y así sucesivamente.

De esto resulta, según Nernst, que si se pudiera calcular con toda certeza los números de grupos de cada clase animados de movimien-

tos vibratorios de conjunto, el problema encontraría su verdadera solución.

En efecto, sean $N_1$, $N_2$, $N_3$... $N_n$ los números de estos grupos formados respectivamente de 1, 2, 3... $n$ átomos que vibran juntos en una misma fila rectilínea, la energía total correspondiente á esta fila tendrá por expresión :

$$E = R\frac{N_1}{N_0}\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1} + R\frac{N_2}{N_0}\frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{2}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{2}}}-1} + R\frac{N_3}{N_0}\frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{3}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{3}}}-1} + \ldots \qquad (6)$$

Ahora bien, Nernst afirma que se puede escribir :

$$N_1 = N_0$$

pues, dice, en la dirección de la fila, podemos admitir que todos los átomos que forman cada uno de los grupos vibran también aisladamente. Pero me parece este concepto en oposición con la hipótesis, pues, con el mismo raciocinio, se podría decir también que, en cada grupo compuesto de un número par de átomos unidos en una forma inflexible, cada par de átomos vibra individualmente mientras vibra el grupo entero.

Por otra parte, añade Nernst, sería difícil calcular los números $N_2$, $N_3$... $N_n$ sin introducir nuevas hipótesis. Pero lo que podemos afirmar es que $N_2$ es menor que $\frac{N_0}{2}$, $N_3$ menor á su vez que $\frac{N_0}{3}$, y así sucesivamente. Para suplir al cálculo de estas desigualdades bastante pueriles, Nernst se limita á escribir las condiciones siguientes :

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0 \\ N_2 &= N_0\left(1 - e^{-\frac{\beta\nu}{T}}\right)\frac{1}{2} \\ N_3 &= N_0\left(1 - e^{-\frac{\beta\nu}{T\sqrt{2}}}\right)\frac{1}{3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (7)$$

siendo $N_0\left(1 - e^{-\frac{\beta\nu}{T}}\right)$ el número de los grupos biatómicos en estado de

reposo individual, $N_0\left(1 - e^{-\frac{3\nu}{T\sqrt{2}}}\right)$ el de los grupos triatómicos también en reposo si se los considera como grupos indivisibles, etc.

Ahora bien, si nos representamos la igualdad de las vibraciones con respecto á un sistema de tres ejes rectangulares, como nos imaginamos un cristal monoatómico que cristaliza en un sistema regular, podríamos escribir, dice Nernst :

$$E = 3R \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{3\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{3\nu}{T\sqrt{n}}} - 1} \left(1 - e^{-\frac{\nu'}{T\sqrt{n-1}}}\right) \frac{1}{n^x}. \qquad (8)$$

Por último, el sabio de Berlín nos da á conocer que, para volver á encontrar la ley de Debye á las bajas temperaturas, según la cual la anergía E es proporcional á la cuarta potencia de ellas, bastaría atribuír al exponente indeterminado $x$ el valor :

$$x = 2.5.$$

Sin embargo, Nernst confiesa que la expresión (8) no se puede considerar como una solución verdadera, aunque se acerque más á la verdad que la relación de Debye, pues tiene en cuenta la estructura atómica, lo que no sucede con los raciocinios del joven físico holandés, y Nernst opina que, por esto, presenta cierta ventaja, pues permite dar al estudio de las vibraciones térmicas de longitud de onda muy pequeña, una nueva orientación que puede resultar de cierta utilidad.

En resumen, si consideramos detenidamente esta nueva tentativa teórica de Nernst y el resultado obtenido, observamos tres cosas principales :

1° La forma del todo artificial del raciocinio que lleva únicamente á escribir desigualdades en forma de igualdades mediante la introducción de un factor arbitrario $\frac{1}{n^x}$ menor que la unidad, que tiene por efecto destruír la armonía general sin conservar á la fórmula en todas sus partes la extructura que ha de resultar de la aplicación de la teoría de los *quanta* ;

2° La preocupación única del autor de volver á encontrar la ley de Debye mediante un coeficiente indeterminado, lo que, evidentemente, es siempre posible en la forma exponencial ;

3° El error de concepto ya señalado que consiste en escribir :

$$N_1 = N_0$$

Con todo esto, sólo subsiste la idea de Nernst en cuanto á la posibilidad para cada grupo solidificado de vibrar aun en la forma de una molécula bi, tri... poliatómica. Pero los números $N_1$, $N_2$, $N_3$... $N_n$ de los grupos de cada clase que pueden vibrar por separado y cuyo cálculo el sabio prusiano considera como muy difícil sin nuevas hipótesis atomísticas, han de ser determinables por el cálculo de las probabilidades, y esta determinación la conseguí en la forma que voy á desarrollar en el párrafo siguiente.

93. **Aplicación del cálculo de las probabilidades á la determinación de los números de grupos de cada clase.** — Volvamos á la hipótesis de Nernst y supongamos una fila de $N_0$ átomos, pudiendo este número ser por ejemplo el de los átomos contenidos en el átomo gramo.

Además imaginemos que estos $N_0$ átomos están soldados el uno con el otro por fuerzas desconocidas de modo que formen un grupo único rígido cuyo movimiento no puede verificarse sino en la forma del desplazamiento de una molécula única. Podremos lógicamente admitir que el estado supuesto corresponde al límite de las bajas temperaturas cuando tienden al cero absoluto. Si, desde este límite, la temperatura crece algo, es lógico suponer que en esta varilla rígida se va á verificar un número $\mathfrak{N}$ de roturas cuyo resultado será partirla en $\mathfrak{N} + 1$ trozos distintos, ó sea formados cada uno de números distintos de átomos siempre soldados el uno con el otro.

El número $\mathfrak{N}$ da roturas debido á una pequeña elevación de temperatura dependerá evidentemente de dicha elevación y también del número total $N_0$ de los átomos primitivamente ligados. Por otra parte hemos de admitir que $\mathfrak{N}$ aumenta á medida que los dos variables van creciendo, lo que permite escribir :

$$\mathfrak{N} = f(N_0, T), \qquad (1)$$

ó mejor, pues $\mathfrak{N}$ ha de ser evidentemente proporcional á $N_0$ :

$$\mathfrak{N} = N_0 . F(T). \qquad (2)$$

Si $\mathfrak{N}$ es muy grande, aunque mucho menor que $N_0$, ¿ cuál será la probabilidad para que se formen trozos compuestos de 1, 2, 3 ... $n$ átomos ?

Para calcularla, consideremos una primera rotura. Como se puede verificar entre dos átomos cualesquiera, la probabilidad es igual para que se formen:

1 trozo de 1 átomo y otro de $(N_0 - 1)$ átomos,
1 trozo de 2 átomos y otro de $(N_0 - 2)$ átomos,
1 trozo de 3 átomos y otro de $(N_0 - 3)$ átomos,
. . . . . . . . . . . . . . . .
1 trozo de $n$ átomos y otro de $(N_0 - n)$ átomos.

Por otra parte, cada una de las probabilidades tiene por expresión:

$$p_1 = \frac{1}{N_0 - 1}.$$

Consideremos ahora otra rotura; la probabilidad para que se efectúe entre dos átomos cualesquiera es:

$$p_2 = \frac{1}{N_0 - 2}$$

pues en virtud de la primera rotura realizada, no hay más ahora sino $(N_0 - 2)$ *casos posibles.*

Para la tercera rotura tendremos análogamente:

$$p_3 = \frac{1}{N_0 - 3}$$

y así sucesivamente, hasta la $\mathfrak{N}^{ma}$ rotura, cuya probabilidad tendrá por expresión:

$$p_N = \frac{1}{N_0 - \mathfrak{N}}.$$

Ahora bien, la probabilidad P para que las $\mathfrak{N}$ roturas ocupen posiciones definidas cualesquiera es igual al producto de todas las probabilidades anteriores, y se tiene:

$$P = p_1\, p_2\, p_3 \dots p_N = \frac{1}{(N_0 - 1)(N_0 - 2)\dots(N_0 - \mathfrak{N})} = \frac{1}{A^{N}_{N_0 - 1}} \ (*) \qquad (3)$$

expresión en la cual $A^{N}_{N_0 - 1}$ representa el número de las coordinaciones que se pueden efectuar con $(N_0 - 1)$ objetos tomados de $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{N}$.

Por otra parte, la probabilidad P queda aplicable á *todas las distribuciones posibles* de las $\mathfrak{N}$ roturas, por ejemplo al caso en que se

(*) Por mayor comodidad tipográfica se ha substituido en los exponentes é índices la letra $\mathfrak{N}$ por $N$ itálica.

quiere tener al principio de la fila $\mathfrak{N}$ átomos libres y después un solo trozo compuesto de $(N_0 - \mathfrak{N})$ átomos aglomerados, ó cualquiera otra disposición definida de antemano. Luego si se quiere que la distribución de las roturas se verifique en un orden dado entre grupos de $1, 2, 3 \ldots n$ átomos aglomerados, cuyos números serían $N_1$, $N_2$, $N_3 \ldots N_n$ respectivamente, la probabilidad de aquella distribución quedará siempre independiente del orden definido de antemano para la repartición relativa de los grupos de átomos en la fila, y dependerá únicamente de los números mismos de grupos de cada clase $N_1$, $N_2$, $N_3 \ldots N_n$ siempre con la condición que se tenga :

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \ldots + nN_n = N_0 \qquad (4)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n = \mathfrak{N} + 1. \qquad (5)$$

Por consiguiente, si designamos por $P_1$, $P_2$, $P_3 \ldots P_n$ las probabilidades que corresponden á cada distribución distinta, la probabilidad W para que resulten $N_1$ grupos monoatómicos, $N_2$ biatómicos ... $N_n$ poliatómicos compuestos cada uno de $n$ átomos, tendrá por expresión :

$$W = P_1^{N_1} . P_2^{N_2} . P_3^{N_3} \ldots P_n^{N_n} \qquad (6)$$

y como todos los factores P son iguales, el producto se reduce á :

$$P^{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n} \qquad (7)$$

con el coeficiente propio de las permutaciones compuestas :

$$\frac{(\mathfrak{N} + 1)!}{N_1!\, N_2!\, N_3! \ldots N_n!}$$

lo que da para una cualquiera de las probabilidades W :

$$W = \frac{(\mathfrak{N} + 1)!}{N_1!\, N_2!\, N_3! \ldots N_n!} P^{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n} \qquad (8)$$

Para obtener cada una de estas probabilidades bastaría atribuír á los números $N_1$ $N_2 \ldots N_n$ en la expresión (8) todos los valores posibles enteros y positivos que satisfagan á las condiciones (4) y (5) más arriba expresadas.

Pero el segundo factor de (8), al dar á los exponentes estos distintos valores, no experimentará ningún cambio, mientras no sucederá otro tanto con el primer factor, de modo que el máximo de W se verificará cuando el denominador se ponga mínimo.

Pero sabemos que si se tiene :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \text{const}$$

el mínimo del producto :

$$x_1 ! \, x_2 ! \, x_3 ! \ldots x_n !$$

se verifica cuando se tiene :

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$$

ó sea en el caso actual, cuando resulte :

$$N_1 = N_2 = N_3 = \ldots = N_n = \frac{\mathfrak{N}_{+1}}{n}. \qquad (9)$$

En estas condiciones la probabilidad máxima corresponde al caso que se tenga :

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_2}{N_0} = \frac{N_3}{N_0} = \ldots = \frac{N_n}{N_0}$$

ó, si volvemos á la fórmula de Nernst :

$$E = R\frac{N_1}{N_0}\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} + R\frac{N_2}{N_0}\frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{2}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{2}}} - 1} + R\frac{N_3}{N}\frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{3}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{3}}} - 1} + \ldots \qquad (10)$$

al caso para el cual resulte :

$$E = R\frac{N_1}{N_0}\sum_1^n \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}} - 1}. \qquad (11)$$

Ahora basta calcular el coeficiente $\frac{N_1}{N_0}$ en función de $n$, y para ello tenemos :

$$N_1 + 2N_1 + 3N_1 + \ldots + nN_1 = N_0,$$

de donde :

$$\frac{N_1}{N_0}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 1.$$

y como por otra parte se tiene :

$$1+2+3...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

resulta :

$$\frac{N_1}{N_n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

y por último :

$$E=\frac{2R}{n(n+1)}\sum_{1}^{n}\frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}}-1}. \qquad (13)$$

94. **Cálculo del número n en función de T.** — Observaremos primero que esta expresión de E, ó sea de la energía de una fila de átomos, en función de T y $n$, está perfectamente de acuerdo con la expresión de E para un cuerpo sólido á temperaturas suficientemente elevadas. Pues entonces estando libres todos los átomos, y $n$ igual á 1, basta multiplicar por 3 el coeficiente, en razón de los grados de libertad, lo que da :

$$E=\frac{6R}{2}\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}=3RT$$

si se tiene en cuenta el hecho de que en la hipótesis de los *quanta* T ha de substituírse por el término :

$$\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}$$

propio de la fórmula de Planck á las temperaturas bajas.

Por otra parte, la expresión (13) de E es muy sencilla, pero ofrece el inconveniente de que el primer factor se encuentra fuera del signo $\Sigma$, ó sea que $n$ permanece indeterminado en dicho factor, pues ignoramos el valor que le corresponde para una temperatura dada T. En efecto, recordaremos que $n$ expresa el número de átomos comprendidos en el mayor de los grupos aglomerados, y no hay ningún procedimiento físico para determinarlo. Voy á tratar, pues, de calcular $n$ de tal modo que se ponga homogénea la expresión de E hasta reducirla á no contener sino constantes y funciones de la forma :

$$\frac{\frac{\beta\nu}{n}}{e^{\frac{\beta\nu}{Tn}}-1},$$

todas colocadas dentro del signo $\Sigma$.

Consideremos los dos estados sucesivos más probables de la fila de átomos, siendo definidos estos estados por el hecho de que en el primero, que corresponde á la temperatura más baja, el mayor número de átomos aglomerados en un sólo grupo sea $n$, mientras en el segundo, después de aumentar la temperatura, el mayor número tenga por valor $(n-1)$.

Para el primer estado tenemos :

$$\left\{\begin{aligned} & N_1 = N_2 = N_3 = \ldots = N_n \\ & N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \ldots + nN_n = N_0 \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

y para el segundo :

$$\left\{\begin{aligned} & N_1' = N_2' = N_3' = \ldots = N'_{n-1} \\ & N_1' + 2N_2' + 3N_3' + \ldots + (n-1)N'_{n-1} = N_0 \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Resulta de estas relaciones, como ya lo sabemos :

$$N_1 = \frac{2N_0}{n(n+1)} \qquad (3)$$

$$N_1' = \frac{2N_0}{(n-1)n}, \qquad (4)$$

de donde por división :

$$\frac{N_1'}{N_1} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$N_1' = N_1\frac{n+1}{n-1}. \qquad (5)$$

Ahora bien, $N_1'$ representa, conforme al cálculo de las probabilidades, el número uniforme de las distintas clases de grupos, cuando en la que corresponde á las aglomeraciones mayores, cada grupo contiene $(n-1)$ átomos. $N_1$ al contrario caracteriza en igual forma el

estado anterior que corresponde á una temperatura algo más baja, para la cual cada uno de los grupos de aglomeraciones mayores contiene $n$ átomos. Para que, en virtud del incremento de temperatura, desaparezcan estos últimos, es preciso que, en cada uno de ellos, se haya verificado al menos una rotura.

Por otra parte, es menester que los números de grupos que pertenecen á las distintas clases permanezcan iguales entre sí, conforme á la ley de probabilidad.

Resulta que, si según la relación (5) se tiene :

$$\frac{N_1'}{N_1} = \frac{n+1}{n-1},$$

es necesario tener también :

$$\frac{N_2'}{N_2} = \frac{N_3'}{N_3} = \ldots = \frac{N'_{n-1}}{N_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}.$$

Pero entonces habrán desaparecido los grupos compuestos de $n$ átomos, y cada uno habrá dado origen á numerosos grupos compuestos, los unos de $(n-1)$ átomos, los otros de $(n-2)$, etc. Sin embargo hemos de observar que, para formar un nuevo grupo de $(n-1)$ átomos aglomerados, es preciso que el grupo considerado forme también otro grupo monoatómico, lo que equivale á decir que el número de los grupos compuestos de $(n-1)$ átomos habrá crecido tanto como el número de los grupos monoatómicos.

Análogamente, cuando el número de los grupos de aglomeración $(n-2)$ aumenta en una unidad, el número de los grupos biatómicos crece en la misma forma, y así sucesivamente. Por otra parte, en estas condiciones, es imposible que los grupos primitivos compuestos de $n$ átomos experimenten cada uno más de una rotura, para poder engendrar los grupos nuevos compuestos de $(n-1)$ átomos y si el número de estos $N'_{n-1}$, en virtud del calculo de las probabilidades, es igual al número de los grupos contenidos en cada una de las demás clases, es imprescindible : 1° que cada grupo compuesto de $n$ átomos experimente una rotura ; 2° que no experimente más de una ; 3° que en los demás grupos no se verifique ninguna.

Ahora bien, si $N_n = N_1$ es el número de los grupos que experimentan cada uno una rotura, y $(n-1)$ el número de las demás clases de grupos que no sufren ninguna, como una rotura da lugar á dos grupos, se tiene necesariamente :

$$N'_1 = N'_2 = \ldots = N'_{n-1} = N_1 + \frac{2N_1}{n-1} = N_{n-1} + \frac{2N_{n-1}}{n-1}, \qquad (6)$$

lo que significa que el número de grupos comprendidos en cada una de las clases subsistentes aumenta en una cantidad igual á $\frac{2N_1}{n+1}$ en virtud de la desaparición de los grupos de polimerización igual á $n$.

A cada incremento suficiente de la temperatura, corresponde la destrucción de la clase cuyos grupos son compuestos del mayor número de átomos aglomerados, y esta destrucción tiene por efecto el de aumentar de otro tanto el número de grupos de menor polimerización, hasta que habiendo alcanzado la temperatura un valor suficiente, no subsistan sino grupos monoatómicos en la fila considerada.

De estas consideraciones resulta que el cociente $\frac{N_1'}{N_1}$ tiene por expresión:

$$\frac{N_1'}{N_1} = \frac{N_1 + \frac{2N_1}{n-1}}{N_1} = 1 + \frac{2}{n-1} = \frac{n-1+2}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}, \qquad (7)$$

y este resultado se puede considerar como una verificación muy satisfactoria de los raciocinios é hipótesis anteriores, pues está de acuerdo con la relación (5) obtenida mediante consideraciones de orden distinto.

Ahora es fácil escribir la expresión de la energía de la fila de los $N_0$ átomos, cuando el número de átomos que comprenden los grupos de mayor aglomeración está reducido á $(n-1)$, y si designamos por $E_{n-1}$ esta energía por oposición á $En$ que representa la energía correspondiente al caso en el cual aquél número era igual á $n$, tendremos, llamando $T_1$ la nueva temperatura correspondiente:

$$E_{n-1} = \frac{2R}{n(n-1)} \sum_1^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}} - 1}. \qquad (8)$$

Para ello, podemos partir de $E_n$, restando de su valor el término desaparecido que se refiere á los grupos compuestos de $n$ átomos, siempre que se añada la cantidad A de energía que corresponde al aumento experimentado por los números de los demás grupos, desde los mo-

noatómicos hasta los de polimerización igual á $(n-1)$, y de este modo cambiando además T por $T_1$ tendremos:

$$E_{n-1} = E_n - \frac{2R}{n(n+1)} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n}}} - 1} + A,$$

ó bien:

$$E_{n-1} = \frac{2R}{n(n+1)} \sum_1^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}} - 1} + A, \qquad (9)$$

Pero teníamos antes:

$$N_1' = N_1 \frac{n+1}{n-1},$$

de donde:

$$N_1' - N_1 = N_1 \frac{n+1}{n-1} - N_1 = N_1 \frac{n+1-n+1}{n-1} = \frac{2N_1}{n-1}$$

y así se tiene para el incremento de energía A:

$$A = R \frac{N_1}{N_0} \frac{2}{n-1} \sum_1^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}} - 1}. \qquad (10)$$

Por otra parte teníamos también:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{2}{n(n+1)}$$

de donde:

$$\frac{N_1}{N_0} \frac{2}{n-1} = \frac{4}{n(n^2-1)}$$

y por lo tanto:

$$A = \frac{4R}{n(n^2-1)} \sum_1^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}} - 1}. \qquad (11)$$

Este valor, lo podemos introducir en la expresión (9) y resulta:

$$E_{n-1} = \frac{2R}{n(n+1)} \sum_{1}^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}} - 1} + \frac{4R}{n(n^2-1)} \sum_{1}^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}} - 1},$$

de donde:

$$E_{n-1} = \sum_{1}^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}} - 1} \left( \frac{2R}{n(n+1)} + \frac{4R}{n(n^2-1)} \right). \qquad (12)$$

Calculemos el paréntesis; se tiene:

$$\frac{2R}{n(n+1)} + \frac{4R}{n(n^2-1)} = 2R\left[\frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{n(n^2-1)}\right] =$$

$$= 2R \frac{n-1+2}{n(n^2-1)} = \frac{2R}{n(n-1)}.$$

lo que pone de manifiesto que el coeficiente de la relacion (12) es idéntico al de la expresión (8), y ésta es evidentemente otra confirmación de la exactitud de las deducciones é hipótesis.

Formemos ahora la expresión de la energía total ganada, cuando los grupos de mayor aglomeración igual á $n$ han sido destruídos, estando reducida ésta á $(n-1)$. Se tiene:

$$E_{n-1} - E_n = \frac{4R}{n(n^2-1)} \sum_{1}^{n-1} + \frac{2R}{n(n+1)} \sum_{1}^{n-1} - \frac{2R}{n(n+1)} \sum_{1}^{n}$$

$\sum\limits_{1}^{n-1}$ y $\sum\limits_{1}^{n}$ expresando por abreviación, la sumas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{1}^{n-1} \dfrac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}} - 1} \\[2ex] \sum\limits_{1}^{n} \dfrac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}} - 1}, \end{array} \right.$$

y como se tiene:

$$\frac{4R}{n(n^2-1)} + \frac{2R}{n(n+1)} = \frac{4R}{n(n^2-1)} + \frac{2R(n-1)}{n(n^2-1)} =$$

$$=\frac{2R}{n(n^2-1)}(2+n-1)=\frac{2R(n+1)}{n(n^2-1)}=\frac{2R}{n(n-1)}$$

resulta :

$$E_{n-1}-E_n=\frac{2R}{n(n-1)}\sum_1^{n-1}-\frac{2R}{n(n+1)}\sum_1^{n}=\frac{2R}{n}\left[\frac{\sum\limits_1^{n-1}}{n-1}-\frac{\sum\limits_1^{n}}{n+1}\right]. \qquad (13)$$

Observaremos por otra parte que es muy lógico admitir que la transformación originada por nuevas roturas, consecuencia de un aumento pequeño de la temperatura, es debida al hecho de que, de acuerdo con la hipótesis de los quanta, á cada rotura corresponde la intervención de un *quantum* de energía :

$$\varepsilon=h\nu.$$

Ahora bien, sabemos que dichas roturas no se verifican sino en los grupos de mayor polimerización, y esto á razón de una rotura por cada grupo, siendo igual el número de estas roturas, como ya lo sabemos, á :

$$\frac{2N_0}{n(n+1)}.$$

Resulta, pues, que el incremento de energía de la fila tiene por expresión :

$$\frac{2N_0}{n(n+1)}h\nu-E_{n-1}-E_n$$

y podemos escribir, si tenemos en cuenta el valor de $\beta$ :

$$\beta=\frac{hN_0}{R},$$

de donde :

$$N_0=\frac{R\beta}{h};$$

$$\frac{2N_0}{n(n+1)}h\nu=E_{n-1}-E_n=\frac{2R\beta\nu}{n(n+1)}.$$

Si ahora identificamos los dos valores de $E_{n-1}-E_n$, resulta :

$$\frac{2R\beta\nu}{n(n+1)} = \frac{2R}{n}\left[\frac{\sum_1^{n-1}}{n-1} - \frac{\sum_1^{n}}{n+1}\right]$$

ó bien :

$$\frac{\beta\nu}{n+1} = \frac{\sum_1^{n-1}}{n-1} - \frac{\sum_1^{n}}{n+1}\,. \qquad (14)$$

De esta relación podemos deducir el valor de $n$ :

$$(n-1)\beta\nu = (n+1)\sum_1^{n-1} - (n-1)\sum_1^{n}$$

$$n\beta\nu - \beta\nu = n\sum_1^{n-1} + \sum_1^{n-1} - n\sum_1^{n} + \sum_1^{n}$$

$$n\left(\beta\nu + \sum_1^{n} - \sum_1^{n-1}\right) = \beta\nu + \sum_1^{n} + \sum_1^{n-1}$$

$$n = \frac{\beta\nu + \sum_1^{n} + \sum_1^{n-1}}{\beta\nu + \sum_1^{n} - \sum_1^{n-1}}\,. \qquad (15)$$

Podemos poner por mayor comodidad :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_1^{n} = \varphi_n \\ \sum_1^{n-1} = \varphi_{n-1} \\ \sum_1^{n} - \sum_1^{n-1} = \Phi\,. \end{array}\right.$$

y tendremos:

$$n = \frac{\beta\nu + \varphi_n + \varphi_{n-1}}{\beta\nu + \Phi} \tag{16}$$

Calculemos ahora $(n+1)$:

$$n + 1 = \frac{\beta\nu + \varphi_n + \varphi_{n-1} + \beta\nu + \Phi}{\beta\nu + \Phi} = \frac{\beta\nu + \varphi_n + \beta\nu + \varphi_n}{\beta\nu + \Phi} = \frac{2(\varphi_n + \beta\nu)}{\Phi + \beta\nu}.$$

De estos valores se deduce:

$$\frac{1}{n} = \frac{\beta\nu + \Phi}{\beta\nu + \varphi_n + \varphi_{n-1}}$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\Phi + \beta\nu}{2(\varphi_n + \beta\nu)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(\Phi + \beta\nu)^2}{2(\varphi_n + \beta\nu)(\varphi_n + \varphi_{n-1} + \beta\nu)}, \tag{17}$$

y si introducimos el valor de este coeficiente en la expresión de la energía $E_n$ de la fila de átomos:

$$E_n = \frac{2R}{n(n+1)} \sum_1^n \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}} - 1} = \frac{2R}{n(n+1)} \varphi_n, \tag{18}$$

tendremos una fórmula nueva de la energía á las bajas temperaturas.

95. **Nueva expresión de la energía á las bajas temperaturas.** — La substitución da por resultado:

$$E_n = R\varphi_n \frac{(\Phi + \beta\nu)^2}{(\varphi_n + \beta\nu)(\varphi_n + \varphi_{n-1} + \beta\nu)}$$

ó sea:

$$E_n = R \frac{\displaystyle\sum_1^n \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}} - 1} \left( \sum_1^n \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}} - 1} - \sum_1^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n-1}}} - 1} + \beta\nu \right)^2}{\left( \displaystyle\sum_1^n \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}} - 1} + \beta\nu \right) \left( \sum_1^n \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}} - 1} + \sum_1^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n-1}}} - 1} + \beta\nu \right)} \tag{1}$$

Esta expresión es la de la energía de la fila de átomos en función de las temperaturas T y $T_1$ cuya primera se refiere el caso en que los grupos de mayor polimerización son compuestos de $n$ átomos, siendo $T_1$ la que corresponde á una polimerización máxima de $(n-1)$ átomos por grupo, y es mayor que T.

Observaremos que, si se trata de una temperatura T suficientemente elevada para que no existan en la fila sino grupos monoatómicos, ó sea si $n=1$, el término:

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}}-1}$$

que figura á la vez en el numerador y en el denominador de (1) se anula, pues $e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{0}}}$, toma un valor infinitamente grande con respecto á $\frac{\beta\nu}{0}$ y la expresión (1) se reduce á:

$$E_1 = R\frac{\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}\left(\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}+\beta\nu\right)}{\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}+\beta\nu} = R\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}$$

ó sea á una forma que, multiplicada por 3, nos daría para la energía de un cuerpo sólido cuyos átomos gozan todos de tres grados de libertad:

$$E = 3R\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1} = 3RT$$

y este resultado constituye una comprobación de la expresión (1).

Si ahora admitimos el raciocinio de Nernst mediante el cual pasa de la energía de la fila á la del cuerpo sólido (véase el final del párrafo 92, pág. 329), bastará multiplicar la expresión (1) por 3 y cambiar el límite superior de las sumas, extendiéndolas á todos los términos y al infinito, y tendremos:

$$E = 3R \sum_{1}^{\infty} \frac{\dfrac{\dfrac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}}-1}\left(\dfrac{\dfrac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}}-1} - \dfrac{\dfrac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}}-1} + \beta\nu\right)}{\left(\dfrac{\dfrac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}}-1} + \beta\nu\right)\left(\dfrac{\dfrac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}}-1} + \dfrac{\dfrac{\beta\nu}{\sqrt{n-1}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T_1\sqrt{n-1}}}-1} + \beta\nu\right)} \qquad (2)$$

Se ve que esta expresión presenta la ventaja de no depender de ningún factor indeterminado $x$ arbitrario, en contra de lo que sucedía con la de Nernst. Es cierto que contiene dos valores de la temperatura, y que, siendo T una temperatura dada, $T_1$ permanece prácticamente desconocida, aunque tal vez se pudiera establecer una relación entre estas dos temperaturas consecutivas que corresponden respectivamente á polimerizaciones máximas $n$ y $(n-1)$ para la fila de átomos considerados.

Por esto mismo, la fórmula de la energía en su forma (2) no ofrece sino un interés meramente teórico. Por otra parte este interés es indiscutible, porque es el resultado de raciocinios basados únicamente sobre hipótesis simples y cuyo fundamento consiste en una aplicación rigurosa del cálculo de las probabilidades.

Sin embargo, es preferible, por su misma sencillez, adoptar para la fila de átomos la expresión (13) del párrafo 93, página 334:

$$E_n = \frac{2R}{n(n+1)} \sum_{1}^{n} \frac{\dfrac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}}-1} \qquad (3)$$

que nos sirvió de base para llegar á la forma definitiva (2).

Si aplicamos á esta expresión (3) el raciocinio de Nernst para pasar de la fila de átomos á un sólido cualquiera, tendremos:

$$E = 3R \sum_{1}^{\infty} \frac{\dfrac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}}-1} \cdot \frac{2}{n(n+1)} \qquad (4)$$

y esta expresión de la energía á las bajas temperaturas se puede comparar con la de Nernst:

$$E = 3R \sum_{1}^{\infty} \frac{\frac{\beta\nu}{\sqrt{n}}}{e^{\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n}}} - 1} \left(1 - e^{-\frac{\beta\nu}{T\sqrt{n-1}}}\right) \frac{1}{n}. \qquad (5)$$

Tiene la ventaja sobre la de Nernst y Lindemann de comprender á todas las frecuencias posibles $\left[\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right]_{n=1}^{n=\infty}$ y no sólo á $\nu$ y $\frac{\nu}{2}$ lo que parecía inadmisible. Es cierto que la última (5) de Nernst goza de igual propiedad, pero tiene el defecto notable de contener el exponente $x$ indeterminado.

Ahora, para dar por terminada la presente monografía, tengo que dedicar un último capítulo al estudio de las consecuencias de la hipótesis de los quanta y al examen crítico general de esta teoría.

## CAPÍTULO VII

### CONSECUENCIAS Y EXAMEN CRÍTICO DE LA TEORÍA DE LOS QUANTA

96. **Rotación de las moléculas.** — Una consecuencia notable de las teorías anteriores consiste en el hecho de que la frecuencia $\nu$, por lo general del orden del trillón de vibraciones por segundo, concuerda, cuando se la calcula mediante el calor específico, con el valor que resulta de la consideración de otros fenómenos. Esto se verifica, como ya lo sabemos, en el caso de la absorción de luz de gran longitud de onda por cuerpos sólidos, como el cuarzo ó el cloruro de potasio, según las experiencias de Rubens. Esta absorción, acompañada de *reflexión metálica,* es explicable si la luz se halla en resonancia con los átomos materiales, lo que significa que tiene la frecuencia deducida del calor específico.

Otro resultado ya señalado nos ha revelado que las propiedades elásticas de los cuerpos sólidos, como lo mostró Einstein, suministran un medio para prever la frecuencia de las vibraciones de un átomo previamente apartado de su posición de equilibrio. Como ya lo sabemos, para la compresibilidad, Einstein hizo un cálculo aproximado que, aplicado al caso de la plata, hace prever una frecuencia del átomo igual á $4 \cdot 10^{12}$, mientras el estudio de los calores específi-

cos asigna á la misma el valor de $4,5 \cdot 10^{12}$; sería difícil exigir una concordancia más perfecta.

Por otra parte, según los trabajos de Nernst, la energía de rotación de una molécula ha de variar en una forma discontinua. Es preciso, pues, generalizar á las rotaciones, con un valor igual de la constante $h$, la ley de discontinuidad que rige á la energía de los resonadores en los fenómenos de la radiación.

En efecto, existe evidentemente cierta analogía entre la rotación de un cuerpo y la oscilación de un péndulo ó el movimiento de un planeta, pues, en estos distintos casos, hay siempre periodicidad.

Sin embargo, se puede observar una diferencia notable, por tener el péndulo y el planeta un período propio bien definido, mientras si suponemos una pequeña esfera en estado de reposo, no podemos prever para ella un período determinado de rotación. Así y todo, si queremos generalizar los resultados de Planck y Nernst, es menester enunciar el principio siguiente:

*Cuando un cuerpo gira, á razón de $\nu$ vueltas por segundo, su energía tiene un valor igual á un múltiplo entero del producto $h\nu$.*

Como por otra parte $2\pi\nu$ expresa la velocidad angular de rotación, ó sea el ángulo recorrido en un segundo, esta energía cinética de rotación ha de ser igual al producto:

$$\frac{1}{2} I (2\pi\nu)^2.$$

siendo I el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación, pues sabemos que si un sólido gira con una velocidad angular $\omega$, su energía de rotación tiene por expresión $\frac{1}{2}\omega^2$.

Si por lo tanto $p$ es un número entero, podemos escribir:

$$\frac{1}{2} I 4\pi^2\nu^2 = ph\nu, \qquad (1)$$

lo que da para la frecuencia:

$$\nu = p \frac{h}{2\pi^2 I}, \qquad (2)$$

y así vemos que el número de las vueltas por segundo, ó sea la frecuencia de rotación, tiene necesariamente por valores posibles:

$$\frac{h}{2\pi^2 I}, \qquad \frac{2h}{2\pi^2 I}, \qquad \frac{3h}{2\pi^2 I} \ldots$$

quedando inadmisibles las velocidades intermediarias.

97. **Rotaciones inestables.** — Confesaremos que el resultado anterior es muy extraño, pues si se designa por $t$ el *quantum* :

$$t = \frac{h}{2\pi^2 I},$$

es difícil admitir que el número de las vueltas $\nu$ pasa del valor $t$ á los valores $2t$, $3t$ ... cuando $p$ toma los valores enteros 1, 2, 3 ... sin poder nunca tomar valores intermediarios.

Pero Jean Perrin ha encontrado una explicación del misterio. Supone que las velocidades que corresponderían á dichos valores intermediarios son *inestables*, lo que equivale á decir que, si por ejemplo el cuerpo en rotación recibe un impulso que podría comunicarle la velocidad angular propia de $3{,}5 \,.\, t$ vueltas por segundo, un *frotamiento ó radiación de naturaleza aun ignorada se manifiesta en seguida para reducir el número de vueltas por segundo á 3t exactamente*, pudiendo después la rotación seguir indefinidamente sin otra pérdida de energía.

Perrin supone que tal frotamiento podría referirse á los valores enormes de la aceleración ó fuerza centrífuga, cuyo orden de magnitud resultaría un millón de millones de veces mayor que el que corresponde á las cantidades de igual naturaleza realizables en nuestras turbinas más rápidas.

De esta hipótesis, aplicada á las moléculas, resultaría que, entre un gran número de ellas, habría muy pocas en una región inestable, ó sea que, en primera aproximación, para una molécula elegida al azar, la rotación en un segundo correspondería á 0, $t$, $2t$, $3t$ ... vueltas. De este modo se podría prescindir de las pocas moléculas cuya energía de rotación está cambiando, como se prescinde en la teoría cinética de los gases de las poquísimas moléculas en estado de choque, cuya energía está experimentando un cambio.

98. **La substancia del átomo está toda concentrada en el centro.** — Para el gran físico francés, la hipótesis anterior nos da una explicación admisible del hecho de que las moléculas de un gas monoatómico, como el argón, no dan lugar á una rotación mutua cuando se cho-

can la una con la otra, ó más bien no conservan ó adquieren, mediante el choque, ninguna energía de rotación, teniendo por consiguiente el calor específico del gas un valor igual á 3 calorías exactamente.

En efecto, si suponemos la materia del átomo condensada en la región cercana al centro, el aumento de inercia I resulta muy pequeño, y la rotación mínima posible, cuya frecuencia $\nu$ es dada por la relación:

$$\nu = \frac{h}{2\pi^2 I}, \qquad (1)$$

toma una velocidad sumamente grande, lo que equivale á decir que el *quantum* de energía $h\nu$ aumenta á su vez en la forma correspondiente.

Ahora bien, si este *quantum* es grande con respecto á la energía de traslación que poseen, *término medio*, las moléculas á las temperaturas realizables, no puede suceder que una molécula, al chocar con otra, le comunique prácticamente ni siquiera la rotación mínima. Al contrario es evidente que, si una molécula tuviera esta rotación, la perdería muy probablemente, en razón de aquel choque, lo que significa en resumen que las moléculas en rotación, á cada instante considerado, son muy poco numerosas.

El argon, por ejemplo, conserva el calor específicó 3 hasta la temperatura de 3000° más ó menos, y esto significa que, hasta esta temperatura elevada, la energía molecular de traslación permanece mucho más pequeña que el *quantum* de energía correspondiente á la rotación mínima.

Si, con Jean Perrin, admitimos, lo que sería un valor evidentemente demasiado grande, que aquella energía es algo menor que la mitad de dicho *quantum*, siendo por otra parte, en razón de su proporcionalidad á la temperatura absoluta, unas diez veces mayor que á la temperatura normal, ó sea más ó menos igual á $\frac{1}{2}10^{-12}$, y si se tiene en cuenta el valor de $h\nu$:

$$h\nu = \frac{h^2}{2\pi^2 I}.$$

resultaría:

$$\frac{1}{2}10^{-12} < \frac{1}{2}\frac{h^2}{2\pi^2 I}, \qquad (2)$$

Substituyéndose después $h$ por su valor:

$$h = 6,2 \,.\, 10^{-27}.$$

se podría sacar de (2) consecuencias muy interesantes en cuanto á la frecuencia y también al momento de inercia.

**99. Frecuencia de rotación y momento de inercia de las moléculas.** — Supondremos primero que $h\nu$ es mayor que $\frac{1}{2} 10^{-12}$, y como el valor de $h$ es $6,2 \,.\, 10^{-27}$, se ve en seguida que $\nu$ resulta mayor á su vez que $10^{-14}$, lo que significa que *la velocidad más pequeña de rotación estable habría de corresponder á mil millones de vueltas por* $\frac{1}{100.000}$ *segundo.*

En cuanto al momento de inercia, se tendría :

$$I = \frac{h^2}{2\pi^2 h\nu} = \frac{h}{2\pi^2\nu} = \frac{6,2 \,.\, 10^{-27}}{2\pi^2\nu}$$

Si se substituye $\nu$ por $10^{-14} < \nu$, resulta :

$$I < \frac{6,2}{2\pi^2} \frac{10^{-27}}{10^{-14}}$$

ó bien :

$$I < \frac{1}{3} 10^{-41}. \qquad (1)$$

Supongamos que la masa $m$ de un átomo de argón, igual á 40 veces la masa $1,5 \,.\, 10^{-24}$ del átomo de hidrógeno, ocupa con densidad uniforme una esfera de diámetro $d$, su momento de inercia tendría por expresión :

$$I = \frac{md^2}{10} = \frac{4 \,.\, 1,5 \,.\, 10^{-24} d}{10} = 4 \,.\, 1,5 \,.\, 10^{-25} d^2.$$

Pero, según la desigualdad (1), tenemos :

$$4 \,.\, 1,5 \,.\, 10^{-25} d^2 < \frac{1}{3} 10^{-41}$$

de donde :

$$d^2 < \frac{10^{-41}}{3 \,.\, 4 \,.\, 1,5 \,.\, 10^{-25}} < \frac{10^{-16}}{12 \,.\, 1,5} = \frac{10^{-16}}{18}.$$

y por último:

$$d < 5,6 . 10^{-10}. \qquad (2)$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta lo que se designa por lo general con el nombre de *diámetro* de la molécula de argon, ó sea su radio de protección, igual á $2,8 . 10^{-8}$, vemos que la materia del átomo está condensada en un espacio de dimensiones al menos 50 veces más pequeñas, en el cual la densidad real, que varía en razón inversa del cubo de las dimensiones, resulta sin duda mucho mayor que la del agua multiplicada por 100.000.

Pero hemos supuesto la energía cinética molecular sólo menor que *la mitad* del *quantum* de rotación; si fuera por ejemplo igual á $\frac{1}{8}$ de dicho *quantum*, lo que sería aun una hipótesis muy moderada, se tendría un diámetro $d$ dos veces menor.

Jean Perrin saca la conclusión de que se puede muy razonablemente admitir que la materia de los átomos se halla condensada en un volumen al menos *un millón de veces menor* que el volumen aparente ocupado por ellos en un cuerpo sólido y frío. Eso equivale á decir que, si se examinara los átomos de un cuerpo sólido con una lente de aumento tal que sus centros aparezcan repartidos en el espacio como los de balas de 10 centímetros formando pilas, la materia de cada bala no ocuparía realmente sino una esfera de diámetro apenas igual á 1 milímetro.

Se podría también representar esta distribución mediante municiones finitas de plomo distante la una de la otra de 20 centímetros: pero, para el aire visto con el mismo aumento, la distancia entre estas dos municiones alcanzaría un valor promedio de 2 metros.

Sin embargo, podemos admitir que una pequeña parte de la masa del átomo permanece alejada del centro, pero es menester suponer siempre que la mayor parte está concentrada en una región muy próxima del mismo centro.

En resumen, resulta de estas consideraciones que la materia es mucho más discontinua de lo que se podía imaginar aun hace unos cuantos años.

En cuanto al radio de protección, distancia de los centros cuando se verifica un choque, define una distancia para la cual la substancia del átomo ejerce *una fuerza repulsiva enorme* sobre la de otro, conforme al resultado que ya hacía prever la teoría cinética.

Pero, para distancias menores, la repulsión puede tomar un valor

muy pequeño y hasta nulo. Por esto mismo, los proyectiles atómicos que forman los rayos de los cuerpos radioactivos, pueden atravesar *100.000 armaduras atómicas* antes de quedar detenidos.

En resumen, cada átomo se encuentra condensado en el centro de una armadura esférica delgadísima y relativamente muy grande, que le sirve de protección contra el acercamiento de los demás átomos, pero esta armadura se opone á la entrada y no á la salida de los proyectiles.

100. **Quantum de rotación de una molécula poliatómica.** — Mediante la misma hipótesis de las rotaciones inestables, Jean Perrin muestra también cómo podemos explicarnos el hecho de que una molécula deje de girar á las temperaturas muy bajas, aunque su momento de inercia resulte mucho mayor que el de un átomo aislado. Para ello basta que la energía de agitación molecular se vuelva pequeña con respecto al *quantum* de rotación $\frac{h^2}{2\pi^2 I}$ de la misma molécula. Ahora bien es evidente que este resultado se verificará tanto más pronto, cuanto menor sea el momento de inercia, y esto explica el hecho de que no se haya podido aun observarlo sino para las moléculas de hidrógeno.

Sea $d$ la distancia de los centros de dos átomos de este gas que forman una molécula $H_2$; las masas, como ya lo sabemos, están concentradas en estos puntos, y el momento de inercia I, con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad de la molécula y es perpendicular á la recta de los centros, tiene por expresión :

$$I = 2(1{,}4 \, . \, 10^{-24}) \frac{d^2}{2}, \qquad (1)$$

Alrededor de 30 grados absolutos, ó sea la temperatura á la cual, según Einstein, el calor específico resulta sensiblemente igual á 3, el quantum $\frac{h^2}{2\pi^2 I}$ será evidentemente mayor que el duplo de la energía de agitación molecular, igual, á la misma temperatura, á $\frac{1}{2} 10^{-14}$ más ó menos. Por consiguiente, la distancia $d$ de los centros será menor que $15 \, . \, 10^{-8}$, lo que determina un límite superior muy aceptable, si tenemos en cuenta el valor $2{,}2 \, . \, 10^{-8}$ que asigna la teoría cinética al *diámetro de choque* de la molécula de hidrógeno. En efecto, se tiene :

$$\frac{h^2}{2\pi^2 I} > 10^{-14}.$$

de donde:

$$I < \frac{h^2 . 10^{-14}}{2\pi^2}.$$

y si se substituye:

$$1.4 . 10^{-24} d^2 < \frac{h^2 10^{-14}}{2\pi^2};$$

teniendo en cuenta el valor de $h^2$:

$$h^2 = 6.2^2 . 10^{-54}.$$

resulta:

$$d^2 < \frac{h^2 . 10^{38}}{2 . 1,4\pi^2}$$

$$d^2 < \frac{6,2^2}{2,8\pi^2} \frac{10^{-54}}{10^{-38}}$$

$$d^2 < \frac{6,2^2}{2,8\pi^2} \cdot 10^{-16}$$

$$d < \frac{6,2}{\sqrt{2,8} . \pi} 10^{-8},$$

y como se tiene:

$$\frac{6,2}{\sqrt{2,8} . \pi} < 1,5$$

resulta por último:

$$d < 1,5 . 10^{-8}. \qquad (2)$$

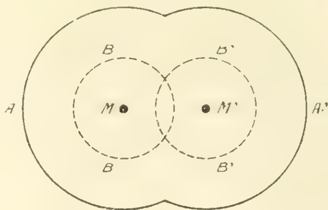
Se podría hacer el mismo cálculo con una precisión algo mayor si se conociera, por ejemplo á los 50 grados absolutos, la diferencia pequeña que existe entre el calor específico real y el valor igual á *tres calorías*.

Perrín lo efectuó y encontró que la velocidad de rotación máxima para la molécula de hidrógeno, *perpendicularmente* á la recta de los centros, correspondería á $5 . 10^{12}$ vueltas por segundo, lo que asignaría á la distancia $d$ el valor $10^{-8}$. Al contrario, si la rotación fuese *paralela* á la recta de los centros, la frecuencia mínima resultaría mucho mayor y del mismo orden de magnitud que para el

argón, por ser seguramente el momento de inercia con respecto al eje *d* sumamente pequeño.

**101. Distribución de la materia en una molécula.** — Se puede representar esquemáticamente una molécula de hidrógeno y tratar de expresar los resultados anteriores en la forma más probable; lo hizo Jean Perrin mediante la figura que reproducimos.

Casi toda la substancia de la molécula está condensada en los centros M, M' de los dos átomos. En torno de cada uno Perrin trazó las armaduras esféricas protectoras B, B' que se cortan, y cuyas partes exteriores forman la armadura AA' de la molécula, en la cual no puede penetrar el centro de ningún átomo, sino cuando su velocidad es mucho mayor que la velocidad de agitación molecular.




La envoltura BB' se considera como el contorno molecular de choque en la teoría cinética, y no puede nunca ser penetrada por la envoltura análoga $B_1B_1'$ de otra molécula. Si la distancia MM' $= d$ vale $10^{-8}$ centímetros, se ve que las dimensiones del contorno tienen más ó menos por valor medio $2 \cdot 10^{-8}$ centímetros, ya asignado por *diámetro de choque* á la molécula de hidrógeno, lo que representa una verificación indirecta de la teoría de los quanta de rotación.

Por otra parte, vemos cuán poco lugar ocupan los átomos en el edificio molecular. Perrin observa de cuanto interés sería conocer la distribución del campo de fuerza alrededor de cada uno, y especialmente tener una idea precisa de las uniones químicas ó valencias, lo que aun nos hace falta. Sin embargo, se puede comprobar la resistencia enorme de estas uniones mediante el raciocinio siguiente. Cuando alrededor de los 2000 grados el conjunto de la molécula de hidrógeno gira sin romperse perpendicularmente al eje *d*, ó sea en torno de un eje de rotación perpendicular á MM', con una frecuencia aproximadamente igual á cien millones de millones de vueltas, es menester que la valencia resista á la fuerza centrífuga enorme que está así engendrada. Una varilla metálica que ofrecería igual resistencia aguantaría sin romperse, por milímetro cuadrado de sección, un esfuerzo de 50.000 kilogramos por lo menos, lo que corresponde á un coeficiente mil veces mayor que el del fierro.

102. **Acción de la luz en la disociación de las moléculas.** — Perrin admite que la luz desempeña un papel de gran trascendencia en las reacciones químicas, y encuentra la prueba en una ley general muy conocida, aunque no se le haya asignado aun una interpretación molecular, ley muy asombrosa, que se puede considerar con mucha razón como el fundamento de la mecánica química, pues en todo equilibrio químico hemos de admitir siempre unas disociaciones moleculares. Según esta ley, la velocidad de disociación en la unidad de volumen, á temperatura constante, de un gas A por una reacción de la forma :



$$A \rightarrow A' + A'',$$

es proporcional á la concentración del gas A, y puede permanecer invariable si se añaden gases ajenos á la reacción.

De otro modo, para una masa dada del cuerpo A, la proporción transformada por segundo queda independiente de la dilución. Si la masa ocupa un volumen diez veces mayor, ó sea con una concentración diez veces menor, se transforma de ella por litro una porción diez veces menor, pero *el total transformado es igual.* Resulta, pues, que en contra de lo que se podía esperar, el número de los choques no tiene influencia ninguna sobre la velocidad de disociación. De N moléculas dadas del gas A, bastante concentrado ó mezclado con gases ajenos, ó sea con choques frecuentes ó escasos, el número de las que resultan rotas por segundo quedará siempre igual para una temperatura dada.

Con esto Jean Perrin opina en el sentido de que para una molécula determinada el valor probable del tiempo requerido para alcanzar, sólo con la acción de los choques, un estado de fragilidad definido, ha de ser tanto menor cuanto mayor es el número de los choques que sufre la molécula por segundo, y una vez alcanzado este estado, el valor probable del tiempo necesario para que la molécula experimente la clase de choques, que la rompería, ha de ser tanto menor cuanto más frecuentes resultan los choques. Por estos motivos si las roturas tuvieran por causas los choques, resultarían más frecuentes, y por lo tanto más rápida la disociación cuando estuviera creciendo la concentración del gas. Pero como no es así, hemos de concluír de allí que la disociacion no se debe á los choques, y podemos afirmar que *la probabilidad de rotura de una molécula no depende de los choques que ella experimenta.*

Sin embargo, no hay duda de que la velocidad de disociación de-

pende de la temperatura, y esto en una forma muy caracterizada. Estamos llevados así á recordarnos que la influencia de la temperatura se ejerce *por la radiación* tanto como por los choques moleculares, y de este modo podemos atribuír el origen de la disociación á la luz que llena, en régimen estacionario, el recinto isotermo en el cual se mueven las moléculas gaseosas consideradas.

Como conclusión Jean Perrin admite que sería preciso buscar en una acción de la luz sobre los átomos un mecanismo esencial de toda reacción química.

103. **Hipótesis de Brillouin explicativa de la radiación negra.** — H. Poincaré en una de sus últimas memorias emprendió, después de la Conferencia de Bruselas, el examen analítico de la teoría de la radiación negra y estudió la cuestión como tenía la costumbre de hacerlo con todos los problemas de física, ó sea de un punto de vista muy elevado y del todo independiente de cualquier teoría hipotética. No me propongo introducir aquí este análisis notable, pues así daría al presente trabajo una extensión que no correspondería á los límites que resolví asignarme, pero el lector encontrará un resumen del mismo en los *Comptes rendus* (*). Poincaré demostró allí en una forma indiscutible que la hipótesis paradógica de los quanta es una consecuencia necesaria de la experiencia, siempre que los resonadores que representan la materia emisora y absorbente sean *rigurosamente monocromáticos*. Desdichadamente el genio que sabía desenredar todas las dificultades en las teorías físicas nuevas se extinguió antes de poder dar al problema una solución definitiva.

Ahora bien, cuando Poincaré daba su parecer sobre un problema de física matemática, todos los sabios aceptaban su dictamen con la convicción de que no se podía encontrar otra solución mejor. En el caso particular la hipótesis del monocromatismo de los resonadores de Planck se imponía sin discusión después de la sentencia del gran geómetra, y resultaba más bien la condena de la teoría del físico prusiano. En efecto, ¿cómo admitir que estos resonadores gocen de una propiedad tan exclusiva? Sería una hipótesis de veras muy sencilla, que no está justificada, por otra parte, del punto de vista experimental.

El profesor en Sorbona, Maurice Brillouin, trató, pues, de estudiar las consecuencias que resultarían de su rechazo (**).

(*) *C. R.*, tomo 153, página 1106. 1912.

(**) *C. R.*, tomo 156, página 124. 13 de enero de 1913.

Consideremos un sistema formado por un electrón que se mueve en torno de una masa central con una energía mutua E $(r)$, á una distancia igual á $r$. Brillouin admite que el movimiento satisface á la ley de las áreas y al principio de la conservación de la energía. Sabemos que en esta forma el movimiento se verifica en un plano, teniéndose :

$$r^2\omega = 2A \tag{1}$$

$$r^2\omega^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}[E_0 - E(r)], \tag{2}$$

siendo $\omega$ la velocidad angular, A la constante de las áreas, $E_0$ la constante de la energía, y $m$ la masa del electrón.

Se deduce sucesivamente :

$$2A\omega + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}[E_0 - E(r)]$$

$$\omega = \frac{2A}{r^2}$$

de donde :

$$4A^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}[E_0 - E(r)]$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}[E_0 - E(r)] - \frac{4A^2}{r^2}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - E(r)] - \frac{4A^2}{r^2}}}.$$

Si integramos ahora entre $r_1$ y $r$ y suponemos que para $r = r_1$, se tiene $t = 0$, resulta :

$$t = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - E(r)] - \frac{4A^2}{r^2}}}. \tag{3}$$

Brillouin supone después que la energía es función de la distancia, de modo que la ecuación :

$$E_0 - E(r) - 2m\frac{A^2}{r^2} = 0$$

tenga dos raíces reales y positivas $r_1$ y $r_2$, con la condición :

$$r_1 < r_2,$$

cuando $E_0$ y A quedan comprendidas entre límites muy extensos, siendo real el radical en el intervalo, y teniendo la integral (3) un valor finito que permita escribir:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E_0 - E(r)] - \frac{4A^2}{r^2}}} = \frac{T}{2}, \tag{5}$$

resultando por otra parte muy legítimas estas varias hipótesis.

104. **Definición del movimiento.** — Si están verificadas, el movimiento toma la forma periódica, y el período T es función continua de las dos constantes $E_0$ y A, lo que permite escribir:

$$T = F(E_0, A). \tag{1}$$

Por otra parte, todas las cantidades ligadas con el movimiento: coordenadas, velocidades, aceleraciones, y las demás que son funciones de éstas, han de variar también periódicamente.

Por último, cada una de ellas se puede desarrollar en serie trigonométrica de Fourier con respecto al tiempo, y descomponerse así en una infinidad de términos de amplitudes y fases determinadas en función de $E_0$ y A, cuyos períodos;

$$T_1, T_2 \dots Tn$$

forman una sucesión *discontinua*.

Si se toma por origen de los tiempos la época á la cual la distancia resulta mínima é igual á $\rho_1$, se puede escribir:

$$\psi(\rho, E_0, A) = \frac{2}{m}[E_0 - E(\rho)] - 4\frac{A^2}{\rho^2} \tag{2}$$

y una función cualquiera de la forma $f(\rho)$ estará dada en función del tiempo mediante la serie de Fourier:

$$f(\rho) = \frac{2}{T}\int_{r_1}^{r_2} \frac{f_{(\rho)}d\rho}{\sqrt{\psi}} + \frac{4}{T}\sum_{1}^{\infty} \cos 2\pi \frac{nt}{T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{f_{(\rho)}d\rho}{\sqrt{\psi}} . \cos \frac{2n\pi}{T} \int_{r_1}^{r_1} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\psi}} . \tag{3}$$

Observaremos ahora que un mismo período $\tau$ no existe como armónico sino en los movimientos cuyos períodos fundamentales son:

$$\tau, 2\tau, 3\tau \ldots n\tau,$$

siendo $n$ entero y positivo. Por otra parte los resonadores con este período $\tau$ corresponden á energías totales $E_0$ y áreas A unidas por la relación :

$$F(E_0, A) = n\tau.$$

Luego, la energía total de los resonadores, en los cuales vuelve á aparecer el mismo período $\tau$, *forma una sucesión discontinua de área constante* A *que corresponde á los valores sucesivos del entero n.*

Evidentemente sucede lo mismo con la energía cinética parcial relativa al período $\tau$. La energía cinética total relativa al mismo período y debida al conjunto de los resonadores cuyo número es práticamente finito, estará representada por consiguiente, no por una integral, sino por una serie, lo que parece imprescindible para conseguir una fórmula del tipo de la de Planck.

Por otra parte, Brillouin observa que el método que consiste en conseguir todas las frecuencias mediante un tipo único de sistema vibrante, por la variación de la energía de oscilación, es más satisfactorio y parece acercarse más á la realidad que la hipótesis de una infinidad de resonadores monocromáticos, como lo exige la teoría de Planck.

La identidad de la radiación negra, originada por todos los cuerpos en un recinto reflector, resultaría, en el concepto de Brillouin, de la identidad de la ley de energía E ($r$) en función de la distancia, que no variaría, *sino en un factor,* de una distancia á otra. La ley de la radiación negra se encontraría ligada de este modo en una forma bastante directa con E ($r$) y podría servir para la determinación de esta función ; pero este resultado no se podría alcanzar sino considerando las relaciones de los resonadores con el éter.

105. **Relaciones entre el cuerpo vibrante y el éter.** — Brillouin empieza por admitir que, si los resonadores están encerrados en un recinto adiabático, ha de verificarse, en virtud de las reacciones del éter, un estado mediano permanente en el cual la energía media del éter por unidad de volumen es igual en todas partes (*).

Ahora bien, las propiedades del éter están definidas por ecuaciones de las derivadas parciales lineales, y Brillouin supone que la

(*) *C. R.*, tomo 156, 27 de enero de 1913, página 301.

fuerza eléctrica está también ligada por ecuaciones de igual forma, no sólo con el desplazamiento, sino con la velocidad, la aceleración, etc., del electrón resonador.

Resulta que todas estas cantidades se pueden expresar en función de $r$ y desarrollar en serie de vibraciones simples, como lo hicimos en el párrafo anterior. De este modo, la hipótesis de que las relaciones entre el éter y los resonadores son lineales basta para definir con precisión la repartición de la energía del éter entre las distintas longitudes de onda, siempre que el estado de cada resonador sea sensiblemente independiente de las reacciones del éter, lo que, según Brillouin, parece muy de acuerdo con el amortiguamiento sumamente pequeño de las fuentes luminosas.

Con esto, la fuerza eléctrica $\mathfrak{F}$ debida á uno de los resonadores (A. $E_0$) resulta:

$$\mathfrak{F} = \frac{2}{T}\mathfrak{F}_0 + \frac{4}{T}\sum_1^\infty K\frac{n}{T}F(A_1\,T_1\,n)\cos 2\pi\frac{nt}{T}. \tag{1}$$

siendo $\mathfrak{F}_0$ y F ($A_1$ $T_1$ $n$) integrales entre $r_1$ y $r_2$ análogas á las que figuran en el párrafo anterior, y K un factor de radiación cuya complicación, más ó menos grande, depende del número de las derivadas de la fuerza eléctrica y del desplazamiento del electrón dado por la ecuación de unión entre el resonador y el éter.

Si ahora en el recinto adiabático hay un gran número de resonadores idénticos, ó sea que tengan iguales características A y $T_1$ el valor del *campo en el éter* en estado permanente será independiente del número de los resonadores y del volumen finito del recinto, y quedará definido por la relacion (1).

Por otra parte, y menos en factor constante, la energía por unidad de volumen, ó sea la densidad de la energía para el período $\frac{T}{n}$, tiene por expresión:

$$\frac{1}{T^2}\left[K\frac{n}{T}F(A_1\,T_1\,n)\right].$$

ó bien, si se expresa en función de la frecuencia $\nu$:

$$U\left(\frac{n}{\nu}\cdot A, n\right) = \left[K(\nu)F\left(A, \frac{n}{\nu}, n\right)\right]^2\frac{\nu^2}{n^2}. \tag{2}$$

Si todos los resonadores no vibran en igual forma, hay algunos que

dan la misma frecuencia $\nu$ para distintos valores enteros de $n$: cualquiera sea la pequeñez de la extensión de variación de T, si está limitada, hemos de encontrar, á partir de una frecuencia $\nu$ suficiente, dos resonadores que den igual frecuencia, y después tres, y así sucesivamente, creciendo con $\nu$ el número de los términos. Pero, precisamente en razón de la hipótesis hecha sobre la constitución del resonador, la energía ha de decrecer muy rápidamente cuando aumenta $n$, ó sea el número de orden de la vibración.

Para una frecuencia dada $\nu$, la densidad de energía U que estaría en equilibrio con el resonador depende de A y $n$. En estas condiciones, la densidad media no puede estar en equilibrio á la vez con todos los resonadores. Brillouin admite, sin mayor explicación al respecto, que las reacciones mutuas por el intermedio del éter no tienden á devolver á los resonadores un estado vibratorio idéntico, ó sea de valores iguales para A y T sin tener en cuenta la fase, sino una distribución permanente de A y T alrededor de valores medios.

Sea pues :

$$P(A, T)dT.dA$$

la probabilidad que defina aquella distribución ; un resonador en equilibrio con la densidad de energía :

$$U\left(\frac{n}{\nu}\cdot A, n\right)$$

distinta de la densidad media reinante $V(\nu)$, cede al éter por unidad de tiempo una cantidad de energía función de V y U, y proporcional, al menos para variaciones pequeñas, á la diferencia :

$$V - U,$$

la cual puede ser positiva ó negativa.

Sea Q (U, V) esta cantidad ; las condiciones de estado permanente resultan entonces de definición fácil para el éter, pues están contenidas en la relación :

$$\sum_{1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(A, \frac{n}{\nu}\right)\frac{n}{\nu^2} dA . Q(U, V) = 0. \qquad (3)$$

Pero si Q tiene por valor :

$$C(U - V).$$

ó sea si Q es función de la diferencia (U — V), como se admite generalmente, se tiene :

$$\mathrm{V}\sum_{1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{A},\frac{n}{\nu}\right)\frac{n}{\nu^2}d\mathrm{A}=\sum_{1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{A},\frac{n}{\nu}\right)\mathrm{U}\left(\frac{n}{\nu}\cdot\mathrm{A},n\right)d\mathrm{A}. \quad (4)$$

y, si todos los períodos T, desde 0 hasta $\infty$, intervienen en la probabilidad P, las sumas $\Sigma$ han de extenderse á todos los valores enteros y positivos de $n$.

Veamos ahora con Brillouin el carácter de esta última relación que determina la ley de la fuerza central —E'($r$)) del resonador, cuando se conoce la ley de distribución espectral de la energía en el éter V($r$).

Supongamos por ejemplo que esta ley sea la de Planck, considerada como un resultado experimental. La relación (4) es una ecuación integral del tipo trascendente, cuya resolución se presenta en condiciones bastante difíciles. El término de rango $n$ de la serie es :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{A},\frac{n}{\nu}\right)\left[\mathrm{K}(\nu)\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{F}_{(\rho)}d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\mathrm{E}_0-\frac{2}{m}\mathrm{E}_{(\rho)}-\frac{4\mathrm{A}^2}{\rho^2}}}\cdot\cos 2\pi\nu\int_{r_1}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\mathrm{E}_0-\frac{2}{m}\mathrm{E}_{(\rho)}-\frac{4\mathrm{A}^2}{\rho^2}}}\right]^2\frac{d\mathrm{A}}{n} \quad (5)$$

siendo ligadas $\mathrm{E}_0$ y A por la condición :

$$\int_{r_1}^{r}\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\mathrm{E}_0-\frac{2}{m}\mathrm{E}_{(\rho)}-\frac{4\mathrm{A}^2}{\rho^2}}}=\frac{n}{\nu} \quad (6)$$

Ahora bien, sería muy difícil sacar una deducción precisa de tal ecuación, y parece imposible afirmar su incompatibilidad con toda distribución permanente P entre los resonadores. Sin embargo, esta sería la demostración imprescindible para llegar á la conclusión de que la teoría de la radiación negra nos lleva necesariamente á la hipótesis de los quanta de Planck.

En resumen, Brillouin hace esfuerzos, mediante la introducción de varias hipótesis sucesivas más ó menos aceptables, para definir analíticamente una condición que resultaría la *piedra de toque* matemá-

tica de la teoría de los quanta. No podemos negar el fundamento de su conclusión, pero parece sin interés en razón de las dificultades casi invencibles á las cuales da origen. Su trabajo llama la atención desde el punto de vista analítico, pero en el estado actual de las cosas, no se puede decir de él que ofrece un interés verdaderamente práctico.

**106. La hipótesis de la aglomeración progresiva de los átomos basta para llevarnos á la ley de Planck.** — En una nota presentada á la Academia de ciencias de París por Le Chatelier (*), Carl Benedicks desarrolló una idea ingeniosa, de interés mucho mayor que el ofrecido por el concepto de Brillouin, pues tiende á demostrar que la hipótesis de los quanta no es la única que nos lleva á la ley de Planck.

Esta prueba sería en efecto de gran importancia, pues sabemos cuántas dificultades de todas clases engendra la hipótesis de los quanta de energía, y, para muchos hombres de ciencia resultaría un verdadero alivio la posibilidad de substituírla por otra de aspecto menos paradójico.

Desde 1893 Richarz, y después Duclaux, se han preocupado de la cuestión de saber si variaciones moleculares no llegaran á explicar las del calor atómico de los sólidos. Ahora bien, Benedicks se propone mostrar que la hipótesis de la aglomeración progresiva de los átomos en los sólidos á temperatura absoluta T decreciente, con la condición de que para el límite $T = 0$, la libertad de agitación térmica tienda á anularse, puede llevarnos á la ley de Planck, base de la teoría moderna del calor atómico.

Este físico se vale intencionalmente de la palabra *aglomeración* en vez de polimerización, asociación, etc., para poner en evidencia que no es necesario hacer intervenir las fuerzas químicas.

Consideremos, pues, una molécula de un sólido cristalizado; su energía W, á la temperatura absoluta limite 0, será designada por el punto $A_0$. Si todos sus átomos estuviesen aun libres, W iría aumentando con T en la forma lineal:

$$W = 3RT$$

y, por consiguiente, daría una recta $A_0B_0$.

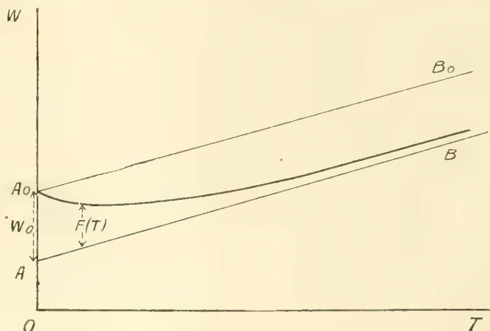
Si al contrario los átomos son supuestos aglomerados, W crecerá mucho más despacio, y se tendrá:

(*) *C. R.*, tomo 156, página 1526, 19 de mayo 1913.

$$\frac{dW}{dT} = 0$$

para $T = 0$.

No habrá, pues, absorción de energía térmica sino á medida que los átomos se hayan separado, y esta separación quedará completa para temperaturas suficientemente elevadas. De este modo W seguirá una curva $A_0B$, y para los valores grandes de T, se tendrá:




$$W = 3RT - W_0,$$

siendo $W_0$ la energía $A_0A$, desconocida pero constante.

Una expresión exacta á todas las temperaturas se puede obtener mediante la relación:

$$W = 3RT - W_0 + F(T) \tag{1}$$

siendo F(T) una función que designa la energía correspondiente á la aglomeración, y ya vemos que todo el problema se reduce á encontrar la forma de esta función.

Ahora bien, hay dos factores cuya influencia sobre F(T) tiene que ser preponderante: 1° la *cohesión* que, en los cristales, es de naturaleza vectorial y tiene la tendencia de acercar y orientar los átomos: 2° la *agitación térmica* qué tiende al contrario á separar y desorientar los átomos aglomerados.

El problema, según Benedicks, está ligado en una forma indiscutible con el caso calculado por Langevin (*) de un gas paramagnético en un campo magnético de orientación.

Si admitimos que la energía de aglomeración obedece á la ley de Langevin llegamos á la fórmula:

$$F(T) = W_0 \left( \mathrm{Cth} \frac{W_1}{3RT} - \frac{3RT}{W_1} \right). \tag{2}$$

siendo $W_1$ una constante *individual*.

Por otra parte, de la relación (1) se saca:

(*) *Annales de chimie et de physique*, tomo V, página 70, 1905.

$$W = 3RT - W_0 + W_0 \operatorname{Cth} \frac{W_1}{3RT} - 3RT \frac{W_0}{W_1}, \tag{3}$$

y si suponemos :

$$W_1 = W_0,$$

se verifica una simplificación importante que da :

$$W = W_0 \left( \operatorname{Cth} \frac{W_0}{2RT} - 1 \right). \tag{4}$$

Pero tenemos para la cotangente hiperbólica :

$$\operatorname{Cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

de donde :

$$\operatorname{Cth} \frac{W_0}{3RT} = \frac{e^{\frac{W_0}{3RT}} + e^{-\frac{W_0}{3RT}}}{e^{\frac{W_0}{3RT}} - e^{-\frac{W_0}{3RT}}}$$

$$\operatorname{Cth} \frac{W_0}{3RT} - 1 = \frac{e^{\frac{W_0}{3RT}} + e^{\frac{W_0}{3RT}} - e^{\frac{W_0}{3RT}} + e^{-\frac{W_0}{3RT}}}{e^{\frac{W_0}{3RT}} - e^{-\frac{W_0}{3RT}}} = \frac{2e^{-\frac{W_0}{3RT}}}{e^{\frac{W_0}{3RT}} - e^{-\frac{W_0}{3RT}}}$$

$$\operatorname{Cth} \frac{W_0}{3RT} - 1 = 2 \frac{1}{\dfrac{e^{\frac{W_0}{3RT}}}{e^{-\frac{W_0}{3RT}}} - 1} = \frac{2}{e^{\frac{2W_0}{3RT}} - 1}$$

lo que da para W, según la expresión (4) :

$$W = \frac{2W_0}{e^{\frac{2W_0}{3RT}} - 1} = 3R \frac{\dfrac{2W_0}{3R}}{e^{\frac{2W_0}{3RT}} - 1} \tag{5}$$

y si ponemos :

$$\frac{2W_0}{3R} = \alpha,$$

$$W = 3R \frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha}{T}} - 1}. \tag{6}$$

Observemos que esta última expresión de la energía es idéntica á *la de la ley de Planck,* al menos en cuanto á la forma y al aspecto general.

Pero es lógico admitir que la función F (T), que mide la aglomeración, es proporcional á la cohesión H é inversamente proporcional al peso atómico A. En efecto, cuanto mayor resulta la atracción y cuanto menor la masa, tanto menor ha de ser la probabilidad para que la agitación térmica engendre la separación de un átomo. Con esto se puede escribir :

$$F(T) = B\frac{H}{A},$$

siendo B un coeficiente de proporcionalidad.

Ahora bien, si desarrollamos en serie F (T) en la forma (2) :

$$F(T) = W_0\left(\mathrm{Cth}\frac{W_1}{3RT} - \frac{3RT}{W_1}\right),$$

obtendremos con primera aproximación :

$$F(T) = \frac{W_0^2}{9RT},$$

y si ponemos :

$$9RTB = c^2$$

se tendrá :

$$\frac{W_0^2}{9RT} = B\frac{H}{A},$$

de donde :

$$W_0^2 = c^2\frac{H}{A}$$

$$W_0 = c\sqrt{\frac{H}{A}}. \qquad (7)$$

Vemos que esta expresión resulta inesperadamente del todo análoga á la fórmula conocida que da el número de oscilaciones $\nu$ por segundo :

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{A}}, \qquad (8)$$

siendo K una fuerza de dirección, y, por ser muy probable que la cohesión H es proporcional precisamente á una fuerza de dirección, podemos escribir :

$$W_0 = h\nu \tag{9}$$

siendo $h$ una constante universal.

Se deduce de allí que $W_0$ se puede expresar mediante un número $\nu$ de oscilaciones.

Por último, si ponemos por abreviación:

$$\frac{2h}{3R} = \beta.$$

tendremos para la relación

$$W = 3R \frac{\frac{2W_0}{3R}}{e^{\frac{2W_0}{3RT}} - 1}:$$

$$W = 3R \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} \tag{10}$$

fórmula idéntica á la que expresa la ley de Planck, obtenida, como se ve, sin recurrir en lo más mínimo á la hipótesis de los quanta.

Benedicks confiesa que las consideraciones anteriores no han de ser admitidas como definitivas, pero no dejan de mostrar que la hipótesis de los quanta no es la única que lleve á la ley de Planck, en contra de lo admitido por algunos.

De esto resultaría que, para poder seguir admitiendo la hipótesis de los quanta en pugna con la mecánica, sería imprescindible demostrar que es absurdo admitir la existencia de una aglomeración, ó bien que tal aglomeración, una vez admitida, no ha de obedecer á la ley de Langevin.

107. **Resumen y conclusión.** — Como lo observamos en la introducción, lo que amenazan las nuevas hipótesis y teorías, no consiste sólo en los principios fundamentales de la mecánica, sino también en otro más general que antes considerábamos como una consecuencia imprescindible de la misma noción de ley natural; me refiero á la duda acerca de la cuestión de saber si vamos á poder aun expresar las leyes físicas mediante ecuaciones diferenciales.

Por otra parte, no podemos aceptar sin asombro que una teoría se funde, ora en los principios de la mecánica antigua, ora en las nuevas

hipótesis cuyo efecto es derrumbarlos. Como lo observó Poincaré, con tanta razón, en la Conferencia de Bruselas, no hay ninguna proposición tan paradógica como pueda ser, que sea imposible demostrar, siempre que en la demostración introduzcamos dos premisas contradictorias.

Sin embargo, es innegable, por otra parte, que en adelante se impone a nuestros conceptos físicos y químicos una discontinuidad, un elemento que tenga la propiedad de variar por saltos, y del cual no teníamos la menor idea unos años antes. Pero lo que hemos de determinar es la forma en la cual es menester introducirlo. ¿Será la primera forma debida á Planck, sin tener en cuenta las dificultades enormes que resultan? ¿Será, al contrario, el concepto de Benedicks ó bien la segunda forma enunciada por Planck ó la adoptada por Sommerfeld? Observaremos que cada una de estas formas responde muy bien á ciertos grupos de fenómenos y mucho menos á los demás. Por último, ¿tenemos el derecho de osar más todavía y nos resolveremos á trastornar los mismos fundamentos del electromagnetismo y de la mecánica, en vez de limitarnos á hacer todo lo posible para conciliar con ellos aquella nueva discontinuidad? Se comprende nuestras vacilaciones ante la realización de una revolución completa, si se tiene en cuenta el número enorme de fenómenos cuyo orden y concordancia hemos conquistado en una forma tan satisfactoria mediante los antiguos principios.

Sin embargo, en presencia de tantas cuestiones y puntos interrogantes de suma importancia, no hemos de olvidar que, á pesar de las dificultades que aparecen á cada paso, el concepto feliz de Planck nos facilitó ya el descubrimiento de relaciones imprevistas entre los hechos observados, como por ejemplo, la entre los calores específicos y los períodos ópticos, y este progreso importante, no hemos de negarlo, lo debemos á la teoría de los quanta, aunque en su forma actual presente un carácter de poca precisión. Por otra parte, las verdaderas teorías se recomiendan por la fecundidad y la previsión y no podemos negar estas cualidades á la nueva teoría.

Pero en estas condiciones, ¿cómo el principio de discontinuidad, completamente opuesto á los mismos fundamentos de toda la filosofía natural, puede servir de base á una teoría que se revela fecunda y, del punto de vista de la previsión, es comparable con las hipótesis de mayor aceptación y seriedad, hoy consideradas como del todo indiscutibles?

En la Conferencia de Bruselas Nernst emitió al respecto la idea

bastante acertada de que tal vez lleguemos un día á substituír el procedimiento de cálculo debido á la teoría de los quanta por un concepto diferente que nos permitirá volver á la noción de los cambios de energía por vía continua en las oscilaciones atómicas, por ejemplo, mediante la introducción en la mecánica clásica de cambios análogos á los ya introducidos en ella por la teoría de Lorentz. Del mismo modo que, con el electrón, la idea de masa se modifica y se borra el principio de reacción cuando alcanzamos velocidades irrealizables en la mecánica común, se podría tal vez hacer experimentar á ésta otras modificaciones para los casos extremos que se verifican en los movimientos atómicos relacionados con frecuencias de millares de millones de vueltas por segundo.

Ahora bien, los átomos parecen ofrecer resistencias enormes á todos los movimientos cuyas trayectorias son de grande curvatura y pequeñas velocidades, y quizás se podría admitir que la forma de la fuerza centrífuga cambia cuando se trata de aquellos movimientos. Poincaré, por otra parte, era del mismo parecer y afirmaba que, antes de aceptar estas discontinuidades intolerables que nos imponen la obligación de rechazar la expresión acostumbrada de las leyes naturales en forma de ecuaciones diferenciales, sería menester explorar el camino indicado por Nernst. Esto equivaldría en resumen á suponer que la masa, en vez de ser constante ó de depender únicamente de la velocidad, como en la teoría de Lorentz, depende también de la aceleración, cuando ésta toma valores suficientemente grandes.

Sin embargo, sorprendido por la muerte, el gran geómetra no tuvo tiempo suficiente para obtener un resultado en la dirección ya indicada. Las tentativas hechas por él lo llevaron a la conclusión de que la hipótesis de los *quanta* parece la única que permita deducir la ley experimental de la radiación, cuando se admite la fórmula generalmente aceptada para la relación entre la energía de los resonadores y la del éter, y se supone además que cambios de energía se pueden verificar entre los resonadores mediante el choque mecánico de los átomos ó de los electrones (*).

(*) Creo que resultará interesante para mis lectores una nota comunicada por J. de Boissoudy á la Academia de ciencias de París el 3 de marzo de 1913 (*C. R.*, t. 156, p. 765), y relativa á la conclusión de Poincaré, en la cual, después de haber mostrado que la hipótesis de los quanta es la única que puede llevar á la ley de Planck, el gran geómetra añadía que, cada vez que la ley de la radiación tiene por consecuencia una energía finita para la radiación total, es imprescindible que la función W *ofrezca al menos una discontinuidad para* $z = 0$, si el producto

Sobra decir hasta qué punto hemos de lamentar la desaparición del ilustre sabio, precisamente cuando su genio podía ser de utilidad tan valiosa para la ciencia rodeada entonces de grandes dificultades, pues el genio de Poincaré ya la había salvado más de una vez, y qui-

$W d\eta$ expresa la probabilidad para que la energía de un resonador quede comprendida entre $\eta$ y $(\eta + d\eta)$.

Boissoudy trata de determinar la forma que tomaría la ley de la radiación negra, si prescindiendo de la hipótesis de Planck, se admitiese que aquella discontinuidad se reduce á su valor mínimo, ó que no existe sino para el paso de una energía nula á una energía finita.

El caso se puede definir mediante la hipótesis siguiente : la energía de un resonador, en vez de ser un múltiplo entero del elemento de energía $h\nu$, está sujetada sencillamente á permanecer nula ó mayor que $h\nu$, su valor cambiando bruscamente de cero á un valor finito igual á $h\nu$, de modo que, para un valor mayor que $h\nu$, el resonador actúe en la forma común, perdiendo ó adquiriendo energía según un proceso continuo.

Consideramos un cuerpo ponderable que contiene $n$ resonadores de frecuencia $\nu$ á la temperatura T. El número de los cuya energía de vibración está comprendida entre $\eta$ y $(\eta + d\eta)$, si suponemos la función W continua para $\eta$, tendrá por expresión :

$$n W d\eta = \frac{nN}{RT} e^{-\frac{N\eta}{RT}} d\eta.$$

y como no pueden entrar en vibración, según la hipótesis, sino cuando $\eta$ es mayor que $h\nu$, la energía total que les corresponde resultará :

$$\frac{nN}{RT} \int_{h\nu}^{\infty} e^{-\frac{N\eta}{RT}} \eta \, d\eta = \frac{nRT}{N} e^{-\frac{Nh\nu}{TR}} \left(1 + \frac{Nh\nu}{RT}\right),$$

lo que da para la energía media de un resonador :

$$E = \frac{RT}{N} \frac{1 + \frac{Nh\nu}{RT}}{e^{\frac{Nh\nu}{RT}}}$$

expresión que podemos escribir :

$$E = \frac{RT}{N} \frac{1 + x}{e^{x}}. \qquad (1)$$

Ahora bien, es fácil comparar esta fórmula con la de Planck :

$$E_1 + \frac{RT}{N} \frac{x}{e^{x} - 1}. \qquad (2)$$

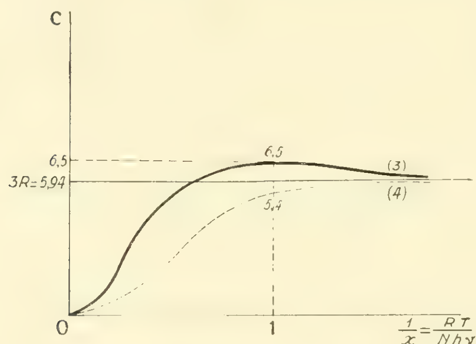
Como ésta, la primera tiende hacia los límites $\frac{RT}{N}$ ó $\frac{2}{3}\alpha T$ para pequeños valores de $x$, ó sea para temperaturas altas ó vibraciones de frecuencia pequeña, y hacia

zá podía sacarnos de los peligros que nos amenazan aún, tres años después de su muerte.

En efecto, confesaremos que, desde aquella fecha fatal, muy pocos trabajos se hicieron acerca de esta región misteriosa que sigue siem-

$\frac{RT}{N}\frac{x}{e^x} \quad \frac{h\nu}{e^{\frac{Nh\nu}{RT}}}$, para valores grandes de la misma $x$, ó sea en el caso de bajas temperaturas ó longitudes de ondas pequeñas. Para las temperaturas ó longitudes de onda comunes, las dos fórmulas resultan prácticamente equivalentes, pues la diferencia $\frac{E - E_1}{E_1}$ no alcanzaá 2 por ciento á la temperatura normal, para una longitud de onda igual á $1\mu$, y *a priori* para longitudes menores.

Por otra parte, Einstein ha sacado de la fórmula de Planck la ley de los calores específicos de los cuerpos sólidos. Para ello supone que la energía de un sólido se reduce á la energía de vibración de sus átomos, la de los electrones negativos que engendran los períodos ultravioletas resultando despreciable. Además admite que dichos átomos emiten una vibración de período constante ó propio, teniendo su energía media un valor igual á 3E, en razón de los tres grados de libertad. Con esto, el calor atómico de un cuerpo sólido tiene por expresión :




$$c = 3N\frac{dE}{dT},$$

y esta expresión toma la forma :

$$c = 3R\frac{x^2 + x + 1}{e^x} \qquad (3)$$

o

$$c_1 = 3R\frac{x^2e^x}{(e^x - 1)^2} \qquad (4)$$

según que se adopte la relación (1) ó la (2).

La curva que corresponde á la ecuación (3) tiene la forma dada por la figura, siendo $c$ expresada en función $\frac{1}{x}$ y presenta un máximo para $x = 1$, lo que corresponde á una frecuencia propia del orden de $6 . 10^{12}$, cuando el máximo se verifica alrededor de la temperatura normal, conforme á la ecuación :

$$\frac{dc}{d\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^4}e^x},$$

y el valor de este máximo es :

pre rodeada del mismo misterio. Pero, como no debemos desesperar nunca, vivamos con la esperanza de que todo se podrá arreglar, encontrándose por fin, detrás del discontinuo aparente que hasta ahora nos parece irreductible, este continuo amado y familiar al cual no podríamos renunciar sin mucho pesar.

Como lo dijo Poincaré, al terminar su artículo sobre la hipótesis de los quanta (*): « el primero que vió un choque se figuró observar un fenómeno discontinuo, y sin embargo sabemos que no vió sino el efecto de cambios de velocidades rapidísimos, pero continuos. »

Hagamos votos para que así sea, esperando que la ciencia salga incólume de esta nueva convulsión, y tan airosa como de las revoluciones anteriores que parecían ponerla también en serio peligro.

$$c \quad .3R \, . \frac{3}{e} = 5,94 \, . \, 1,10 = 6,5.$$

ó sea igual al valor atómico entre 15° y 100° para muchos cuerpos, y la coincidencia de dicho valor con la constante de Dulong y Petit no podemos considerarla como debida á un azar providencial.

En cuanto á la fórmula (4) de Einstein, que corresponde en la figura á la curva punteada, vemos que presenta también un máximo, pero bastante menor (3R = 5,94) y no realizable teóricamente sino para un valor de $\frac{1}{x}$ ó T igual al infinito.

Sin embargo no podemos esperar que la relación (3), ó cualquier fórmula teórica distinta, nos de cuenta rigurosamente de la variaciones del calor atómico en toda la extensión del estado sólido.

La hipótesis de Einstein que le sirve de base suprime en efecto un factor importante cuya influencia es indiscutible sobre el calor específico de los sólidos, ó sea la energía requerida para la rotura de las uniones que tienden á formarse entre los átomos, á medida que la temperatura absoluta se acerca al límite cero, y por lo tanto aquella hipótesis no es aplicable sino á un campo de temperaturas relativamente reducido. Se puede decir que caracteriza un estado sólido ideal, que se verifica parcialmente alrededor de la temperatura común para muchos cuerpos y corresponde sin duda á un máximo de equilibrio entre sus elementos constitutivos.

(*) *L'hypothèse des quanta. Dernières pensées*, página 192.

# APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Por el ingeniero DEMETRIO CRININ

*(Conclusión)*

---

Sobre una línea de influencia dada los valores $\xi$ y X se obtienen en seguida sobre el dibujo; basta entonces para un sistema de cargas calcular $r_1$ y $r_2$ para poder usar la ecuación (45) y determinar por medio de ella la abscisa de la resultante de la manera siguiente:

$$(\xi - x_0 - r_1)^2 + (r_1 r_2 - r_1^2) = (X - \xi)^2, \qquad (46)$$

cuya ecuación podría representarse así:

$$[\xi - (x_0 + r_1)]^2 + \left(\sqrt{r_1 r_1 - r_1^2}\right)^2 = (X - \xi)^2 \ldots \qquad (47)$$

es decir, en forma de ecuación de un círculo cuyo diámetro $X - \xi$ es la distancia entre la ordenada mayor y la correspondiente al punto de

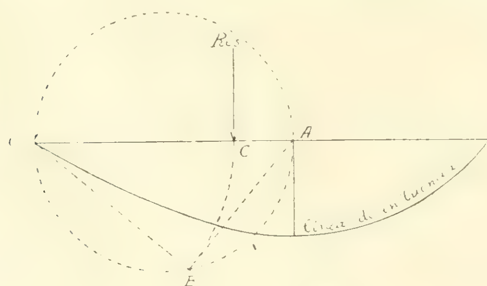



Fig. 3

inflexión. La posición de la resultante, ó sea el valor de $\xi - (x_0 + r_1)$, puede determinarse gráficamente por medio de una sencilla construcción.

Si, como ocurre en varios casos, $\xi = 0$ la ecuación (47) se simplifica:

$$(x+r_1)^2+(r_1 r_2-r_1^2)=X^2 \dots \qquad (48)$$

El trazado gráfico para determinar de acuerdo con esta fórmula la abscisa de la resultante, está representado en la figura 3.

## § 5. *Ejemplos*

*a) Determinar la posición de un tren sobre un viaducto de cemento armado en forma de cuadro rígido con dos articulaciones, para que se produzca el empuje horizontal máximo.*

La expresión general de este empuje es:

$$H=\frac{\int M_0 . y . v . ds}{\int y^2 . v . ds} \dots \qquad (49)$$

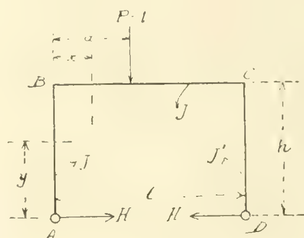


Fig. 4

debiendo calcularse los integrales separadamente para cada elemento del cuadro AB, BC, CD (fig. 4). Notemos desde ya que el denominador de la fracción (49) no depende del movimiento de la carga $p=1$ por el tramo y en consecuencia no influye sobre el carácter de la línea de influencia buscada, cuya ecuación podría representarse poniendo:

$$H_0=H . \int y^2 . v . ds \dots \qquad (50)$$

en la forma de (51):

$$H_0=\int M_0 . y . v . ds \dots \qquad (51)$$

La magnitud $M_0$ corresponde al momento flector, en cada de los tres elementos AB, BC, CD considerados por separado y como estáticamente determinados. Este momento $M_0$ y por consiguiente todo el integral $\int M_0 . y . v . ds$ son nulos para ambos montantes AB y CD. En lo que se refiere á la viga libremente apoyada BC los momentos serían: para $a>x>0$

$$M_0=(l-a) . \frac{x}{l} \dots \qquad (52)$$

para $l>x>a$

$$M_0=\frac{a}{l}(l-x) \dots \qquad (53)$$

Luego para el elemento BC el valor $v$ (relación entre el momento de inercia J de este elemento y de un momento de inercia $J_0$ arbitrario que se considera como unidad de comparación), es igual á 1, puesto que podemos admitir $J=J_0$. Quiere decir que el valor $v$ siendo constante no influye sobre el carácter de la ecuación buscada.

Considerando que para BC $y=h$ y $ds=dx$ se puede escribir:

$$H_0=h\left[\int_0^a \frac{l-a}{l}.x.dx+\int_a^l \frac{a}{l}(l-x)dx\right]=a.\left(\frac{hl}{2}\right)-a^2\left(\frac{h}{2}\right)... \quad (54)$$

siendo la (54) ecuación de una parábola.

Su ordenada mayor se determina por la condición:

$$\frac{dH_0}{da}=0... \quad (55)$$

ó sea:

$$\frac{hl}{2}-2a.\frac{h}{2}=0... \quad (56)$$

$$a=\frac{l}{2}... \quad (57)$$

Las ecuaciones (54) y (57) demuestran que *para que se produzca el empuje horizontal máximo la resultante del peso del tren debe coincidir con el eje del puente.*

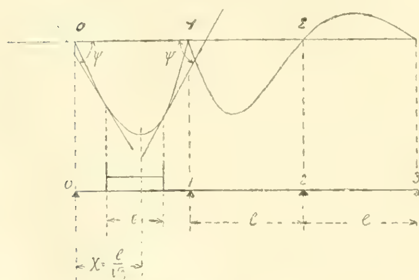


Fig. 5

*b) Determinar la posición de un rodillo correspondiente al momento negativo máximo en el apoyo 1 de una vigueta transversal de tres tramos de l metros.* La distancia entre los ejes de las ruedas del rodillo es $b$ metros: las cargas se consideran como concentradas (fig. 5).

Trazando la línea de influencia por las tablas de Griot (1) se puede concluir por su forma que ambas ruedas del rodillo deben encontrarse en el tramo izquierdo de la viga dónde $\xi=0$; $X=0,58l\left(=\frac{l}{\sqrt{3}}\right)$. Después

(1) GRIOT, *Kontinuirliche Träger. Interpolierbare Tabellen der Einflusslinien.* Zurich. 1904.

de calcular las magnitudes $r_1=\frac{b}{2}$; $r_2=b$; $\sqrt{r_1 r_2 - r_1^2}=\frac{b}{2}$ podemos determinar la abscisa del eje del rodillo $x+r_1$ sea analíticamente:

$$x+r_1=\sqrt{\frac{l^2}{3}-\frac{b^2}{4}},$$

sea gráficamente por la figura 3.

En este caso $OA=0{,}58l$; $AB=\frac{b}{2}$ y $OC=x+r_1$.

No se debe olvidar que nuestras fórmulas han sido establecidas en la suposición de que ninguna carga sale del tramo.

El problema propuesto podría haberse resuelto también en base á la fórmula (25).

## CAPÍTULO II

### APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE TAYLOR AL CÁLCULO DE DISTRIBUCIÓN DE TIERRA EN UN PERFIL LONGITUDINAL

#### § 1. *Procedimiento de Brückner* (1)

La construcción de una vía de comunicación ó de una obra de irrigación ó desagüe (ferrocarril, camino, canal) supone la modificación de la superficie terrestre por desmontes ó excavaciones y terraplenes pudiendo estos construírse sea de los préstamos laterales, sea con transporte de tierra de los desmontes adyacentes. La elección de uno ú otro modo de trabajo, depende de la relación de los precios del desplazamiento longitudinal de la tierra y de su movimiento desde los préstamos. Para solucionar el problema en cada caso concreto, existe el procedimiento de trazar la llamada curva de masas ó perfil de masas, perteneciente al ingeniero Brückner.

La figura 6 representa el perfil longitudinal de una vía con serie de terraplenes y excavaciones. Considerando los volúmenes de éstas co-

(1) E. Henry, *Théorie et pratique du mouvement des terres d'après le procédé Brückner;* M. Foester, *Taschenbuch für Bauingenieure,* pág. 1219, 1911; A. Goering, *Massenermittelung, Massenverteilung und Transportkosten,* 3ª edición, pág. 10.

mo positivos y los de aquéllos como negativos, tracemos en cierta escala en cada punto de la línea horizontal A′B′ ordenadas iguales á la suma algébrica de todos los volúmenes de movimientos de tierra desde el punto inicial A de la vía. El lugar geométrico de las extremidades de estas ordenadas, ó sea la curva de las masas, posee las siguientes propiedades :

1° Á las ordenadas nulas del perfil longitudinal corresponden las ordenadas máximas ó mínimas del de las masas :

2° Cada par de puntos de intersección de una línea horizontal con

Fig. 6

el perfil de las masas (por ej. R″ y S″) corresponde á los puntos inicial y final de un cierto movimiento de tierra con transporte (entre R y S) ; el volumen transportado está representado por la ordenada mayor C′C. del segmento R″S″C′ cuya área M es el momento de transporte, es decir, el producto del volumen transportado CC′ = V por la distancia media del transporte L :

$$M = V . L ... \qquad (58)$$

y viceversa : la distancia media de transporte de un volumen CC′ = V se obtiene dividiendo por él, el área del segmento correspondiente R″S″C′ del perfil de masas.

En vista de lo expuesto cada línea horizontal intersectando el perfil de las masas, representa una solución del problema, siendo línea de distribución de tierra. Para elegir de la infinidad de estas líneas la que corresponde á la solución más económica, se usa el siguiente ra-

zonamiento. Sea A″B″ la línea de distribución de tierra buscada, encontrada bajando paulatinamente la horizontal. El volumen $V_1$ se mueve entonces del primer desmonte (de la derecha á la izquierda) al primer terraplén, cuya parte P entre los puntos A y T debe construírse del préstamo al precio $p$; el volumen $V_2$ se mueve de la izquierda á la derecha, el $V_3$ en el sentido contrario, etc., hasta llegar al último desmonte que no se equilibra con su terraplén vecino debiéndose la parte D entre los puntos X y B estar depositada al lado de la excavación, siendo $d$ el gasto respectivo por unidad de volumen. Sean $t_1$, $t_2$, $t_3$ ... los precios de transporte correspondientes á las distancias *máximas* T′Q′, R′Z′... (transporte en dirección de la derecha á la izquierda), y $e_1$, $e_2$ ... los del transporte en el sentido contrario. Si el volumen transportado del primer desmonte al primer terraplén fuese $V_1+1$, el aumento correspondiente del costo total C de las obras sería:

$$\Delta C=(t_1+t_2+t_3+...)-(e_1+e_2+...)-(p+d) \qquad (59)$$

Designando la suma de $t_1+t_2+t_3+...$ por T y la de $e_1+e_2+e_3+...$ por E y tomando en consideración que si la unidad «1» agregada al volumen $V_1$ es infinitamente pequeña, el aumento del costo $\Delta C$ debe ser nulo, la condición de la distribución de la tierra más económica sería:

$$T-E=p+d... \qquad (60)$$

Para un solo terraplén y un solo desmonte (fig. 7) la fórmula se modificaría así:

$$T=p+d... \qquad (61)$$

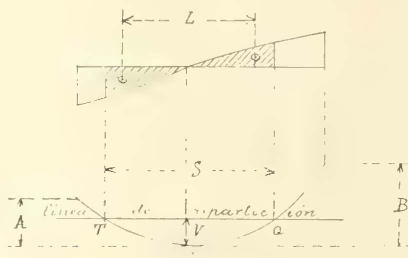



Fig. 7

donde T es el precio de transporte de la unidad de volumen á distancia TQ=S.

### § 2. *Condición de repartición más económica para el caso de un solo terraplén y un solo desmonte*

Aplicando la fórmula de Taylor, tratemos de demostrar que el procedimiento de Brückner tan general á primera vista, en realidad no

lo es. Empecemos por el caso sencillo de un solo terraplén acompañado por un desmonte.

Sea V el volumen de tierra correspondiente á la distribución más económica, A y B volúmenes del terraplén y de la excavación respectivamente, L distancia entre sus centros de gravedad, ó sea distancia media de transporte, la que se toma en consideración al aplicar el precio. Sea luego $\varphi$ la función que expresa la relación entre el precio y la distancia de transporte, de manera que el gasto de llevar una unidad de volumen á distancia L sería $\varphi(L)$ y á la distancia S sería $\varphi(S)$.

El costo total de las obras es:

$$C = (A - V)p + V \cdot \varphi(L) + (B - V) \cdot d \ldots \qquad (62)$$

La condición de que este gasto sea mínimo es:

$$\frac{dC}{dV} = -p + V \cdot \frac{d\varphi}{dL} \cdot \frac{dL}{dV} + \varphi(L) - d = 0; \qquad \frac{d^2C}{dV^2} > 0 \ldots \qquad (63)$$

ó sea:

$$V \cdot \frac{d\varphi}{dL} \cdot \frac{dL}{dV} + \varphi(L) = p + d \ldots \qquad (64)$$

La diferenciación se ha efectuado teniendo en cuenta que V y por consiguiente L aún son desconocidos, pero que L es una función de V. En tal virtud $\frac{d\varphi}{dL}$ representa la *derivada parcial* de $\varphi$ con respecto á L, y $\frac{dL}{dV}$ — la derivada total de la función que expresa la relación entre el volumen transportado y la distancia media. No tenemos mayor interés en conocer su aspecto, pues como se verá adelante, esta función finalmente se elimina de los cálculos. Según la fórmula de Taylor se tiene:

$$\varphi(S) = \varphi(L) + (S - L) \cdot \frac{d\varphi}{dL} + \frac{(S - L)^2}{2!} \cdot \frac{d^2\varphi}{dL^2} + \ldots + \frac{(S - L)^m}{m!} \cdot \frac{d^m\varphi}{dL^m} + \ldots \quad (65)$$

Poniendo:

$$\frac{(S - L)^2}{2!} \cdot \frac{d^2\varphi}{dL^2} + \ldots + \frac{(S - L)^m}{m!} \cdot \frac{d^m\varphi}{dL^m} + \ldots = 0 \ldots \qquad (66)$$

se tiene:

$$\varphi(S) = \varphi(L) + (S - L) \cdot \frac{d\varphi}{dL} + 0 \ldots \qquad (67)$$

Introduciendo el valor de $\varphi(\mathrm{S})$ de la (67) á la (64):

$$\varphi(\mathrm{S})-(\mathrm{S}-\mathrm{L})\cdot\frac{d\varphi}{d\mathrm{L}}-\theta+\mathrm{V}\cdot\frac{d\varphi}{d\mathrm{L}}\cdot\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{V}}=p+d\ldots \qquad (68)$$

$$\varphi(\mathrm{S})-\theta+\frac{d\varphi}{d\mathrm{L}}\left[-\mathrm{S}+\mathrm{L}+\mathrm{V}\cdot\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{V}}\right]=p+d\ldots \qquad (69)$$

La diferencial del segmento TQC (fig. 7) es igual á $\mathrm{S}.d\mathrm{V}$, de manera que:

$$\frac{d}{d\mathrm{V}}(\mathrm{V}.\mathrm{L})=\mathrm{L}+\mathrm{V}\cdot\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{V}}=\mathrm{S}\ldots \qquad (70)$$

Sentado esto, la ecuación (69) se transforma así:

$$\varphi(\mathrm{S})-\theta=p+d\ldots \qquad (71)$$

Según nuestro convenio $\varphi(\mathrm{S})=\mathrm{T}$, de manera que la condición de la distribución más económica de la tierra sería:

$$\mathrm{T}-\theta=p+d\ldots \qquad (72)$$

Esta condición comparada con la (61) demuestra que el procedimiento de Brückner es estrictamente aplicable si $\theta=0$. Tal es, por ejemplo, el caso cuando el precio de transporte es función lineal de la distancia: $\varphi=a+b\mathrm{L}$, siendo $a$ y $b$ constantes.

El transporte de tierra con rieles y vagonetas Decauville supone la relación parabólica entre el costo unitario del trabajo y la distancia: $\varphi=a\mathrm{L}^2+b\mathrm{L}+c$. El coeficiente $a$ que influye sobre el valor de la segunda derivada $\frac{d^2\varphi}{d\mathrm{L}^2}=2a=\theta$ es generalmente muy pequeño, por consiguiente la solución del problema de distribución de tierra por el procedimiento Brückner daría en este caso resultados, aunque inexactos, bastante aproximados.

*Ejemplo.* — Determinar las condiciones de repartición más económica de tierra en la construcción de un terraplén de 400 metros lineales, de altura uniforme y de 10.000 metros cúbicos de volumen, adyacente á un desmonte de 600 metros lineales de largo, de igual volumen y también de profundidad uniforme. El precio de movimiento de tierra del préstamo $p$ es de 72,5 centavos por metro cúbico; el costo de depósito no se toma en consideración ($d=0$). El precio de transporte

con Decauville en pesos moneda nacional por metro cúbico, determínese según la fórmula :

$$\varphi = aL^2 + bL + c = 0{,}0000002\ L^2 + 0{,}000412\ L + 0{,}225.$$

siendo L la distancia media de transporte.

La curva de masas se reduce á las dos rectas AC y BC (fig. 8), siendo en consecuencia $L = \frac{1}{2}S$ para cualquier línea de repartición.

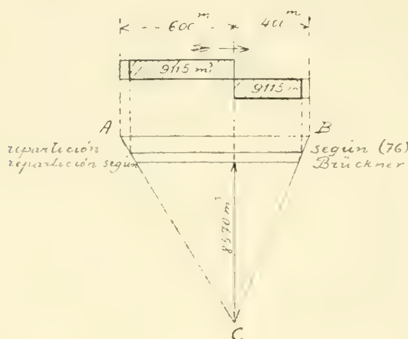



Fig. 8

El valor $\theta$ de la fórmula (66) es en este caso :

$$\theta = \frac{(S - L)^2}{2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dL^2} = \frac{1}{4} a \,.\, S^2 = 0.00000005\, S^2.$$

El largo total S de transporte según el procedimiento de Brückner se determinaría por la fórmula (61) :

$$0{,}0000002\ S^2 + 0{,}000412\ S + 0{,}225 = 0{,}725 ;$$
$$S = 857\,m ; \qquad L = 428{,}5\,m.$$

En realidad hay que aplicar la (72) en la forma siguiente :

$$0{,}00000015\ S^2 + 0{,}000412\ S + 0{,}225 = 0{,}725 ;$$
$$S = 911{,}3\,m ; \qquad L = 455{,}6\,m.$$

El costo del terraplén construído según el procedimiento de Brückner sería :

| | Metros cúbicos | Pesos m/n |
|---|---|---|
| Transporte de tierra del desmonte á distancia media 428m5 | 8.570 | á 0.438 = 3753.66 |
| Movimientos de tierra del préstamo | 1.430 | á 0.725 = 1036.75 |
| | 10.000 | 4790.41 |

El mismo costo aplicando la fórmula (72) es :

| | Metros cúbicos | Pesos m/n |
|---|---|---|
| Transporte de tierra del desmonte á distancia media 455m6 | 9.113 | á 0.454 = 4137.30 |
| Movimientos de tierra del préstamo | 887 | á 0.725 = 643.08 |
| | 10.000 | 4780.38 |

La última solución es también preferible por utilizarse mayor cantidad de tierra sacada del desmonte, en comparación con el procedimiento de Brückner.

## § 3. *Varios terraplenes y desmontes alternados*

Nuestra afirmación de que el procedimiento de Brückner no es general, puede extenderse al caso de varios terraplenes y desmontes alternados.

Sean (fig. 9):



Fig. 9

$A_1$, $A_3$, $A_5$... volúmenes de estos desmontes;

$d_1$, $d_3$, $d_5$... costo de depósito de tierra al lado de cada excavación, por unidad de volumen;

$B_2$, $B_4$, $B_6$.... volúmenes de los terraplenes;

$p_2$, $p_4$, $p_6$... precios de movimientos de tierra de los préstamos;

$L_1$, $L_2$, $L_3$... distancias medias de transporte;

$\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$... funciones expresando la relación entre los precios y distancias de transporte.

Designando por V el volumen que se transportaría de la primera excavación $A_1$, al primer terraplén $B_2$, podemos escribir :

$$dV = -d(B_2 - V) = +d(A_3 - B_2 + V) = \\ = -d(B_4 - A_3 + B_2 - V) = \ldots \qquad (73)$$

El costo total de las obras sería :

$$C = (A_1 - V).d_1 + V.\varphi_1(L_1) + (B_2 - V).\varphi_2(L_2) + \\ + (A_3 - B_2 + V).\varphi_3(L_3) + \ldots + (B_{2n} - A_{2n-1} + \\ + \ldots - A_3 + B_2 - V)p_{2n} \ldots \qquad (74)$$

cuyo mínimo se obtiene bajo la siguiente condición, teniendo en vista la (73) :

$$-d + \varphi_1(L_1) + V\left[\frac{d\varphi_1}{dL}\cdot\frac{dL}{dV}\right]_{L_1} - \varphi_2(L_2) - (B_2 - V)\left[\frac{d\varphi_2}{dL}\cdot\frac{dL}{d(B_2 - V)}\right]_{L_2} + \\ + \varphi_3(L_3) + (A_3 - B_2 + V)\cdot\left[\frac{d\varphi_3}{dL}\cdot\frac{dL}{d(A_3 - B_2 + V)}\right]_{L_3} - \\ - \ldots - p_{2n} = 0; \frac{d^2C}{dV^2} > 0 \qquad (75)$$

Del modo análogo al aplicado en el caso de un solo terraplén y un desmonte se puede demostrar que:

$$\varphi_1(L_1) + V\left[\frac{d\varphi_1}{dL}\cdot\frac{dL}{dV}\right]_{L_1} = \varphi_1(S_1) - \theta_1 \ldots \qquad (76)$$

$$\varphi_2(L_2) + (B_2 - V)\left[\frac{d\varphi_2}{dL}\cdot\frac{dL}{d(B_2 - V)}\right]_{L_2} = \varphi_2(S_2) - \theta_2 \ldots \qquad (77)$$

de manera que modificando la (75) tenemos :

$$-d_1 + \varphi_1(S_1) - \theta_1 - \varphi_2(S_2) + \theta_2 + \varphi_3(S_3) - \theta_3 - \ldots - p_{2n} = 0 \ldots \qquad (78)$$

ó sea :

$$T - E + (\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 + \ldots + \theta_1 - \theta_3 - \theta_5 - \ldots) = d_1 + p_{2n} \qquad (79)$$

Comparando la (79) con la (60), resulta que el procedimiento de Brückner es aplicable, siendo :

$$\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 \ldots = \theta_1 + \theta_3 + \theta_5 + \ldots \qquad (80)$$

lo que tiene lugar, por ejemplo, si todas las funciones $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3 \ldots$ son

del primer grado. Ese es el caso de un terreno accidentado con terraplenes y desmontes cortos.

Para generalizar nuestro razonamiento á todos los casos posibles, notemos que los trabajos de movimientos de tierra que hemos estudiado, principian por un desmonte, terminándose por un terraplén. Puede suceder que las obras tengan terraplenes ó desmontes á ambas extremidades, variando en consecuencia las fórmulas (60) y (79) en esta forma:

$$T - E = 0 \dots \qquad (60 \text{ bis})$$

$$T - E = \theta_1 + \theta_3 + \theta_5 + \dots - \theta_2 - \theta_4 - \theta_6 - \dots \qquad (79 \text{ bis})$$

debiendo siempre realizarse la condición (80) para poder aplicar el procedimiento de Brückner.

No escapará al lector el pequeño detalle de que al escribir la (79 bis) se ha supuesto $d_1 = d_{2n+1}$ y $p_2 = p_{2n}$.

Completemos el estudio analizando la condición suplementaria $\frac{d^2C}{dV^2} > 0$ de las fórmulas (63) y (75). Para el caso de un solo terraplén acompañado de un desmonte, esta condición se escribiría:

$$2 \cdot \frac{d\varphi}{dL} \cdot \frac{dL}{dV} + V \cdot \left[ \frac{d^2\varphi}{dL^2} \cdot \left( \frac{dL}{dV} \right) + \frac{d\varphi}{dL} \cdot \frac{d^2L}{dV^2} \right] > 0 \dots \qquad (81)$$

Tomando en consideración la (82):

$$\frac{dS}{dV} = V \cdot \frac{d^2L}{dV^2} + 2 \cdot \frac{dL}{dV} \dots \qquad (82)$$

podemos modificar la (81) en esta forma:

$$V \cdot \frac{d^2\varphi}{dL^2} \cdot \left( \frac{dL}{dV} \right)^2 + \frac{d\varphi}{dL} \cdot \frac{dS}{dV} > 0 \dots \qquad (83)$$

Admitiendo que todos los miembros de la fórmula que expresa la relación entre el precio de transporte y la distancia correspondiente son positivos, como es generalmente el caso en la práctica, podemos escribir:

$$\frac{d^2\varphi}{dL^2} > 0 \dots \qquad (84)$$

Además, representando analíticamente las condiciones que : 1° el precio $\varphi$ crece con el aumento de la distancia L y 2° que lo mismo sucede con L y S con respecto al volumen transportado V, tenemos :

$$\frac{dL}{dV} > 0; \qquad \frac{d\varphi}{dL} > 0; \qquad \frac{dS}{dV} > 0 \ldots \tag{85}$$

lo que quiere decir, que la condición (83) se cumple puesto que V es siempre positivo.

De un modo análogo se puede demostrar la validez de la condición $\frac{d^2C}{dV^2} > 0$ para el caso de varios terraplenes y desmontes.

Buenos Aires, junio de 1915.

# EL PROBLEMA INDÍGENA (1)

NECESIDAD DE DESTINAR TERRITORIOS RESERVADOS Á LOS INDÍGENAS DE PATAGONIA, TIERRA DEL FUEGO Y CHACO SEGÚN EL PROCEDER DE LOS ESTADOS UNIDOS DE NORTE AMÉRICA

Por ROBERT LEHMANN-NITSCHE

Señores:

La manera de encarar el problema indígena del país, ha llamado especialmente la atención de personas que han observado el mismo asunto en otras tierras donde se presenta en condiciones análogas: y, forzosamente, se llega á comparar los métodos que se han seguido para resolver cuestión algo complicada por cierto, pues en ella no se manejan objetos inanimados ni representantes del reino vegetal ó animal; entra en juego el hombre mismo. ¿Cómo proceder entonces? Es consecuencia fatal, biológica, que al chocar raza con raza, la más fuerte, y en este caso la superior, triunfe sobre la otra, cuya suerte es problema que ha de ocupar á la victoriosa. Para no perdernos en comparaciones demasiado extensas, basta oponer á la Argentina, un país donde este problema se ha desarrollado aproximadamente en la misma forma: los Estados Unidos de Norte América. El suelo nativo, fué arrebatado á los indígenas por los invasores de raza distinta: los hijos del país, fueron diezmados en las luchas continuas contra el enemigo; quedaron, al fin, todavía algunos residuos compactos de población autóctona. ¿Qué hacer con ellos?

Todos nosotros sabemos cómo procedieron los Estados Unidos: reservaron para los indios, territorios bastante grandes donde ellos

(1) Discurso leído en el Congreso científico internacional americano de Buenos Aires (1910).

pueden mantenerse á su manera; opinaron las clases dirigentes que á los indígenas corresponden análogos derechos de humanidad como á los invasores blancos y que no deben ser tratados como esclavos ni ser extinguidos por la fuerza. Se adoptó, pues, generalmente, el tenor de restringirlos á *reservaciones*, en beneficio propio y contra los abusos de blancos sin escrúpulos, así como también en favor de la seguridad de los blancos mismos. Creáronse tales reservaciones, ya en la época colonial, en New York, Massachusetts, Connecticut, Rhode Island y en otros estados, y el gobierno nacional siguió con este sistema. Tribus que habitaban el oeste del Mississippi fueron trasladadas á un territorio especial, designado por solemne convenio tierra permanente de su raza. Algunas de estas tribus han alcanzado un alto grado de civilización y un bienestar considerable. Otras, por ejemplo los Sioux, fueron reunidos en un territorio situado en el noroeste, etc. Actualmente, las diferentes reservaciones, situadas en los diferentes estados y territorios nacionales, pasan el número de 185. El gobierno nacional se empeña en resguardarlas de intrusos que pretendan radicarse allí; se empeña, además, en conducir á los indios á que se mantengan con otros medios y no únicamente de la caza que hoy en día ofrece recursos precarios; ayuda á los individuos menesterosos; y prohibe la venta de bebidas alcohólicas, multando severamente á los infractores.

Consideran, pues, los yanquis como deber ineludible de una gran nación, de cuidar á los descendientes de los antiguos señores de su dominio y darles, como á reyes destronados, un modo de existencia que avenga á su rango; ¡rasgo noble de un pueblo!

Contraste singular con esté procedimiento observamos en la Argentina; es base tácita, extirpar al indígena sin reemplazarlo.

Parece ser ésto el ideal del arte de « gobernar y poblar ». Un país vecino, el Uruguay, se jacta que ya no hay indios en su territorio! ¡Olvídanse los buenos orientales de la enorme cantidad de sangre mestiza que hay en todas partes de su campaña! Tomando las cosas como son, encontramos núcleos de la población originaria todavía en ciertas partes del Chaco, de la Patagonia y de la Tierra del Fuego, es decir en las mismas regiones que en su mayoría pertenecen al gobierno nacional en carácter de terrenos fiscales. ¿Qué es entonces lo que sucede? Sin tomar en consideración que estas tierras están habitadas por los representantes de la raza aborígen, se las vende en subasta pública al mejor postor. El habitante primitivo se ve entonces, por la fuerza y sin razón inteligible, expulsado de los pagos

donde moraban sus antepasados. Lógico es que se defienda y la reacción natural contra el proceder injusto de su enemigo representa esa lucha constante, activa y pasiva, que se observa en las fronteras y que impide una vida normal en aquellas regiones.

Para los que consideran la protección del indígena como lirismo excesivo, recordamos la faz práctica del asunto y reproducimos lo que habíamos escrito sobre los indios del Chaco argentino (1):

Esta gente representa sin duda un elemento importante en la explotación de la riqueza del país, fomento de industrias y del comercio de aquellas regiones, y en la época en que se necesitan brazos, constituyen un cuerpo de obreros sumamente barato y sin pretensiones, hábil para el desempeño de los trabajos ordinarios y pesados del campo y de los ingenios para lo cual el peón europeo, sería demasiado caro é incapaz de soportar el clima húmedo y caliente de aquella zona. El indígena, por el contrario, proporciona la obra de mano barata y fácil de manejar de que se sirve uno, cuando la necesita, y que en la época cuando no se trabaja, no ocasiona gastos ni de casa ni de comida: además, el consumo del indio en mercaderías durante la temporada, es muy considerable. Aquellas enormes regiones del Chaco, desiertas y calientes, no han de tener para el agricultor é industrial, sea europeo, sea de otra estirpe, más utilidad que la de ofrecerle en todo tiempo, y sin dificultades, brazos baratos para sus empresas; y dada la inaptitud de aclimatarse la raza blanca, *pur sang*, en las regiones tropicales, la conservación del elemento étnico indígena viene á tener suma importancia, bajo el punto de vista económico nacional para todos aquellos estados sudamericanos, que allí están situados ó se extienden hasta aquellas regiones. Desgraciadamente, tales ideas no suelen encontrar aceptación entre los hombres dirigentes de estos estados ó provincias; el indio es considerado como «mancha negra» y «signo de retroceso» y se le caza sin misericordia, extinguiéndose así un elemento irreemplazable que debió ser destinado á hacer posible la explotación general de las regiones tropicales y subtropicales.

No sé qué agregar á mis exposiciones; ruego al Congreso quiera votar en favor del siguiente proyecto:

*La República Argentina debe seguir el ejemplo dado por los Estados Unidos de Norte América, reservando grandes territorios para la población autóctona donde pueda vivir según sus costumbres, sin ser some-*

(1) LEHMANN-NITSCHE, *Estudios antropológicos sobre los Chiriguanos, Chorotes, Matacos y Tobas (Chaco occidental).* Anales del Museo de La Plata (2) I, página 51. 1908.

*tida á la llamada civilización de una raza distinta que para ella es algo incomprensible.*

Leídas las líneas que anteceden, la asamblea se ocupó de ellas con marcado interés, y en las actas del Congreso hállase insertada la discusión correspondiente (1):

La tesis del doctor Lehmann-Nitsche dió origen á un interesante debate.

El señor Ambrosetti, observa que por más humanitarios que sean los sentimientos que inspiran la proposición del señor Lehmann-Nitsche, los indios están condenados á desaparecer, sea por la codicia del blanco, sea por el alcohol, la sífilis, la viruela, el sarampión, y, en general, las enfermedades de los blancos que hacen estragos en los indígenas. Para que los indios no desaparezcan, sería necesario que el progreso no alcanzara á las regiones donde ellos viven.

El señor Ameghino, dice que á pesar de las razones muy atendibles del profesor Ambrosetti, se adhiere á la proposición presentada por Lehmann-Nitsche, siquiera sea por sentimiento de humanidad.

El señor Fric hace uso de la palabra, para tratar el papel que en estos asuntos desempeñan los frailes misioneros, agregando que al rebajar el nivel moral de los indios, los explotan de una manera inicua, y que las tales misiones son sólo agencias comerciales de la peor estofa, y ejemplifica diciendo que á fin de sacar dinero á los indios, llega á hacérseles celebrar ceremonias como el casamiento, bautismo, etc., cuatro, seis y más veces.

El señor Cabrera, replica diciendo que desconoce tales cosas, pero que no le extrañaría que hubiera acaecido, dado que los mercenarios abundan en todas partes, pero que el señor Fric puede estar seguro de que hoy se selecciona mucho el elemento á que se confía la misión.

Queda con esto terminado el debate y se acepta elevar la moción de Lehmann-Nitsche á sesión plena, redactando convenientemente las proposiciones.

En correlación con lo antedicho, se hallan entre los votos del congreso, los siguientes:

El Congreso científico internacional americano, formula votos porque:

*a)* En los países habitados por razas indígenas, se organicen sociedades protectoras de las mismas;

*b)* En los países habitados por indios salvajes, se fomenten las exploraciones geográficas que tengan por objeto descubrir regiones habitadas por aquéllos, para atraerlos á la civilización moderna.

(1) Congreso científico internacional americano, 10 á 25 de julio de 1910. Volumen I, páginas 316-317 y 569.

## EPÍLOGO

Al preparar este trabajo para la imprenta, volvemos á insistir en nuestro proyecto primitivo. El Congreso, según nuestro modo de entender, no ha comprendido bien el fondo del tema, es decir, que cada raza tiene una civilización característica á ella; que la de los indios americanos, es distinta de la de los europeos intrusos; que según el concepto científico, es imposible atraer una raza no europea á la civilización moderna (empleamos los mismos términos del voto sancionado).

Nosotros proponemos la concesión sempiterna de terrenos á los indígenas donde ellos pueden vivir á su gusto (como es el caso en los Estados Unidos) lo que no impide una vigilancia protectora contra la invasión de intrusos. La importancia del elemento indígena como factor económico es bien apreciada en países europeos que en las regiones calientes tienen colonias, y el Instituto colonial de Hamburgo ha ofrecido un alto premio (regalado por Eduardo Woermann) al mejor trabajo sobre medidas prácticas para aumentar, en las colonias alemanas, los nacimientos y disminuír la mortandad infantil entre los autóctonos, el factor activo más valioso bajo el punto de vista económico.

# FENÓMENOS PRODUCIDOS

## EN LA

# ILUMINACIÓN DE LOS BORDES DE LOS CUERPOS POR LOS RAYOS RÖNTGEN

(COMUNICACIÓN PRELIMINAR)

POR J. LAUB

—

En algunos artículos publicados en los años 1913 y 1914 en el *Physikalische Zeitschrift* he descripto una serie de nuevos fenómenos que tienen lugar, radiando los bordes de los cuerpos (también *amorfos)* con la luz Röntgen. Ya he mencionado, que en aquellos casos tenemos muy probablemente una difracción de los rayos X.

En este año he recogido — en cuanto me lo han permitido los muy modestos medios del laboratorio — un gran material de observación, el cual con seguridad tiene mucho interés.

Séame permitido comunicar en algunas palabras los más importantes resultados, los cuales parecen indicar, que iluminando *los bordes y las superficies de los cuerpos, se produce una especie de fenómenos de difracción, los que dependen de la estructura molecular.* La descripción exacta de las diferentes instalaciones con un extenso material numérico y fotográfico junto con la discusión, comunicaré más tarde en otro lugar.

1° Sacando sobre las placas fotográficas, puestas una detrás de la otra, la imagen, que se produce radiando con rayos X un *borde* ó una muy fina *ranura rectangular,* se recibe una *gran serie de rayas y bandas. El tamaño (longitud) de las rayas están entre sí, como las distancias de las placas al anticatodo; la razón de la distancia de las rayas es igual á la razón de las distancias de la ranura respectivamente del bor-*

*de á las placas* (1). Este hecho puede interpretar así: que las diferentes ondas contenidas en el haz primario de los rayos X, sufren una difracción sobre el borde ó sobre la ranura:

2° Colocando un diafragma *circular* en el trayecto de los rayos Röntgen, se recibió sobre las placas *una serie de anillos, cuyos diámetros son entre sí como las distancias de las placas del diafragma;*

3° Los fenómenos mencionados hemos recibido radiando los bordes del *hierro, zinc, plomo, cobre, platino, mercurio, carbón, vidrio y ebonita. Hay una dependencia del material. También la manera de preparar el borde tiene su influencia;*

4° *El material del anticatodo, la dureza de los tubos influye á los fenómenos.* Hemos usado tubos *Lindemann* con un anticatodo de platino y tungestano, además tubos Müller Rapid, con anticatodo de platino y un tubo de Siemens con anticatodo de tántalo;

5° La radiación *del borde de una lámina de mica,* no muy fina, ha *dado imágenes análogas.* (Aplicando láminas finísimas y rayos muy duros, no se recibe ninguna difracción. Hay en este caso evidentemente demasiado poco moléculas, para producir una difusión de los rayos Röntgen. Enviando rayos X por muy finas láminas de *yeso,* tampoco he recibido fenómenos de interferencia);

6° Enfocado el foco del anticatodo exactamente sobre un borde, se recibió en dos direcciones perpendiculares *una multitud de franjas rectangulares,* las cuales tapan toda la placa fotográfica. Especialmente bien recibí el fenómeno radiando el borde del *zinc. Se puede ver una serie de rectángulos, que recuerdan vivamente la difracción producida por la red bidimensional de la óptica común;*

7° *Especialmente es digno de mencionar,* que las rayas y los rectángulos en una mayor distancia de la imagen producida por el haz directo de rayos X, se encuentran casi diez veces aumentados;

8° Es evidente, *que hay una periodicidad y en la dirección de la radiación* (capas de moléculas superpuestas regularmente), porque radiando durante veinte horas una ranura formada por dos bordes, he encontrado la ranura impresionada repetidamente sobre la placa. Las

(1) Lo mismo sucedía también con las manchas de interferencia, cuando los rayos X *atravesaron* una lámina de *mica* (diafragma circular, diámetro 5 mm.). Séame permitido en este lugar mencionar la siguiente observación. En las manchas de interferencia *(circulares)* se ha podido ver una serie de *rayas,* aunque el *diafragma era circular.* La experiencia resolverá si esto depende especialmente de la *estructura* de la mica.

imágenes de la ranura se *encadenan* en forma *circular*. La repeticion de esta forma la he podido ver hasta sobre los tres círculos;

9° Los fenómenos descriptos *los he podido observar también sobre una pantalla fosforescente;*

10° Cuando los rayos X han atravesado una fina lámina de *platino* he recibido fenómenos análogos, como ya los han descripto el señor Hupka y el autor en el año 1913 en la revista *Physikalische Zeitschrift.* Especialmente era interesante la imagen, que recibí, *cuando los rayos* Röntgen *han atravesado una fina lámina de plomo* laminado en el taller del laboratorio *(diafragma circular).* Se han encontrado sobre la placa: *a) bandas* que forman una cruz; *b) una multitud de rayas.* Radiando el *borde* de la *misma* lámina, se ha obtenido rayas, las cuales han tenido sin embargo una forma diferente. Las rayas que se forman durante el *pasaje* de los rayos X consisten en *muy pequeñas rayas,* podemos decir, que consisten casi en puntos; mientras que las rayas producidas por el borde tienen el mismo aspecto, como las recibidas en la difracción de la luz común:

11° Colocando una lámina de *platino* en el trayecto de los rayos X, llegados del anticatodo de *platino* después del paso por una ranura muy fina de *plomo,* casi *todas las rayas han quedado absorbidas,* las *bandas eran como borradas,* se han quedado únicamente puntos aislados. Pero la imagen directa de la ranura fina se ha podido ver muy exactamente (visiblemente podemos considerar la fuente de los rayos X como un punto):

12° *Calentando una lámina de acero al rojo y radiando inmediatamente el borde,* no había influencia sobre el fenómeno descripto.

Buenos Aires, Departamento de física del Instituto nacional del profesorado secundario, octubre 1° de 1915.

REGLAMENTO DE CONCURSOS CIENTÍFICO ANUALES

# PREMIOS « AMEGHINO » Y « AGÚSTÍN ÁLVAREZ »

Art. 1°. — El premio « Ameghino » se adjudicará al autor del mejor trabajo presentado sobre paleontología, antropología, geología ó etnografía de la República Argentina. Consistirá en una medalla de oro y diploma.

Art. 2°. — El premio « Agustín Alvarez » consistirá en una medalla de oro y diploma, y se acordará al autor del mejor trabajo sobre historia ó sociología argentinas.

Art. 3°. — Estos premios se discernirán anual y alternativamente, es decir, cada uno de ellos se adjudicará cada dos años.

Art. 4°. — En una de las primeras sesiones de cada período anual, la junta directiva nombrará un jurado especial, formado por cinco miembros de la sociedad, que estudiará los trabajos presentados y adjudicará el premio.

Art. 5°. — El fallo del jurado será inapelable por los autores.

Art. 6°. — El jurado podrá declarar desiertos los premios.

Art. 7°. — Los trabajos que se presenten serán inéditos. Constarán, como máximum, de 30.000 palabras, y estarán escritos á máquina. Los originales no se devolverán.

Art. 8°. — Los trabajos premiados se publicarán en los *Anales* de la sociedad, y sus autores tendrán derecho á cien ejemplares de aquellos, en tirada aparte.

Art. 9°. — Los trabajos se presentarán sin firma, y se entregarán.

contra recibo, en la Sociedad científica argentina, hasta el día 15 de mayo de cada año.

Todo trabajo llevará un lema. Éste irá escrito en un sobre cerrado y lacrado, que se entregará juntamente con aquél. El sobre deberá contener un papel en que irán escritos el lema, el nombre del autor y la firma de éste.

Tanto en el trabajo como en el sobre adjunto, se hará constar el premio al cual se aspirare.

Art. 10. — Los premios se entregarán en acto público, el día 23 de julio, aniversario de la fundación de la sociedad.

# BIBLIOGRAFÍA

R. Marcolongo, *Las investigaciones de K. Sudman sobre el problema de los tres cuerpos, por Giovn. di Battaglini.* 1914.

El problema matemático de los $n$ cuerpos, como se sabe, es el siguiente :

« *Tres o más puntos materiales* $P_0$, $P_1$, $P_2$, ... *de masas* $m_0$, $m_1$, $m_2$, ... *respectivamente, se atraen mutuamente según la ley de Newton ; conocidas las condiciones del movimiento correspondientes á un instante dado (inicial), determinar las coordenadas y las velocidades de los n puntos para cualquier valor del tiempo.*

La bibliografía de este histórico problema es extensa y bastará citar :

A. Gautier, *Essai historique sur le problème des trois corps.* 1817.

A. Cayley, *Report on the Progress of the solution of certain special probleme of Dynamics. (Brit. Ass.*, 1862).

E. Küllrich, *Zur Geschichte d. mathem. Dreikörperprobl.* Halle, 1891.

En el caso de los tres cuerpos el problema está en hallar las integrales de 18 ecuaciones diferenciales de primer orden, en efecto : el primer teorema del impulso (conservación del movimiento del centro de masa) dice que tal centro permanece en reposo ó se mueve con un movimiento rectilíneo y uniforme. Supongámoslo fijo (con lo cual no disminuímos la generalidad del problema) y refiramos las posiciones de los puntos á una terna fija ortogonal cuyo origen coincide con el centro de masa.

Dado $n=3$ (9 grados de libertad) y reducida á 1 (por una conveniente elección de unidades) la constante de la gravedad, las ecuaciones del movimiento toman la forma

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{dx_0}{dt} = x'_0 ; & \frac{dx'_0}{dt} = m_1 \frac{x_1 - x_0}{r_2^3} + m_2 \frac{x_2 - x_0}{r_1^3} ; \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

en que $r_0$, $r_1$, $r_2$, son las distancias $P_1P_2$, $P_2P_0$, $P_0P_1$.

Se trata entonces de integrar 18 ecuaciones diferenciales de primer orden.

Podemos asignar desde ya :

1°. Los seis integrales del centro de masa (lineales en las coordenados y en los componentes de la velocidad de los tres puntos) ;

2°. Los tres integrales de las áreas (bilineales en las mismas variables) ;

3°. El integral de la conservación de la energía (cuadrático en las componentes de las velocidades y algebraico en las coordenadas), es decir diez integrales algebraicos en las coordenadas y en las componentes de la velocidad.

En el problema general de los $n$ cuerpos subsisten los diez integrales, pero el número de las ecuaciones diferenciales aumenta á $6n$.

Newton resolvió el problema de los dos cuerpos, Clairaut, entre otros, se ocupó, en 1759, del problema de los tres cuerpos y llegó á escribir las ecuaciones del movimiento y sus integrales inmediatos, donde abandonó la tarea anotando : *intègre maintenant qui pourra.*

El problema estaba en reducir el orden del sistema (1) lo que consiguieron Lagrange y Jacobi llegando á un sistema de sexto orden.

Reducciones ulteriores han sido demostradas imposibles de obtenerse por Lie y Bruns ; no queda entonces sino una solución por aproximaciones sucesivas ó por desarrollo en serie.

Lejeune-Dirichlet confió á Kronecker en los últimos tiempos de su vida que había resuelto el problema de los tres cuerpos con un método de aproximaciones sucesivas aplicable á todos los problemas de la mecánica ; entre los papeles que Dirichlet dejó, nada se ha encontrado, lo que ha de extrañar cuando se sepa que Dirichlet no escribía sus memorias científicas sino cuando las tenía elaboradas en la mente.

Poincaré en una de sus más importantes memorias (*) ha tratado el llamado problema restringido de los tres cuerpos y aunque no llegó á la solución del problema consiguió notables resultados y llegó á la conclusión que el problema de los tres cuerpos si llegara á ser resuelto lo sería con instrumentos de análisis mucho más delicados que los actuales.

Sin embargo Sundman, un astrónomo de Helsingfors ha conseguido resolver el problema con el solo análisis moderno y con una sencillez verdaderamente extraordinaria.

La primer memoria de Sudman, titulado *Recherches sur le problème des trois corps*, apareció en las *Actae Soc. Scient. Fennicae* en 1907, y la tercera, que ha sido premiada por la Academia de París, apareció en los *Acta Mathematica* de 1912, páginas 105 a 179 bajo el título de *Mémoire sur le problème des trois corps.*

De los dos métodos indicados como posibles para la solución del problema, Sudman se vale del segundo : el desarrollo en serie.

Se puede reducir el sistema (1) de 18° orden á uno de 12° orden mediante la transformación de Jacobi y Radau, es decir refiriendo la posición de $P_1$ á $P_0$, llamando $x$, $y$, $z$, la coordenada de $P_1$ respecto á $P_0$ y $r = r_2$ la distancia $P_0P_1$, y llamando además $\xi$, $\eta$, $\zeta$ las coordinadas de $P_2$ respecto al centro G de masa de las dos masas colocadas en $P_0$ y $P_1$ y P la distancia $P_2G$, se obtiene el sistema de 12° orden formado por seis ecuaciones de segundo orden :

(*) Poincaré, *Sur le problème des trois corps et l'équation de la dynamique.* (*Acta Mathém.*, t. 13, páginas 1 á 270, 1890).

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{m_0+m_1}{r^3}x=X=-m'x\left(\dfrac{\lambda}{r^3_0}+\dfrac{\mu}{r^3_1}\right)+m_2\xi\left(\dfrac{1}{r^3_0}+\dfrac{1}{r^3_1}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{d^2\xi}{dt^2}=\Xi=-M\xi\left(\dfrac{\lambda}{r^3_0}+\dfrac{\mu}{r^3_1}\right)+\mu Mx\left(\dfrac{1}{r^3_0}-\dfrac{1}{r^3_1}\right)\end{array}\right\} \quad (2)$$

En los segundos miembros de estas ecuaciones no figura ya $r$ en el denominador; M es la masa total y $\lambda$ y $\mu$ dos constantes positivas.

Para el nuevo sistema subsisten los tres integrales de las áreas y el de la energía y á este último Sudman lo transforma empleando la función R de Lagrange y obtiene la siguiente forma para la ecuación de Lagrange

$$2R\frac{d^2R}{dt^2}+\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+K-\frac{f^2}{R^2}=F$$

en que

$$R^2=\frac{r^2_0}{m_0}+\frac{r^2_1}{m_1}+\frac{r^2_2}{m_2}=gr^2+hp^2 \quad (g \text{ y } h \text{ const.} > 0)$$

$K$ = la constante de las fuerzas vivas;

$f$ = el momento (constante) que resulta de multiplicar las cantidades de movimiento por la constante $\dfrac{M}{m_0m_1m_2}$;

$F \geq 0$ e igual á $P-\dfrac{f^2}{R^2}$ en que

$P$ = expresión $> 0$ igual á la suma de siete cuadrados.

Para obtener el tercer sistema, Sudman hace intervenir una variable $u$ tal que

$$dt=rdu \qquad (t=t_0,\ u=0$$

en que $r$ es la menor de las distancias entre $P_0P_1P_2$ en el intervalo $t_0-t$ en que $t_0$ es una constante a la que se puede fijar cualquier valor.

Se obtiene así el sistema

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{dr}{du}=r', & \dfrac{dr'}{du}=m_0+m_1+rL, & \dfrac{dt}{du}=r\\ \dfrac{dx}{du}=x', & \dfrac{dx'}{du}=\alpha+r^2X, & \dfrac{d\alpha}{du}=Xrr'+Lx'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{d\xi}{du}=r\xi', & \dfrac{d\xi'}{du}=r\Xi. & \\ \cdots & \cdots & \cdots\end{array}\right\} \quad (3)$$

en que define 18 funciones de la variable $u$ y en el que

$$L = xX + \ldots + \frac{2m_2(m_0 + m_1)}{m_0 r_0} + \frac{2m_2(m_0 + m_1)}{m_1 r_1} - \frac{h(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}{g} - \frac{K}{g}$$

$$\alpha = \frac{r'}{r} x' - \frac{m_0 + m_1}{r} x$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Desde este punto Sunderman se basa en el teorema de existencia de Cauchy-Picard para un sistema de $n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, que como la generalidad de las de la mecánica, no contienen el tiempo explícitamente.

Sudman llega mediante este teorema á demostrar el siguiente :

A. — *Si cuando $t$ tiende á $t_0$ para valores reales, las variables $x_i$ tienden hacia valores reales y finitos $x^0_i$, de manera que las distancias $r^0_1$, $r^0_2$, $r^0_3$, sean mayores que $14x$ ($x$ positivo), las coordenadas, las velocidades y las distancias de los tres puntos son funciones desarrollables en series ordenadas según las potencias enteras de $t - t_0$ y convergentes siempre que :*

$$|t - t_0| \leq T = \frac{x}{\sqrt{\frac{4M^2}{21mx} + M|K|}}$$

*además, en ese intervalo, será*

$$|x_i - x^0_i| < x.$$

$m$ es la menor de las masas en la hipótesis de que ninguna de las tres sea infinitamente pequeña. En este intervalo el movimiento se llama *regular*.

Sundman puede entonces demostrar un teorema de Painlevé cuando para $t = t_1$ cesa el movimiento regular y, por consiguiente, el comportamiento analítico regular de los segundos miembros de las (1).

*Cuando el movimiento deja de ser regular para $t = t_1$ ó los tres cuerpos chocan entre sí en un mismo punto del espacio (colisión triple).*

*O dos de ellos chocan entre sí y sus distancias al tercero tienden á un límite finito y positivo (colisión simple).*

La demostración que de este teorema da Sudman es elegante y ella incluye las demostraciones dadas para el problema restringido de los tres cuerpos por Levi Bivita y la demostración del postulado de Bisconcini.

Sundman demuestra además, valiéndose del teorema de Cauchy y de la investigación de los límites superiores de los segundos miembros de las (3) que :

B. — *En la solución del sistema* (3) *deducida de la de* (1) *las incógnitas*

$$r, r_0, r_1, \quad x, y, z, \quad x', y', z', \quad \rho, \xi, \eta, \zeta, \quad \xi', \eta', \zeta', \quad \alpha, \beta, \gamma$$

*son desarrollables según las potencias enteras de $u - u_1$ y convergen para*

$$|u - u_1| < N$$

donde N es una cantidad conocida cuyo valor Sundman determina.

Estos desarrollos conduce Sundman á una definición de la continuación analítica del movimiento después de un choque y concluye que : *o se puede continuar definiendo el movimiento por trechos sucesivos y para todos los valores de $t$* y entonces el problema de los tres cuerpos está resuelto *ó los valores de $t$ para los cuales el procedimiento es aplicable, tienen un límite superior $t$ finito,* pero Sundman demuestra que si las constantes de las áreas no son todas nulas, la función R no puede tender a cero para $t$ finito, es decir que no es posible una triple colisión. (Este teorema ya había sido hallado por Weierstrass), entonces el método de Sundman permite definir el movimiento para todo valor de $t$.

El caso de la colisión triple requiere aún quizá la aplicación de nuevas y más delicadas investigaciones.

Como se ve, todo el éxito de Sundman depende de la feliz introducción de la nueva variable $u$, la cual cambia de trecho en trecho de definición, pues además que el tiempo depende de la menor de las distancias $r_0 r_1 r_2$ para cada trecho, de manera que los cálculos carecen de simetría.

Sundman alcanza esta simetría introduciendo en vez de la variable $u$ la siguiente variable $\omega$

$$dt = \Gamma d\omega \qquad (t = 0 \;\; \omega = 0)$$

en que

$$\Gamma = \left(l - e^{-\frac{r_0}{2}}\right)\left(l - e^{-\frac{r_1}{2}}\right)\left(l - e^{-\frac{r_2}{2}}\right)$$

en que $l$ es una constante determinada cuyo valor Sundman escribe.

La consecuencia final que contiene la solución del problema de los tres cuerpos es :

*Conocidas las condiciones iniciales, supuesto que las constantes de las áreas no sean todas nulas, se pueden hallar dos constantes* l *y* $\Omega$ *(que pueden corresponder á todo un grupo de movimientos debidos a diferentes circunstancias iniciales) y una variable* $\tau$, *de manera que las coordenadas, las distancias mutuas y el tiempo sean desarrollables en serie según las potencias de* $\tau$ *y convergentes para* $|\tau| < 1$.

*Tales series representan el movimiento para cualquier valor del tiempo y cualquiera que sea el número de los choques entre dos cuerpos, con tal de que después del choque el movimiento continúe en la manera descripta. Los coeficientes de los desarrollos en* $\tau$ *(conocidas* l *y* $\Omega$*) se calculan fácilmente mediante simples derivaciones.*

R. Bianchedi.

**Nociones de mineralogía**, por Juan B. Lara. Prudent hermanos y Moetzel, editores. 1915.

Estos elementos de mineralogía vienen á nutrir con acierto nuestra escasa literatura mineralógica.

El doctor Lara ha escrito un libro que será apreciado justamente por los alumnos de los colegios nacionales y escuelas normales para los cuales está destinado.

Sin embargo, el considerable número de minerales tratados ensanchará el círculo de los lectores.

El autor, profesor de la materia en el colegio nacional de Mendoza, ha sentido la necesidad de dedicar especial atención á las riquezas mineralógicas del suelo argentino. Esta preocupación se revela constantemente en su trabajo y junto con la sencillez, claridad y excelente método, constituye sus principales méritos.

La parte general comprende los siguientes capítulos : generalidades, los cristales, generalidades cristalográficas, formación y crecimiento del cristal. Sistemas cristalinos. Asociación de cristales. Física mineral. Caracteres físicos. Química mineral. Análisis por vía húmeda. Luego de un breve análisis de las distintas clasificaciones mineralógicas, adopta la de Brackebusch. Los capítulos referentes á mineralogía descriptiva se desarrollan como sigue : sistema de clasificaciones, elementos, lampridos, lampridos completos ó sulfosales, los óxidos, óxidos pesados ó metálicos, haloides, oxisales, caracteres de los sulfatos, nitratos, silicatos, piroxcenos, grupo de las micas, otros silicatos, silicatos de los amígdolas ó zeolitos, silicatos de metamorfismo, antrócidos.

El editor ha presentado la obra con toda corrección.

N. C. Laclau.

**Anales de la Academia de filosofía y letras** (Universidad de Buenos Aires). Tomo II, 1 volumen de 344 páginas. Buenos Aires, 1914.

En tal tomo de los citados *Anales* y entre otros trabajos, de los que son autores los doctores C. O. Bunge, J. A. García, H. G. Piñero, C. Jakob, R. Rivarola, E. Quesada y A. Dellepiane, figuran también los siguientes, relativos á nuestro malogrado sabio Ameghino :

*Estudio biográfico sobre el doctor Florentino Ameghino*, por Juan B. Ambrosetti. Este trabajo está constituído por una lista de 179 publicaciones científicas hechas entre los años 1875 y 1911, á la que se le ha agregado también una enumeración de cargos académicos y otros varios y de los congresos y sociedades de los cuales fué miembro el doctor Ameghino.

Conferencia dada en la Sociedad científica argentina por el señor Ricardo Rojas, con motivo del primer aniversario de la muerte del doctor Ameghino.

Juan José Carabelli.

**Señales trigonométricas**, por el teniente coronel Adrián Ruíz Moreno. Un volumen de 99 páginas con 50 figuras. Buenos Aires, 1915.

Esta obrita comprende sobre todo la descripción de varias señales y elementos utilizados en los levantamientos topográficos, como ser : jalones, mojones, torres, etc., pero en ella se cita especialmente una « bandera heliótropa Adrián Ruíz Moreno », un « carro torre » y una « escalera torre », también debidos al mismo autor.

La « bandera heliótropa » consiste en una bandera de género, dividida en dos zonas de diferente color, que lleva en el medio un espejo circular, metálico ó de

vidrio, destinado á reflejar los rayos luminosos. Se la emplea fijándola al asta por un solo costado, como las demás banderas.

Según el citado autor, esa señal da buenos resultados en la práctica.

JUAN JOSÉ CARABELLI.

**Efemérides para el año 1915.** Observatorio nacional argentino (Córdoba). Un volumen de 173 páginas. Editores Coni hermanos. Buenos Aires, 1915.

Estas efemérides están basadas sobre la lista de 57 estrellas circumpolares, cuyas posiciones medias son las más exactas de cuantas se publican en el hemisferio austral.

Se agregan también efemérides de varias estrellas de tiempo que están convenientemente situadas para observaciones en la república, y además efemérides del sol para mediodía de Washington, tomadas estas últimas del *American Ephemeris*.

El trabajo comprende las siguientes partes :

Longitudes y latitudes de varios puntos (todos de la república).

Efemérides de estrellas circumpolares.

Lista de estrellas de tiempo.

Efemérides de estrellas de tiempo.

Efemérides de sol para el meridiano de Washington.

Valores logarítmicos de *m* y *n* para reducciones al meridiano.

Tablas para calcular la refracción verdadera.

Tabla para convertir intervalos de tiempo sidéreo en intervalos de tiempo medio.

Tabla para convertir intervalos de tiempo medio en intervalos de tiempo sidéreo.

Logaritmos de senos y cosenos, con el argumento.

JUAN JOSÉ CARABELLI.

**Caoutchoucs** (Heveas brasiliensis) *Amazoniens et Asiatiques*, par FÉLIX RIPEAU. *Étude comparative. Le traitement des latex*, par ÉMILE LAROSE, XII-120 pages, con figuras y cuadros. Paris, 1914.

Obra destinada al estudio de los cauchos naturales desde el punto de vista científico é industrial, estableciendo comparaciones entre los producidos en el Brasil (zona amazónica) y el Extremo Oriente (zona indomalaya).

Los diferentes asuntos son tratados con suma claridad y comprenden una exposición general, origen de los Heveas de las plantaciones, clima, situación geográfica, naturaleza del terreno, aspecto de las plantaciones, sangría de los árboles, coagulación del latex en la usina, consideraciones sobre la coagulación de los latex de los Heveas, porvenir de las plantaciones de Extremo Oriente y Amazonas, consideraciones sobre la situación y porvenir del mercado de caucho.

En apéndice agrega notas sobre el estudio comparativo, técnico y comercial de

los Heveas brasiliensis y los de las plantaciones de las regiones asiáticas; y expone, por último, un tipo de aparato llamado *El tambor*, destinado al ahumaje del latex, operación de la cual depende la obtención de los mejores cauchos.

AUGUSTO C. SCALA.

**Sulla origine delle specie per elezione naturale**, per CARLO DARWIN. Traducción italiana de *Giovanni Canestrini*. Milán, 1914. Editor, Ermanno Bruciati y compañía.

Es bien conocida la notable obra de Darwin, no necesita presentación ni comentarios. No son frecuentes, sin embargo, las buenas traducciones; la actual, emprendida por el conocido profesor Canestrini, es notable por la exacta interpretación del original, motivo más que suficiente para anunciar su aparición á estudiosos argentinos.

AUGUSTO C. SCALA.

**Gregorio Mendel e l'opera sua**, per SERAFINO PATELLANI. Extracto de *Il Morgagni*, parte I, números 4, 5 y 6. 1914. Edit., Società Editrice Libraria. Milán.

El folleto contiene la traducción al italiano de los dos célebres trabajos de Fray Gregorio Mendel: *Versuche über Pflanzenhybriden* y *Uber einige aus Künstlicher Befruchtung gewonnene Hieraciumbastarde*.

Además de ser una exacta y correcta traducción del texto alemán directamente, tiene la ventaja del idioma mucho más abordable para nuestros estudiosos.

A. C. SCALA.

**Die Orchideen**, por el doctor RUDOLF SCHLECHTER, *ihre Beschreibung, Kultur und Züchtung*. Ed., Paul Parey. Berlín, 1914. (Entregas 1 y 2).

Las dos primeras entregas de esta importante obra contienen los caracteres generales de la familia, las descripciones de géneros y especies más típicas aclarando el texto numerosas láminas fotográficas y tetracromías realmente notables.

A. C. SCALA.

**Flora Sibiriæ et Orientalis Extremis**. Petrogrado, 1913.

Contiene esta entrega la descripción de las *Papaveraceas* y *Cruciferas*, acompañadas las principales especies con láminas, dibujos, fotografías en negro y muchas en colores, además de los mapas especiales de distribución geográfica.

A. C. SCALA.

**Mizodendraceae**, por Carl, Skottsberg *Das Pflanzenreich*, tomo IV, 68. Editor, A. Engler. Noviembre 10 de 1914. Wilhem Engelmann. Leipzig und Berlin, 1914.

Pequeña pero interesante familia formada por diez especies del único género *Myzodendron*, fitoparásito fanerogámico de nuestras *hayas (Nothofagus)* de la formación subantártica.

Está ilustrada con 46 dibujos distribuídos en 9 figuras.

A. C. Scala.

**Euforbiaceae-Acalypheae-Mercurialinae**, por F. Pax, *Das Pflanzenreich*, tomo IV, 147-VII. Noviembre 10 de 1914. Wilhelm Engelmann. Leipzig und Berlin, 1914. 473 páginas con 317 dibujos en 67 figuras.

Contiene esta importante monografía la descripción de los 51 géneros que componen el grupo, así como las de todas las especies de cada género, cuadros sinópticos y claves de determinación genéricas y específicas.

Además se publica el *Additamentum V* á las *Euforbiaceas.*

A. C. Scala.

**Bulletin de géographie botanique**. Le Mans (Sarthe). Año 23 (4ª serie) números 295, 296 y 297. Junio, julio y agosto de 1914, tomo XXIV.

Es el órgano mensual de la Academie internationale de botanique de Le Mans (Francia); entre los trabajos botánicos que contiene está el de N. Rojas Acosta sobre *Addenda ad floram Chaco Australis* (190), comprendiendo la descripción de diez plantas de aquella región, así enumeradas :

I, *Moraceas :* Trophisomia edulis *Roj.* (v. Yatita); Maclura trilobata *Roj.* (v. Yata-Iba).

II. *Aristoloquiaceas :* Aristolochia metriosa *Roj.* (v. Patito poni).

III. *Sapotaceas :* Sapota anguai *Roj.* (v. Anguai amarillo); Labatia odorata *Roj.* (v. Anguai oloroso); Labatia superba *Roj.* (v. Anguai guazú).

IV. *Rubiaceas :* Basanacantha trispinosa *Roj.* (v. Jazmín del bosque).

V. *Begoniaceas :* Begonia agrial *Roj.* (v. Agrial).

VI. *Mirtaceas :* Myrcialeucus odorifolius *Roj.* (v. Nangapiri-guazú).

VII. *Gutiferas :* Plathorheedia pacuri *Roj.* (v. Pacurí-miní).

Augusto C. Scala.

**Les plantes sauvages dangereuses ou utiles**, par G. B. Renaudet. Éditeur, Ernest Flammarion. Con 470 láminas explicativas. París, 1914.

Libro de divulgación científica; en él se describen numerosas plantas útiles y nocivas, poniendo tal enseñanza al alcance de todos.

A. C. Scala.

**Economia forestale**, per V. Perona, *Dendrometria*, IX, 312 páginas, ilustrada con 52 figuras. Editor, F. Vallardi. Milán, 1914.

Especialmente útil á los ingenieros agrónomos. Redacción clara y sencilla.

contiene todos los procedimientos conocidos en el arte especial de la dendrometría, por cuya razón no dudo será recibido gustosamente por los numerosos técnicos de nuestro país.

A. C. SCALA.

**Les cultures coloniales**, par HENRI JUMELLE, *Plantes oléagineuses*, 112 páginas, 47 figuras. Editor, J. B. Baillière et fils. París, 1914.

Contiene notas sobre la cultura y explotación industrial de las siguientes oleaginosas : coco y palma, maní, sésamo, ricino, algodón y soja.

A. C. SCALA.

**Handbuch der Pharmakognosie**, por A. TSCHIRCH. Entrega 38. Editor, Chr. Herm. Tauchnitz. Leipzig, diciembre 1914.

En esta entrega continúa y termina el artículo sobre frutos y aceite de anís estrellado. Siguen luego las drogas á base de engenol, safrol, azarona y apiol.

A. C. SCALA.

**Nuove piante mirmecòfile**, por G. E. MATTEI. En *Bolletino del R. Orto Botanico di Palermo*. Nueva serie, volumen 1, fascículo 1, páginas 39 á 46. Palermo, 1914.

Al catálogo de más de 3000 especies mirmecofitas enumeradas desde 1886 por Delfino y continuado por otros eminentes botánicos como Scheweinfurth, Schumann, Oliver, Pirotta, etc., se agregan las estudiadas por Mattei, quien agrega algunas consideraciones generales sobre su origen y función. Se encuentran todas en especies de *Acacia*, entre otras, la *A. Seyal* (var. *Fistula*), *A. zanzibarica*, *A. horrida* y *A. Giraffae*, sumando en total nueve especies de acacias, entre ellas tres no determinadas exactamente.

A. C. SCALA.

**La natura monopodiale dell'infiorescenze delle Crocifere**, por F. RAPPA. (*Loc. ant. cit.*, pp. 47 á 57.)

Dice el autor que la ausencia de la bráctea axilar en cada flor de las Crucíferas, ha dejado en suspenso la cuestión de si la inflorescencia de esta familia sea un monopodio ó un simpodio.

La suma de observaciones expuestas en su bien meditado trabajo, le resuelven á admitir tal inflorescencia como de naturaleza monopodial.

A consecuencia del desorden que se halla en las Crucíferas, ya sea en sus inflorescencias ya sea en su cuerpo vegetativo y afecta una familia tan vasta, no debe el hecho estimarse como excepción que deba atribuírse á factores especiales, sino que pone en duda las así llamadas armonías matemáticas de la filotaxis.

A. C. SCALA.

**Algunas plantas de la región del Nahuel-Huapí**, por el doctor CRISTÓBAL M. HICKEN, *Boletín de la Sociedad Physis*, tomo I, páginas 437-441 (31-XII-1914). Editor, Coni hermanos. Perú 684. Buenos Aires.

Contiene este muy interesante trabajo, el catálogo de 56 plantas recogidas por el señor Max Rothkugel en el valle del río Machete, que desemboca en el lago Nahuel-Huapí.

Cita varias especies nuevas para la República Argentina y una especie nueva para la ciencia y son las siguientes :

Familia de las *Poligonáceas : Polygonum tamnifolium* Kth.

Familia de las *Berberidáceas : Berberis linearifolia* Phil.

Familia de las *Saxifragáceas : Ribes densiflorum* Phil.

Familia de las *Mirtáceas : Eugenia petiolata* Phil. ; *Myrceugenia apiculata* (DC.) Ndz. ; *Myrteola Barneondi* Berg.

Familia de las *Ericáceas : Gautheria elegans* (Phil.) Phil.

Nueva para la ciencia es una *Compuesta :*

*Baccharis Holmbergi* Hicken. nov. spec., dedicada por el autor al profesor doctor don Eduardo L. Holmberg como homenaje con motivo de su jubilación de la cátedra de botánica que dictara en la Facultad de ciencias exactas de esta capital.

AUGUSTO C. SCALA.

# ÍNDICE GENERAL

DE LAS

# MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO OCTAGÉSIMO



## BIBLIOGRAFÍA



# PUBLICACIONES RECIBIDAS EN CANGE

## EXTRANJERAS *(conclusión)*

### Italia

Atti della I. R. Accad. di Scienze Lettere ed Arti degli Agiati, Rovereto — Atti della R. Accad. dei Fisiocritici, Siena. — Riv. Ligure, Genova. — Riv di Artiglieria e Genio, Roma. — Boll. della Soc. Geografica Italiana, Roma. — Ann. della Soc. degli Ing. e degli Architetti, Roma. — Boll. della Soc Zoologica Italiana, Roma — Gazz. Chimica Italiana, Roma. — Atti della Soc. dei Naturalisti, Modena. — Boll. della Soc. Médico Chirurgica, Pavia. — Atti della Soc. Ligustica, Genova. — Boll. del R. Comtato Geologico d l'Italia, Roma. — Boll. della R. Scuola Super. d'Agricultura, Portici. — Atti della Assoc. Elettrotecnica Italiana, Roma — Il monitore Tecnico. Milano. — Boll. del R. Orto Botanico, Palermo. — Boll. Mensuale dell'Osservatorio Centrale del R. Colegio Alberto in Moncalieri, Torino. — Atti del R. Instituto d'Incoraggiamento, Napoli. — Atti della Soc. Toscana di Scienze Naturali, Pisa. — Osservatorio Vaticano, Roma. — Atti della R. Accad. di Scienze, Lettere ed Arti, Modena. — Atti del Collegio degli Ingegneri e Architetti, Palermo. — La Navigazione Aerea, Roma. — Giornale del Genio Civile. Roma. — Rendiconte degli Studi ed Esperienze ese guite del Laboratorio de Costruzione auronautiche del Battaglione Specialiste, Roma. — Bollettino bimensuale della Societá Meteorologica Italiana, Torino. — Atti della Reale Accademia dei Lincei, Roma. — Societá Italiana per il progreso delle Scienze, Roma. — Rendiconte del Circolo Matematico di, Palermo. — Il Pitagora, Palermo.

### Japón

The Botanical Magazine, Tokyo. — The Journal. of Geography, Tokyo. — Annotations Zoological Japaness, Tokyo. — The Zoological Society, Tokyo.

### Méjico

Bol. del Observ. Astronómico Magnético Metereológico Central Méjico. — Bol. del Observ. Nacional, Tacubaya. — An. del Museo Nacional, Méjico. — Memoria y Rev. de la Soc. científica, Antonio Alzate. — An. del Inst. Médico Nacional, Méjico. — Bol. del Inst. Geológico, Méjico. — Anales del Museo de Arqueología, Historia y Etnología, Méjico. — Informes y memorias del Instituto Mexicano de Minas y Metalurgía, México.

### Natal

Geological Survey of the Colony, of Natal, Pietermaritzburg.

### Nueva Gales del Sur

Record of the Geological Survey (Department of Mines), Sydney.

### Nueva Zelandia

Transaction and proceeding of the New Zealande Institute, Wellingston.

### Paraguay

An. de la Universidad, Asunción.

### Perú (Lima)

An. de Minas. — Bol. de la Soc. Geográfica. — Informaciones y Memorias de la Soc. de Ingenieros del Perú. — Rev. de Ciencias. — Boletin del Ministerio de Fomento.

### Portugal

Bol. da Soc. Broteriana, Coimbra. — Jornal da Soc. das Sciencias Médicas, Lisboa. — Acad. R das Sciencias, Lisboa. — Bol. da Soc. de Geographia, Lisboa. — O Insttiuto Rev. Scient. é Litteraria, Coimbra. — Bol. do Observ. Metereológico é Magnético, Coimbra. — Bol. do Observ. da Universidade, Coimbra. — Bol. do Observ. Meterológico do Infante Dom Louis, Lisboa. — Annaes Scientificos da Academia Polytecnica do Porto, Coimbra.

### Rumania

Bol. de la Soc. Geográfica, — Bucuresci. — Buletinul Societatti Regale Romane de Geografie, Bucuresti.

### Rusia

Bul. de la Soc. de Geographie, Helsingfors. — Memoires de la Acad. Imperdes Sciences, Petrogrado. — Bull. de la Soc. Polithécnique, Moscow. — Rev. des Sciences Mathématiques, Moscow. — La Biblio-

teca Politecnica, Petrogrado. — Soc. pro Fauna et Flora, Fennica, Helsingfors. — Bull. de la Soc. Impér. des Naturalistes, Moscow. — An. de la Soc. Phisico Chimique, Petrogrado. — Bull. de la Soc. Imper de Geographie, Petrogrado. — Phisicalische Central Observatorium. Petrogrado. — Bull du Jardin Imper. de Botanique, Petrogrado. — Korrespondensblat de Natufors Vereins, Riga. — Bull. du Comité Géologique, Petrogrado. — Polytechnischen Vereins, Petrogrado

### San Salvador

Observ. Meteor. y Astron. El Salvador.

### Suecia y Noruega

Sveriges geologisca Underskning, Stockolm. — Kongl Vetenskaps. Akademiens. Stockolm. — Forhandl et Vidensk Selskabet, Cristiania.

### Suiza

Geographich Ethnographiche gesellschaft, Zurich. — Soc. Hevéltique des Sciences Naturelles, Berna. — Bull. de la Soc. Neufchateloise de Geographie, Neuchatel. — Observatoire Meteorologique, Neuchatel, — Bibliothek des eidgenossischen Polytechnikims, Zurich. — Archives Suisse d'anthropologie générale, Genevé,

### Uruguay (Montevideo)

Rev. de la Asociacion Rural. — Bol. de la Enseñanza Primaria. — An. de la Universidad. — Bol. del Observ. Metereorológico Municipal. — Revista de la Asociación de Ingenieros y Arquitectos del Uruguay, — Revista del Centro Farmacéutico Uruguay. — Revista del Ministerio de Industrias.

## NACIONALES

### Buenos Aires

Rev. de la Fac. de Agronomía y Veterinaria, La Plata — An. del Museo, La Plata. Rev. Mensual de la Cámara Mercantil, Barracas al Sud. — Revista del Centro de Ingeniería, La Plata. — Revista del Centro Estudiantes de Química y Farmacia, La Plata — Archivos de Pedagogía y Ciencias Afines, La Plata.

### Capital

An. del Círculo Médico Argentino. — An. de la Universidad de Buenos Aires. — Archivos de Criminalogía, Medicina legal y Psiquiatria. — Bol. de Estadística Municipal. — Rev Farmacéutica. — La Ingeniería. — An. del Depart Nacional de Higiene. — Rev. Técnica — An. de la Soc Rural Argentina. — An. del Museo Nacional de Buenos Aires. — Rev de la Soc. Médica Argentina — Rev. de la Asociacion Estudiantes de Ingeniería. — Rev. de la Liga Agraria. — Bol. de la Union Industrial Argentina. — Bol. del Centro Naval. — El Monitor de La Educacion Común. — La Semana Médica. — Anuario de la Direccion de Estadística. — Boletin del Museo Social Argentino. — Boletín de la Sociedad Physis. — Germinal. — Anales de Psicología. — Anales de la Sociedad Química Argentina. — Boletín y Anales de la Dirección de Minas, Geología é Hidrología. — Revue de la clinique Obstétricales et Gynécologique. — Boletín de la Sociedad de Oftalmología de Buenos Aires — Revista de Ciencias Económicas. — Boletín del Departamento Nacional del Trabajo — Revista de la Sanidad Militar. — Revista del Jardín Zoológico. — La Universidad Popular. — Boletín y Memorias del Ministerio de Agricultura. — Revista Zootécnica. — Revista de Agronomía.

### Córdoba

Bol. y Actas de la Academia Nacional. Revista de la Universidad Nacional.

### Entre-Ríos

An. de la Soc. Rural.

### Tucumán

Anuario Estadístico.

---

## SUBSCRIPCIONES

### Francia

Annales des Ponts et Chaussées. — « Revue » — Contes Rendus de l'Académie des Sciences. — Annales de Chimie et de Physique. — Nouvelles Annales de Mathématiques. — « La Nature ». — Nouvelles Annales de la Construction (Oppermann). — Revue Scientifique. — Revue de Deux-Mondes. — Revue générale des sciences, (Paris).

### Italia

Trattato Generale dell'Arte dell'Ingegnere. (Roma). — Memorie de archittetura practica, Torino). — L'Industria Chimica, (Torino). — Scientia (Rivista di Scienza), (Milano). — Nuova Enciclopedia de Chimica, (Roma). — Il Costruttore (Milano).

### Inglaterra

The Builder, (Londres).

### España

Enciclopedia Universal ilustrada, (Barcelona).



New York Botanical Garden Library
3 5185 00257 8274